

交叉色关联噪声驱动的单模激光系统统计性质研究

王 兵[†] 邵继红 吴秀清

(安徽理工大学理学院, 淮南 232001)

(2007 年 10 月 15 日收到 2008 年 5 月 25 日收到修改稿)

采用交叉色关联的加性色噪声和乘性色噪声驱动的单模激光立方模型, 通过诺维科夫理论和福克斯近似以及斯特拉托诺维奇近似, 得到反映激光统计性质的强度关联函数 C 的表达式, 研究关联时间 τ 、净增益系数 a_0 和交叉关联强度 λ 对强度关联函数 C 的影响. 数值模拟发现, 在阈值以上 ($a_0 > 0$) 时, 关联函数 C 随关联时间 τ 的增大而增大; 在阈值以下 ($a_0 < 0$) 时, 关联函数 C 随关联时间 τ 的增大而减小. 无论在阈值以上还是阈值以下, 关联函数 C 均随交叉关联强度 λ 的增大而减小. 在 C - a_0 曲线上存在单峰.

关键词: 单模激光, 交叉关联, 强度涨落, 强度关联函数

PACC: 0520, 0540, 4260K

1. 引 言

自 1991 年提出“噪声干涉”的概念以来^[1], 人们逐步深入地研究了噪声对随机系统的性质的影响问题. 在对激光的研究中, 已经知道包含加性噪声和乘性噪声的单模激光系统是研究激光系统统计性质的一个重要模型^[2-4]. 利用这一模型, 人们发现考虑加性噪声和乘性噪声对深入了解单模激光系统的统计性质具有十分重要的意义. 在早期的关于单模激光系统性质的研究中, 加性噪声和乘性噪声大多被看作是高斯白噪声, 并且认为加性噪声和乘性噪声之间是不存在关联的. 近年来, 乘性噪声与加性噪声之间的关联对单模激光系统光强的涨落的影响逐渐引起许多科技工作者的兴趣^[5-8]. 2004 年, Xie 等^[9]研究了交叉关联的乘性噪声和加性噪声驱动的单模激光系统中, 交叉关联强度对弛豫时间和强度关联函数的影响. 2006 年, 许德胜等^[10]合理地单模激光系统引入平方泵噪声, 得到封闭的光强郎之万方程进而得到了系统定态的一些普遍结论.

本文在前人工作的基础上, 在加性噪声的自关联时间、乘性噪声的自关联时间以及二者之间的交叉关联时间相等的条件下, 研究关联时间、净增益系

数和关联强度对强度关联函数的影响.

2. 单模激光立方模型稳态的强度关联函数

交叉关联加性噪声和乘性噪声驱动的单模激光系统立方模型光强的郎之万方程是^[9]

$$\frac{dI}{dt} = \chi(a_0 - AI)I + D + 2I^{1/2}q(t) + 2I\rho(t), \quad (1)$$

式中 a_0 为净增益系数, A 为自饱和系数, 加性噪声 $q(t)$ 和乘性噪声 $\rho(t)$ 是高斯型噪声

$$q(t)q(t') = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (2)$$

$$\rho(t)\rho(t') = \frac{Q}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho(t)q(t') &= q(t)\rho(t') \\ &= \frac{\lambda\sqrt{QD}}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (4) \end{aligned}$$

D 为加性噪声强度, Q 为乘性噪声强度, 加性噪声和乘性噪声的自关联时间以及二者之间的交叉关联时间均设为 τ , λ 为 $\rho(t)$ 和 $q(t)$ 之间的关联强度. 注意此时确定性方程的定态值为 $I_s = a_0/A$, 利用诺维科夫 (Novikov) 理论^[11] 和福克斯 (Fox) 近似^[12], 可

以得到关于激光光强的近似的福克-普朗克方程(见附录)为

$$\frac{\partial P(I, t)}{\partial t} = L_{FP} P(I, t), \quad (5)$$

其中

$$L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial I} F(I) + \frac{\partial^2}{\partial I^2} B(I), \quad (6)$$

式中 $F(I)$ 和 $B(I)$ 为

$$F(I) = \lambda(a_0 + B_2 - AI)I + 3BI^{1/2} + 2B_1, \quad (7)$$

$$B(I) = 2B_2 I^2 + 4BI^{3/2} + 2B_1 I, \quad (8)$$

其中

$$B = \frac{\lambda \sqrt{DQ}}{1 + 2a_0 \tau}, \quad (9)$$

$$B_1 = \frac{D}{1 + 2a_0 \tau}, \quad (10)$$

$$B_2 = \frac{Q}{1 + 2a_0 \tau}. \quad (11)$$

由于(5)式在满足条件 $1 + 2a_0 \tau > 0$ 的情况下才有物理意义,这要求在阈值以下($a_0 < 0$)时,关联时间应满足 $\tau < 1/|2a_0|$;而在阈值之上($a_0 > 0$)时,对关联时间 τ 的取值没有限制.由近似福克-普朗克方程(5),可以得到在 $|\lambda| \neq 1$ 时激光光强的稳态概率密度分布 $P_{st}(I)$,即

$$P_{st}(I) = N (B_2 I + 2B\sqrt{I} + B_1)^{\frac{\alpha}{B_2}} \times \exp\left(-\frac{A}{B_2} I + 4\frac{AB}{B_2^2} \sqrt{I} - \frac{\beta}{\sqrt{B_1 B_2 - B^2}} \arctg \frac{B_2 \sqrt{I} + B}{\sqrt{B_1 B_2 - B^2}}\right) \quad (12)$$

其中

$$\alpha = \frac{8AB^2}{B_2^2} + 2B_2 - \frac{2AB_1}{B_2} - 2a_0, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{3ABB_1}{B_2^2} + \frac{a_0 B}{B_2} - \frac{4AB^3}{B_2^3} + \frac{B}{2}, \quad (14)$$

N 是归一化常数,

$$N = \frac{1}{\int_0^\infty P_{st}(I) dI}. \quad (15)$$

噪声影响下的单模激光系统在稳态时,光强 I 会出现涨落现象. t 时刻光强 $K(t)$ 与 $t+s$ 时刻光强 $K(t+s)$ 之间的联系可由双时稳态关联函数描述

$$K(s) = K(t+s)K(t) - K(t)^2, \quad (16)$$

式中

$$K(t+s)K(t)$$

$$= \iint IP_{tran}(I, t+s | I', t) \times P_{st}(I') I' dI dI', \quad (17)$$

跃迁概率密度为

$$P_{tran}(I, t+s | I', t) = \exp(L_{FP} s) \delta(I - I'). \quad (18)$$

由(17)(18)式可得

$$K(t+s)K(t) = \int I \exp(L_{FP} s) IP_{st}(I) dI. \quad (19)$$

考虑到

$$\frac{dK(s)}{ds} = \int IL_{FP} \exp(L_{FP} s) P_{st}(I) dI = \int (L_{FP}^+ I) \exp(L_{FP} s) IP_{st}(I) dI, \quad (20)$$

即

$$\frac{dK(s)}{ds} = \frac{K(t)L_{FP}^+(s)K(t+s)}{(\delta I)^2}. \quad (21)$$

利用斯特拉托诺维奇近似^[13,14]

$$\frac{K(t)L_{FP}^+(s)K(t+s)}{K(t)L_{FP}^+(t)K(t)} = \frac{K(t+s)K(t) - K(t)^2}{I^2 - I'^2},$$

可以得到

$$\frac{1}{K(s)} \frac{dK(s)}{ds} = \frac{K(t)L_{FP}^+(t)}{K(0)}, \quad (22)$$

其中 $K(0) = (\delta I)^2$.由(22)式,可以得到

$$K(s) = K(0) \exp(-\mu s), \quad (23)$$

从而得归一化稳态强度关联函数

$$C(s) = \frac{K(s)}{K(0)} = \exp(-\mu s), \quad (24)$$

式中

$$\mu = \frac{2B_2 I^2 + 4B_0 I^{3/2} + 2B_1 I}{I^2 - I'^2}. \quad (25)$$

利用(24)式,可以分析交叉关联噪声驱动的单模激光系统中,关联时间 τ 、交叉关联强度 λ 以及净增益系数 a_0 对单模激光系统统计性质的影响.

3. 交叉色关联噪声对单模激光系统统计性质的影响

图1作了强度关联函数 C 随关联时间 τ 和关联强度 λ 在阈值($a_0 > 0$)以上时的演化三维图像;由图可以看到,当 λ 一定时,强度关联函数 C 随关联时间 τ 的增大而增大,这表明在 $a_0 > 0$ 时,关联时间

τ 越大, 光强涨落衰减得越缓慢. 当 τ 取值一定时, C 随 λ 的增大而减小, 这表明, 关联强度越大, 光强涨落衰减的越迅速.

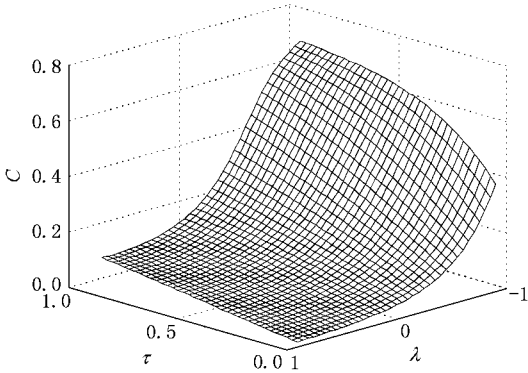


图 1 $D=2, Q=2, a_0=1, A=1$ 时, C 随 τ 与 λ 的演化三维图像

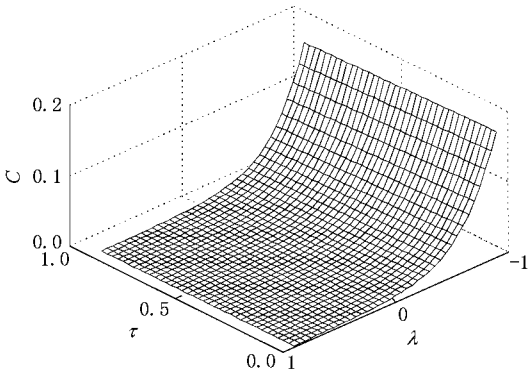


图 2 $D=2, Q=2, a_0=-0.02, A=1$ 时, C 随 τ 与 λ 的演化三维图像

在图 2 中做了在阈值以下 ($a_0 < 0$) 时, 强度关联函数 C 随关联时间 τ 和关联强度 λ 演化的三维图像. 由于条件 $1 + 2a_0\tau > 0$ 的限制, 取 $a_0 = -0.02$. 可以看到, C 随关联时间 τ 的增大而减小, 这与 $a_0 > 0$ 时的结论是不同的. 这表明在阈值以下, 关联时间 τ 越大, 激光光强涨落衰减得越迅速. 从图 2 还可以看出, 当 τ 取值一定时, 强度关联函数 C 均随关联强度 λ 的增大而减小, 这与图 1 的结论相同.

图 3 中作了 C 随关联强度 λ 和净增益 a_0 变化的三维图像. 在该图像中, 考虑到条件 $1 + 2a_0\tau > 0$, 当 $a_0 < 0$ 时, 必须 $\tau < 1/|2a_0|$; 为了可以取到较大的 $|a_0|$, 取关联时间 $\tau = 0.02$; 可以看到, 无论是正关联 ($\lambda > 0$) 还是负关联 ($\lambda < 0$), 强度关联函数 C 随着净增益系数 a_0 的增加会在阈值 ($a_0 = 0$) 附近出现峰值. 在 λ 取较小的值时, 曲线 $C-a_0$ 上出现的峰值

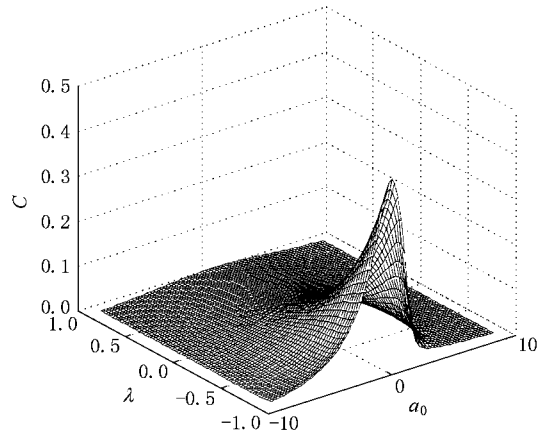


图 3 $D=2, Q=2, \tau=0.02, A=1$ 时, C 随 a_0 与 λ 的演化三维图像

较明显. 此结论与 Xie 等^[9]在关联时间 $\tau = 0$ 时得到的结论是一致的. 在图 3 中还能看到强度关联函数 C 均随关联强度 λ 的增大而减小.

4. 结 论

本文研究了交叉色关联噪声驱动的单模激光立方模型中, 关联时间对激光系统统计性质的影响. 研究发现, 在阈值以上 ($a_0 > 0$) 时, 关联函数 C 随关联时间 τ 的增大而增大; 在阈值之下 ($a_0 < 0$) 时, 关联函数 C 随关联时间 τ 的增大而减小. 无论 $a_0 > 0$ 还是 $a_0 < 0$, C 随交叉关联强度 λ 的增大而减小. 曲线 $C-a_0$ 上有峰值出现, 且 λ 取值越小, 峰值越明显.

附录 一般形式的郎之万方程所对应的近似的福克-普朗克方程

一般形式的郎之万方程可以表示为

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_1(x)q(t) + g_2(x)p(t), \tag{A1}$$

其中 $q(t)$ 和 $p(t)$ 为高斯型噪声, 统计性质是

$$q(t) = p(t) = 0,$$

$$\gamma_{11}(t, t') = q(t)q(t') = \frac{D}{\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right),$$

$$\gamma_{22}(t, t') = p(t)p(t') = \frac{Q}{\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right),$$

$$\gamma_{12}(t, t') = \gamma_{21}(t, t') = q(t)p(t')$$

$$= p(t)q(t') = \frac{\lambda\sqrt{QD}}{\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right),$$

D, Q 是噪声强度, λ 是关联强度, τ_1 和 τ_2 分别是两个噪声的自关联时间, τ_3 是二者的交叉关联时间. 利用方程 (A1) 所对应的刘维尔方程, 并通过范坎彭^[15] (van Kampen) 引理 $P(x, t) = \delta(x(t) - x)$, 可以得到概率密度 $P(x, t)$ 所满足的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial t} f(x) P(x, t) \\ & -\frac{\partial}{\partial t} g_1(x) q(t) \delta(x(t) - x) \\ & -\frac{\partial}{\partial t} g_2(x) p(t) \delta(x(t) - x), \end{aligned} \quad (A2)$$

利用诺维科夫定理^[11]

$$\xi_k \mathcal{A}[\xi_1, \xi_2] = \int_0^t dt' \gamma_{k,l} \frac{\delta \mathcal{A}[\xi_1, \xi_2]}{\delta \xi_l}, \quad (A3)$$

式中 $\mathcal{A}[\xi_1, \xi_2]$ 是关于 ξ_1, ξ_2 的函数, $\gamma_{k,l}$ 是它们之间的关

联. 通过 (A3) 可以得到

$$\begin{aligned} & q(t) \delta(x(t) - x) \\ = & -\int_0^t dt' \gamma_{11}(t, t') \frac{\delta \delta(x(t) - x)}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta q(t')} \\ & -\int_0^t dt' \gamma_{12}(t, t') \frac{\delta \delta(x(t) - x)}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta p(t')} \\ = & -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t dt' \gamma_{11}(t, t') \delta(x(t) - x) \frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} \\ & -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t dt' \gamma_{12}(t, t') \delta(x(t) - x) \frac{\delta x(t)}{\delta p(t')}. \end{aligned} \quad (A4)$$

由方程 (A1) 有

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0) + \int_0^t ds [f(x(s)) + g_1(x(s))q(s) \\ & + g_2(x(s))p(s)], \end{aligned} \quad (A5)$$

由 (A5) 式可以得到

$$\frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} = g_1(x(t')) + \int_{t'}^t ds \left[f'(x(s)) + g'_1(x(s))q(s) + g'_2(x(s))p(s) \right] \frac{\delta x(s)}{\delta q(t')}, \quad (A6)$$

此处 $t > t'$. (A6) 式对时间 t 求导得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} \right] = [f'(x(t)) + g'_1(x(t))q(t) + g'_2(x(t))p(t)] \frac{\delta x(t)}{\delta q(t')}. \quad (A7)$$

利用初始条件 $\left. \frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} \right|_{t'=t} = g_1(x(t'))$ 以及 (A7) 式可得

$$\frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} = g_1(x(t')) \exp \left(\int_{t'}^t ds [f'(x(s)) + g'_1(x(s))q(s) + g'_2(x(s))p(s)] \right). \quad (A8)$$

考虑到

$$\frac{d}{dt} g_1(x(t)) = g'_1(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{g'_1(x(t))}{g_1(x(t))} [f(x(t)) + g_1(x(t))q(t) + g_2(x(t))p(t)] g_1(x(t)). \quad (A9)$$

对 (A9) 式积分可以得到

$$g_1(x(t')) = g_1(x(t)) \exp \left(\int_t^{t'} ds \left\{ \frac{g'_1(x(s))}{g_1(x(s))} [f(x(s)) + g_1(x(s))q(s) + g_2(x(s))p(s)] \right\} \right). \quad (A10)$$

将 (A10) 式代入 (A8) 式

$$\frac{\delta x(t)}{\delta q(t')} = g_1(x(t)) \exp \left(\int_{t'}^t ds \left[f'(x(s)) - \frac{g'_1(x(s))}{g_1(x(s))} (f(x(s)) + g_1(x(s))q(s) + g_2(x(s))p(s)) - \frac{g'_1(x(s))}{g_1(x(s))} g_2(x(s))p(s) \right] \right). \quad (A11)$$

同理可以得到

$$\frac{\delta x(t)}{\delta p(t')} = g_2(x(t)) \exp \left(\int_{t'}^t ds \left[f'(x(s)) - \frac{g'_2(x(s))}{g_2(x(s))} (f(x(s)) + g_1(x(s))q(s) + g_2(x(s))p(s)) - \frac{g'_2(x(s))}{g_2(x(s))} g_1(x(s))q(s) \right] \right). \quad (A12)$$

将 (A11) 式和 (A12) 式代入 (A4) 式, 且在 $t \gg \tau_1, \tau_2, \tau_3$ 条件下, 根据福克斯近似可以得到

$$\begin{aligned} q(t) \delta(x(t) - x) = & -\frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \int_0^t dt' \gamma_{11}(t, t') \delta(x(t) - x) \exp \left(\left(f'(x_s) - \frac{g'_1(x_s)}{g_1(x_s)} f(x_s) \right) (t - t') \right) \\ & -\frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \int_0^t dt' \gamma_{12}(t, t') \delta(x(t) - x) \exp \left(\left(f'(x_s) - \frac{g'_2(x_s)}{g_2(x_s)} f(x_s) \right) (t - t') \right) \\ \approx & -\frac{D}{1 - \tau_1 [f'(x_s) - f(x_s)g'_1(x_s) \mathcal{Y} g'_1(x_s)]} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t) \\ & -\frac{\lambda \sqrt{DQ}}{1 - \tau_3 [f'(x_s) - f(x_s)g'_2(x_s) \mathcal{Y} g'_2(x_s)]} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t). \end{aligned} \quad (A13)$$

同理

$$\begin{aligned} p(t) \delta(x(t) - x) = & -\frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \int_0^t dt' \gamma_{22}(t, t') \delta(x(t) - x) \exp \left(\left(f'(x_s) - \frac{g'_2(x_s)}{g_2(x_s)} f(x_s) \right) (t - t') \right) \\ & -\frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \int_0^t dt' \gamma_{21}(t, t') \delta(x(t) - x) \exp \left(\left(f'(x_s) - \frac{g'_1(x_s)}{g_1(x_s)} f(x_s) \right) (t - t') \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx - \frac{Q}{1 - \tau_2 \left[f'(x_s) - f(x_s) g'_2(x_s) / g'_2(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t) \\ &\quad - \frac{\lambda \sqrt{DQ}}{1 - \tau_3 \left[f'(x_s) - f(x_s) g'_1(x_s) / g'_1(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t), \end{aligned} \quad (A14)$$

式中的 x_s 是确定性方程的定态值. 将 (A13) (A14) 式代入方程 (A2), 可以得到近似的福克-普朗克方程的表达式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & - \frac{\partial}{\partial t} f(x) P(x, t) + \frac{D}{1 - \tau_1 \left[f'(x_s) - \frac{g'_1(x_s)}{g'_1(x_s)} f(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t) \\ & + \frac{\lambda \sqrt{DQ}}{1 - \tau_3 \left[f'(x_s) - \frac{g'_2(x_s)}{g'_2(x_s)} f(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t) \\ & + \frac{Q}{1 - \tau_2 \left[f'(x_s) - \frac{g'_2(x_s)}{g'_2(x_s)} f(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t) \\ & + \frac{\lambda \sqrt{DQ}}{1 - \tau_3 \left[f'(x_s) - \frac{g'_1(x_s)}{g'_1(x_s)} f(x_s) \right]} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t), \end{aligned} \quad (A15)$$

需要指出的是, 方程 (A15) 只有在满足以下条件下成立:

$$1 - \tau_i \left[f'(x_s) - \frac{g'_j(x_s)}{g'_j(x_s)} f(x_s) \right] > 0. \quad (A16)$$

式中 $i = 1, 2, 3$ 以及 $j = 1, 2$. (A16) 式对关联时间 τ_1, τ_2, τ_3 的取值提出了限制.

-
- [1] Fulinski A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
 [2] Zhu S, Yu A W, Roy R 1986 *Phys. Rev. A* **34** 4333
 [3] Cao L, Wu D J, Luo X L 1993 *Phys. Rev. A* **47** 57
 [4] Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Lett. A* **260** 126
 [5] Long Q, Cao L, Wu D J, Li Z G 1997 *Phys. Lett. A* **231** 339
 [6] Luo X Q, Zhu S Q, Gao W J 2001 *Chin. Phys.* **10** 1011
 [7] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1204
 [8] Cheng Q H, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1675
 (in Chinese) [程庆华, 曹 力, 吴大进, 王 俊 2004 物理学报 **53** 1675]
 [9] Xie C W, Mei D C 2004 *Phys. Lett. A* **323** 421
 [10] Xu D S, Cao L, Wu D J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 692 (in Chinese)
 [许德胜, 曹 力, 吴大进 2006 物理学报 **55** 692]
 [11] Novikov E A, *Eksp. Z. 1964 Teor. Fiz.* **47** 1919
 [12] Fox R F 1986 *Phys. Rev. A* **34** 4525
 [13] Stratonovich R L 1967 *Topics in the Theory of Random Noise*
 (Gordon and Breach, New York) Vol. II, Chap. 7
 [14] Hernandez-Machado A, Miguel M San, Sancho J M 1984 *Phys. Rev.*
A 29 3388
 [15] van Kampen N G 1981 *Stochastic process in physics and chemistry*
 (North Holland Publ. Co., Amsterdam)

The statistical prosperities of single-mode laser system driven by colored cross-correlation noises

Wang Bing[†] Shao Ji-Hong Wu Xiu-Qing

(*Department of Physics and Mathematics ,Anhui University of Science and Technology ,Huainan 232001 ,China*)

(Received 15 October 2007 ; revised manuscript received 25 May 2008)

Abstract

Using a single-mode laser cubic model driven by additive colored noise and multiplicative colored noise ,through theory of Novikov ,Fox approximation and the approximation of Stratonovich ,an expression of intensity correlation function C was reached at . The effects of the correlation time τ ,the net gain a_0 and the cross-correlation intensity λ on the intensity correlation function C was investigated. The result of numerical simulation shows that the intensity correlation function C increases with the correlation time τ for the net gain above the threshold($a_0 > 0$) ,but decreases as correlation time increases for the net gain below the threshold($a_0 < 0$). The intensity correlation function C decreases as cross-correlation λ intensity increases no matter the net gain is above or below the threshold. The curve of C versus a_0 has a single peak .

Keywords : single-mode laser , cross-correlation , intensity fluctuation , intensity correlation function

PACC : 0520 , 0540 , 4260K

[†] E-mail : hnitwb@163.com