

一个新四维自治超混沌系统及其电路实现

唐良瑞[†] 李 静 樊 冰

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

(2008 年 8 月 5 日收到, 2008 年 11 月 11 日收到修改稿)

提出了一个新的四维超混沌系统, 并对该系统的基本动力学特性进行了深入研究, 得到该系统的 LE、LE 维数, 给出了 Poincare 映射图、LE 谱、分岔图以及时域图和相图. 利用 Mutisim 软件设计了该新混沌系统的振荡电路并进行了仿真实验. 经过数值仿真和电路系统仿真证实该系统与以往发现的混沌吸引子并不拓扑等价, 属于新的混沌系统.

关键词: 超混沌系统, Lyapunov 指数, Poincare 截面图, 电路实现

PACC: 0545

1. 引 言

自 Lorenz 于 1963 年在数值实验中偶然发现第一个混沌吸引子以来, Lorenz 系统作为第一个混沌的物理和数学模型, 成为后人研究混沌理论的出发点和基石^[1, 2]. 近年来, 国内外许多学者对混沌的特性进行了深入地分析和研究, 发现了许多新的混沌系统. 较为知名的系统如 Chen 系统^[3]、Lü 系统^[4, 5]、Liu 系统^[6]和 Qi 系统^[7]. 现在混沌动力学正由数学和物理的基础理论研究逐步过渡到实际的工程应用领域, 并得到了很大发展. 例如混沌理论可用在保密通信、图像加密等数字信息领域^[8-10], 因而混沌动力学具有广泛的应用前景.

三维混沌系统都有个共同点就是结构较为简单, 在物理上实现容易. 但是这样的混沌系统用于数字信息加密工程领域的效果不是很好, 这主要是由于三维混沌系统的带宽相对较窄, 容易导致混沌序列被数字滤波器给滤掉, 失去加密的意义. 而对于一个超混沌系统或者高频混沌系统而言, 其产生的混沌序列信号有比较宽的带宽, 不容易被数字滤波器过滤, 这对于数字加密领域有非常重要的研究意义. 因此, 超混沌系统是非线性动力学一个重要的研究方向.

本文提出了一个新的四维混沌系统. 该系统含有 8 个参数, 其中三个方程中各含有一个非线性乘

积项. 通过理论分析、数值仿真、LE (Lyapunov 指数)、LE 维数、Poincare 映射图、LE 谱以及分岔图研究了该系统的基本动力学特性, 设计了该混沌系统的硬件电路, 并进行了仿真实验, 证实了该系统的可实现性.

2. 新超混沌系统的基本分析

2.1. 新超混沌系统模型

本文提出的新超混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by; \\ \dot{y} &= cx - xz - dy - u; \\ \dot{z} &= xy - ez - fx + gu; \\ \dot{u} &= h(yz - u). \end{aligned} \quad (1)$$

式中, a, b, c, d, e, f, g, h 是实常数. 当参数 $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$ 时, 系统存在一个典型的混沌吸引子.

2.2. 理论分析

2.2.1. 耗散性和吸引子的存在性

由于

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \\ &= -a - d - e - h, \end{aligned} \quad (2)$$

当 $a + d + e + h > 0$ 时, 则系统 (1) 是耗散的, 且以指

[†] E-mail: tangliangrui@163.com

数形式收敛:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+d+e+h)t}, \quad (3)$$

即体积元 V_0 在时刻 t 时收缩为体积元 $V_0 e^{-(a+d+e+h)t}$, 这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨迹的每个体积元以指数率 $-(a+d+e+h)$ 收缩到零. 因此, 所有系统轨迹线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

2.2.2. 平衡点及稳定性

系统(1)存在三个非线性项, 状态变量分别为 x, y, z, u . 为了求解系统(1)的平衡点, 令参数为 $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$, 并且方程组为

$$\begin{cases} -ax + by = 0; \\ cx - xz - dy - u = 0; \\ xy - ez - fx + gu = 0; \\ h(yz - u) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

求解(4)式可得到系统三个平衡点为

$$\begin{aligned} s_0(0 \ 0 \ 0 \ 0); \\ s_1(2.9 \ 0.86 \ 32.22 \ 27.88); \end{aligned}$$

$$s_2(-148.90, -44.37, 32.22, -1429.58).$$

在平衡点 $s_0(0 \ 0 \ 0 \ 0)$, 对系统(1)进行线性化得其 Jacobian 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ c - z & d & -x & -1 \\ y - f & x & -e & g \\ 0 & hz & hy & -h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.5 & 68.8 & 0 & 0 \\ 42 & -0.6 & 0 & -1 \\ -4.5 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 \end{bmatrix}.$$

为了求平衡点 $s_0(0 \ 0 \ 0 \ 0)$ 相应的特征根, 令

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0,$$

得到相应的特征根 $\lambda_1 = -4.0, \lambda_2 = 44.1181, \lambda_3 = -65.2181, \lambda_4 = -0.8$. 这里四个特征根都是实根, 但是不全为负实根. 根据 Routh-Hurwitz 条件^[11], 可得平衡点 s_0 是不稳定的鞍点.

在平衡点 $s_1(2.9 \ 0.86 \ 32.22 \ 27.88)$ 采用同样的方法可求得相应的特征根 $\lambda_1 = -38.5266, \lambda_2 = 17.1337, \lambda_3 = -2.2535 + 3.1427i, \lambda_4 = -2.2535 - 3.1427i$. 其中 λ_1 为负实根, λ_2 为正实根, λ_3 与 λ_4 是负实部的共轭复根. 因此, 平衡点 s_1 是一个不稳定的鞍点.

通过同样的计算方法可得在平衡点 $s_2(-148.90, -44.37, 32.22, -1429.58)$ 相应的特征根为 $\lambda'_1 = 158.4476, \lambda'_2 = -139.4219, \lambda'_3 = 44.0970, \lambda'_4 = -0.8287$. 这里四个特征根都为实根, 但是不全为负实根, 所以根据 Routh-Hurwitz 条件知, 平衡点 s_2 是不稳定的鞍点.

从上述分析可知, 系统(1)的三个平衡点都是不稳定的鞍点. 从理论上证明了该系统有存在超混沌特性的可能性.

2.3. 混沌吸引子

系统(1)参数为 $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$ 时, 存在一个典型的混沌吸引子. 本文采用了四阶龙格-库塔离散化算法, 得到混沌吸引子相图如图 1 所示. 相图中其轨线在特定的吸引域内具有遍历性. 这个混沌的奇怪吸引子与 Lorenz 系统形状完全不同, 并且与 Qi 系统^[12] (该系统有九个平衡点) 吸引子不同. 本文提出的这个新系统仅存在三个平衡点, 因此其拓扑结构与其他系统的拓扑结构完全不同.

系统(1)的时域波形具有非周期性, 解的流对初始值极为敏感, 它的时域波形如图 2 所示. 而它的频谱都是连续谱, 其频谱图如图 3 所示. 计算的频谱均被单位标准化, 大于单位谱的 1/10 频谱范围作为该信号的频谱带宽, 这是由于幅值相对较低的频谱的信号对加密意义很小, 可以通过滤波等简单方法提取信息. 从图 3 可以看出, Lorenz 系统 x 变量的频谱带宽大约在 0—3 Hz, 本文提出的新系统 x 变量的频谱带宽大约在 0—32 Hz, 是 Lorenz 系统信号带宽的 11 倍左右. 所以新混沌系统的混沌吸引子具有非常宽的频谱, 对保密通信、流体混合等基于混沌的实际应用具有重要价值.

2.4. Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而 Lyapunov 指数 (LE) 是定量描述轨线彼此排斥和吸引的量. 特别是系统的最大 LE, 是判断混沌系统的重要特征. 计算最大 LE 的方法很多, 如最小数据量法, Wolf 法, Jacobian 法等. 本文利用奇异值分解^[13] 的方法计算出系统(1)的四个 LE 为 $LE_1 = 4.8444, LE_2 = 1.2642, LE_3 = -1.1176, LE_4 = -22.2627$, 其最大 LE 比 Qi 系统的最大 LE 要大 ($LE_1 = 3.3152$)^[12], 说明系统(1)比

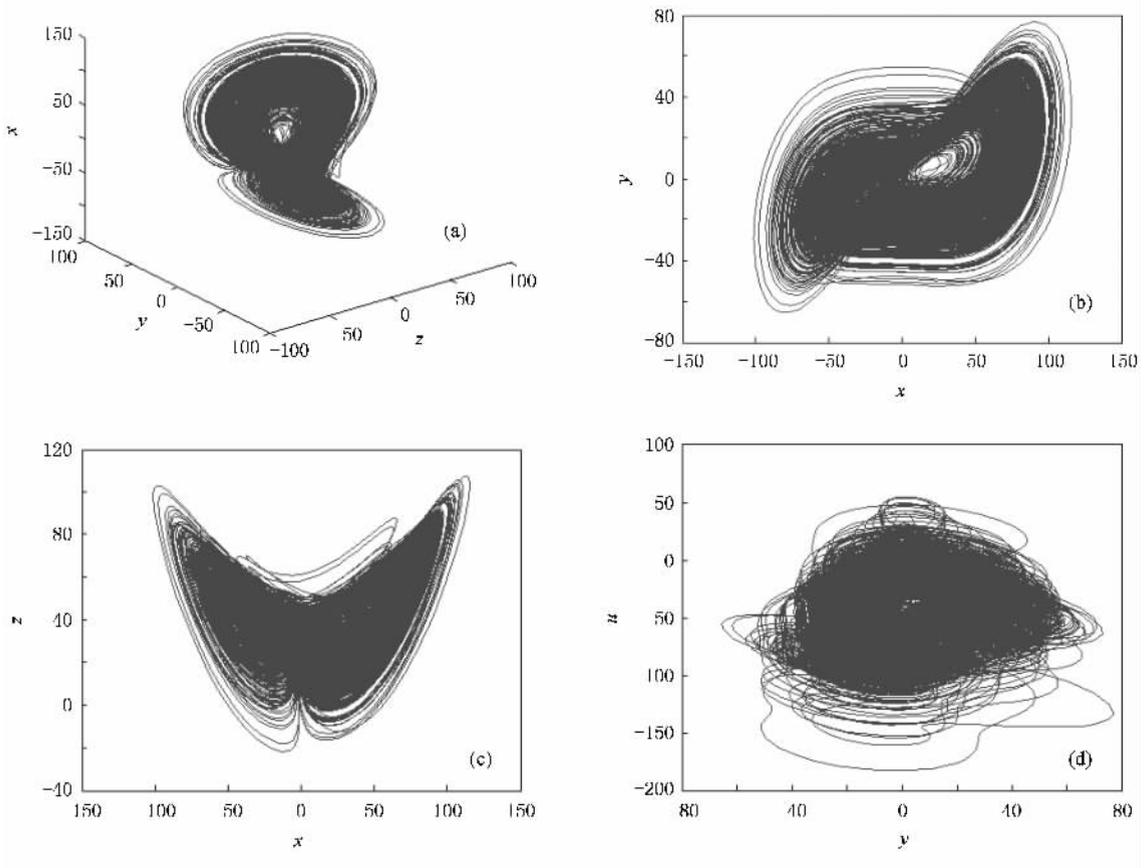


图 1 新混沌系统的奇怪吸引子图 (a) x - y - z 平面奇怪吸引子 (b) x - y 平面奇怪吸引子 (c) x - z 平面奇怪吸引子 (d) y - u 平面奇怪吸引子

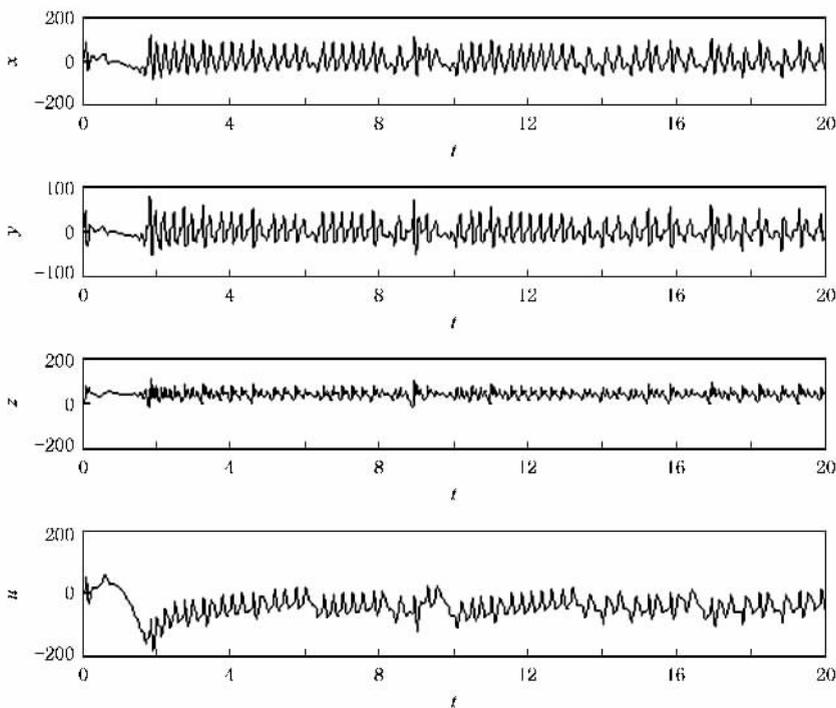


图 2 新系统的四个序列时域波形图

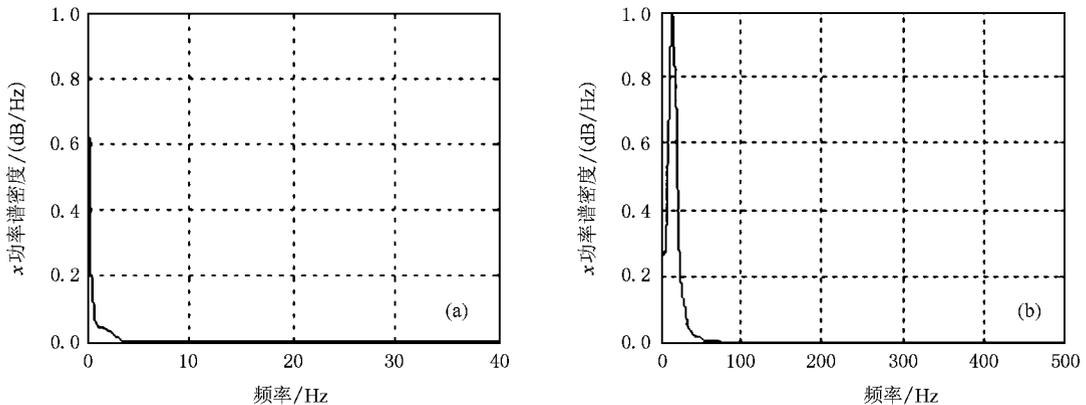


图3 新系统的功率谱图 (a)x 序列的功率谱图 (b)y 序列的功率谱图

Qi 系统运动轨迹更加复杂,并且该系统具有两个正的 LE,具有超混沌的特征,系统的动态行为更加难以预测.新混沌系统的 LE 维数为

$$\begin{aligned}
 D_L &= j + \frac{1}{|\text{LE}_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \text{LE}_i \\
 &= 3 + \frac{(\text{LE}_1 + \text{LE}_2 + \text{LE}_3)}{|\text{LE}_4|} \\
 &= 3 + \frac{(4.8444 + 1.2642 - 1.1176)}{|-22.2627|} \\
 &= 3.2242. \quad (5)
 \end{aligned}$$

由此可见,这个新系统的 LE 维数是分数维数,从而验证了该系统为混沌系统.

2.5. Poincare 截面图

为了利于观察系统的动力学行为,Poincare 截面的选取要恰当,此截面不能包含系统的轨线,也不能与轨线相切.在给定的某组参数下,本文选取了相空间中穿过某一个平衡点的平面作为 Poincare 截面,然后观察 Poincare 截面上截点的情况,由此判断这组固定参数下系统的运动是否为混沌^[14].

在固定参数 $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$ 时,系统存在两个大于零的 LE 指数,可知系统处于超混沌状态,图 4 是此时系统在几个截面上的 Poincare 映像图.

由图 4 可以看出,Poincare 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点,吸引子的叶片清晰可见,进一步说明了此时系统的运动是混沌的.

2.6. 系统参数的影响

随着系统参数的改变,系统平衡点的稳定性将会发生变化,从而系统也将处于不同的状态.从系统

的 LE 谱和分岔图可很直观的分析出各个参数变化时,系统的变化情况.

利用 LE 谱分析时,对于平衡点系统有 $\text{LE}_4 < \text{LE}_3 < \text{LE}_2 < \text{LE}_1 < 0$;对于周期轨有 $\text{LE}_1 = 0, \text{LE}_4 < \text{LE}_3 < \text{LE}_2 < 0$;对于拟周期轨有 $\text{LE}_1 = \text{LE}_2 = 0, \text{LE}_4 < \text{LE}_3 < 0$;对于混沌状态有 $\text{LE}_1 > 0, \text{LE}_2 \leq 0, \text{LE}_4 < \text{LE}_3 < 0, \text{LE}_1 + \text{LE}_3 + \text{LE}_4 < 0$;对于超混沌状态则有 $\text{LE}_1 > \text{LE}_2 > 0, \text{LE}_3 \leq 0, \text{LE}_4 < 0, \text{LE}_1 + \text{LE}_2 + \text{LE}_3 + \text{LE}_4 < 0$.

1) 固定参数 $b = 68.8, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$, 改变 $a, a \in [0, 22]$.

当 $a \in [0, 2]$ 变化时,系统的 LE 谱以及关于 x 的分岔图如图 5 所示.由图 5(a)可见,随着 a 的变化,系统的 LE 在变化,系统状态也在发生改变.当 $a \in [0, 2]$ 时,系统的 LE 都小于 0,系统中都是平衡点;当 $a \in [2, 12]$ 时,系统只有一个正的 LE,表明随着 a 的增加系统由平衡态演化到混沌状态;当 $a \in [12, 22]$ 时,系统存在两个正的 LE,显然系统处于超混沌状态,表明系统随着 a 的变化由混沌状态演化到超混沌状态.

2) 固定参数 $a = 20.5, c = 42, d = 0.6, e = 4, f = 4.5, g = 5, h = 0.8$, 改变 $b, b \in [30, 70]$.

当 $b \in [30, 70]$ 时,系统的 LE 谱以及关于 x 的分岔图如图 6 所示.从图 6(a)中可知,当 $b \in [30, 48]$ 时,系统存在两个正的 LE,显然系统处于超混沌状态;当 $b \in [48, 50]$ 时,系统仅存在一个正的 LE,系统由超混沌状态演化为混沌状态;当 $b \in [50, 70]$ 时,系统存在两个正的 LE,系统又由混沌状态演变为超混沌状态.由此可见当 $b \in [30, 70]$ 时,系统的状态在混沌状态与超混沌状态之间相互转变.

3) 固定参数 $a = 20.5, b = 68.8, d = 0.6, e = 4, f =$

$= 4.5, g = 5, h = 8$, 改变 $c, c \in [0, 45]$.

当 $c \in [0, 45]$ 时, 系统的 LE 谱以及关于 x 的分岔图如图 7 所示. 从图 7(a) 中可知, 当 $c \in [0, 3]$, 系统的所有的 LE 都小于 0, 所以此时系统中都是平衡点; 当 $c \in [3, 12]$ 和 $c \in [15, 25]$ 时, 系统仅有一个正的 LE, 系统处于混沌状态; 当 $c \in [12, 15]$ 和 $c \in$

$[25, 45]$ 时, 系统存在两个正的 LE, 系统由混沌态演化为超混沌状态.

由于本系统参数比较多, 鉴于篇幅有限在文中只详细分析其中的三个参数变化时, 系统状态的变化情况, 其他参数只给出结论, 如表 1 所示.

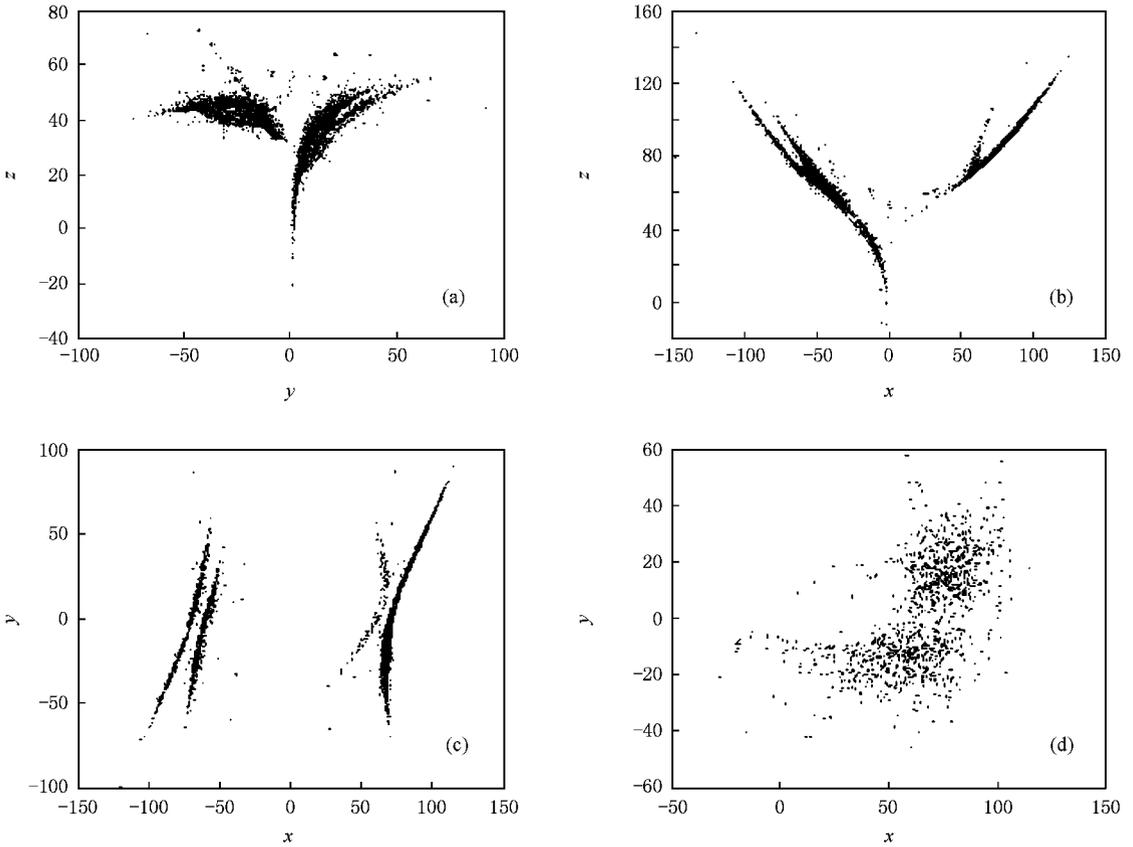


图 4 新系统的 Poincaré 映射图 (a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 80$ (d) $u = 0$

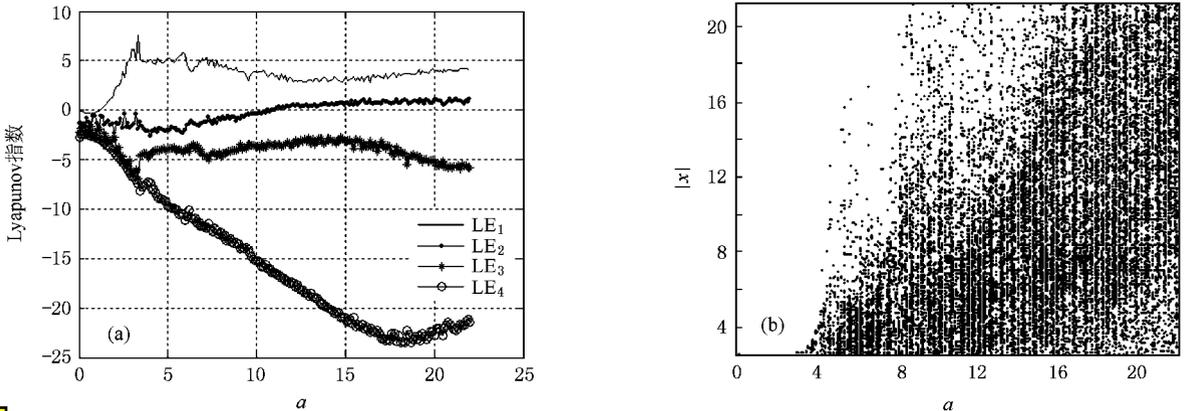


图 5 a 变化时新系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图 (a) LE 谱图 (b) 关于 x 的分岔图



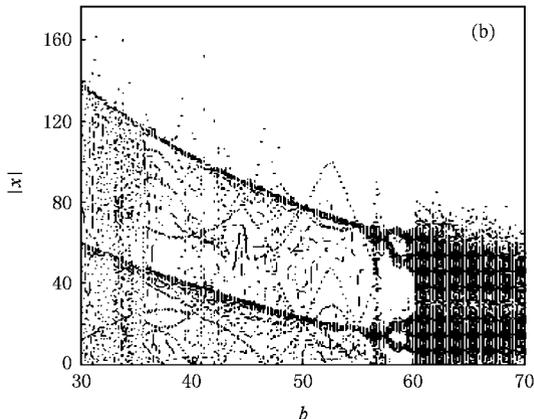
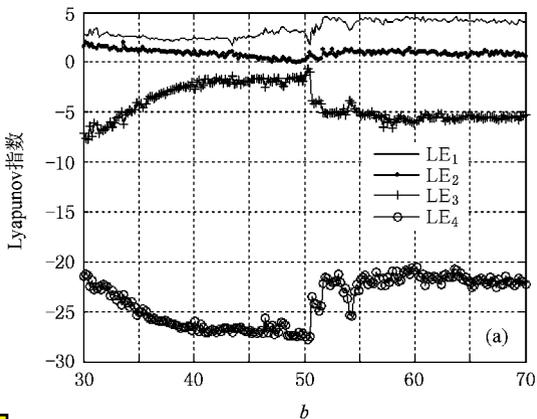


图6 b 变化时新系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图 (a)LE 谱图 (b)关于 x 的分岔图

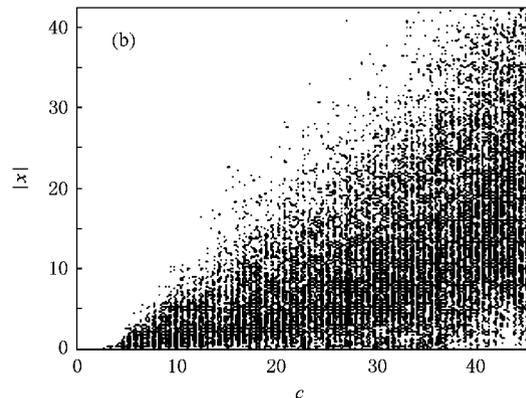
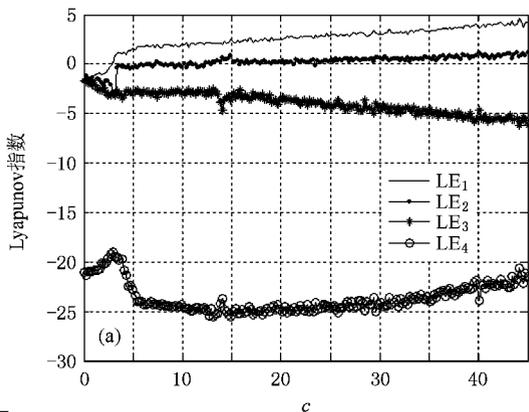


图7 c 变化时新系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图 (a)LE 谱图 (b)关于 x 的分岔图

表1 新系统的状态变化情况

参数	变化范围	平衡点	周期态	拟周期态	混沌状态	超混沌状态
d	$[0, 1]$	无	无	无	无	$[0, 1]$
e	$[0, 5]$	无	无	无	$[0, 1, 3]$	$(1, 3, 5)$
f	$[0, 5]$	无	无	无	$f=0.7, f \in [1.27, 1.3]$	$[0, 0.7] \setminus [0.7, 1.27] \setminus [1.3, 5]$
g	$[0, 6]$	无	无	无	$[0, 2, 3]$	$(2, 3, 6)$
h	$[0, 1]$	无	无	无	无	$[0, 1]$

3. 新系统的振荡电路设计与实现

混沌系统的最直接最简单的物理实现是通过电路来完成的,许多混沌系统的动力学行为都是通过电路得到了验证^[15].同样这个四维混沌系统也可以通过电路来实现.由于直接根据系统微分方程设计的电路很难正常运行,为此有必要对原方程作一些适当地变换,这样做的目的有两方面:一是通过线性

缩放,使得状态变量的变化范围在集成电路允许的工作的电压范围内;二是简化电路设计,尽量减少元件和集成电路.

本文采用线性电阻、线性电容、运算放大器(LM741)、模拟乘法器(AD633)来设计实现系统(1)的电路.利用 Multisim 软件设计的电路如图 8 所示,其中运算放大器是用来进行电路的加减运算,模拟乘法器则用来实现系统中的非线性项.为了有效的进行电路实验,把混沌信号的输出电平调小为原来

的 $1/200$, 设

$$m = 200x, v = 200y, w = 200z, n = 200u. \quad (6)$$

又由于系统变量的变换, 不影响系统的状态及性能, 从而在令

$$x = m, y = v, z = w, u = n, \quad (7)$$

则 (1) 式可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by; \\ \dot{y} &= cx - 200xz - dy - u; \\ \dot{z} &= 200xy - ez - fx - gu; \\ \dot{u} &= h(200yz - u). \end{aligned} \quad (8)$$

根据电路理论以及各个元件的特性, 得其电路方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R_2}{R_{21}R_1C_1}x + \frac{R_2}{R_3R_2C_1}y; \\ \dot{y} &= \frac{R_7}{R_{22}R_6C_2}x - \frac{R_7}{R_8R_6C_2}200xz \\ &\quad - \frac{R_7}{R_{23}R_6C_2}y - \frac{R_7}{R_{24}R_6C_2}u; \\ \dot{z} &= \frac{R_{12}}{R_{13}R_{11}C_3}200xy - \frac{R_{12}}{R_{26}R_{11}C_3}z \\ &\quad - \frac{R_{12}}{R_{25}R_{11}C_3}x - \frac{R_{12}}{R_{27}R_{11}C_3}u; \\ \dot{u} &= \frac{R_{17}}{R_{18}R_{16}C_4}200yz - \frac{R_{17}}{R_{28}R_{16}C_4}u. \end{aligned} \quad (9)$$

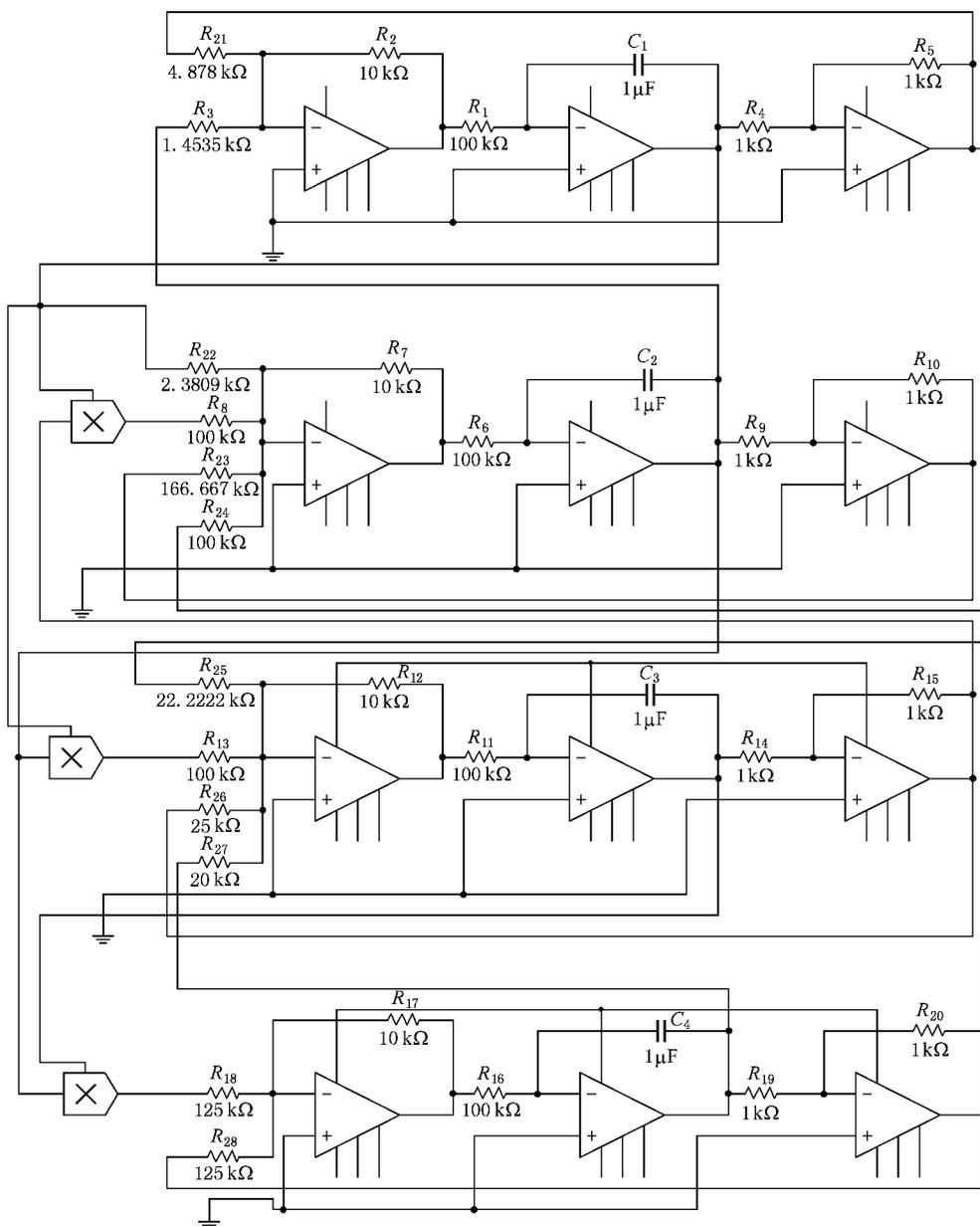


图 8 电路原理图

(11) 式与 (12) 式相比较, 可得

$$a = \frac{R_2}{R_{21} R_1 C_1};$$

$$b = \frac{R_2}{R_3 R_1 C_1};$$

$$c = \frac{R_7}{R_{22} R_6 C_2};$$

$$d = \frac{R_7}{R_{23} R_6 C_2};$$

$$e = \frac{R_{12}}{R_{26} R_{11} C_3};$$

$$f = \frac{R_{12}}{R_{25} R_{11} C_3};$$

$$g = \frac{R_{12}}{R_{27} R_{11} C_3};$$

$$h = \frac{R_{12}}{R_{18} R_{16} C_4} = \frac{R_{12}}{R_{28} R_{16} C_4}.$$

当电路中的各元器件值如图 8 中所示时, 利用示波器得到系统 (1) 各序列的时域图, 如图 9. 利用示波器也可以看到混沌吸引子的相图, 如图 10 所示. 与数值仿真图基本相同, 但有一定的区别, 这是因为电路实验所的相图是从时间 $t = 0$ 开始绘制的, 而数值仿真是截取了混沌序列后 14000 个数据绘制而成, 取消了最开始的 1000 个数据. 所以该混沌系统的仿真实验和实际电路实验应该是基本符合的, 从而说明该混沌系统可以通过电路产生, 具有很大的实用性.

通过上述理论分析和仿真实验证实, 本文提出的非线性系统是一个新的混沌系统, 它具有混沌系统的共有特征: 确定性、有界性、对初值的极端敏感性、长期不可预测性、正的最大 Lyapunov 指数、一定频率范围内的连续谱和遍历性等.

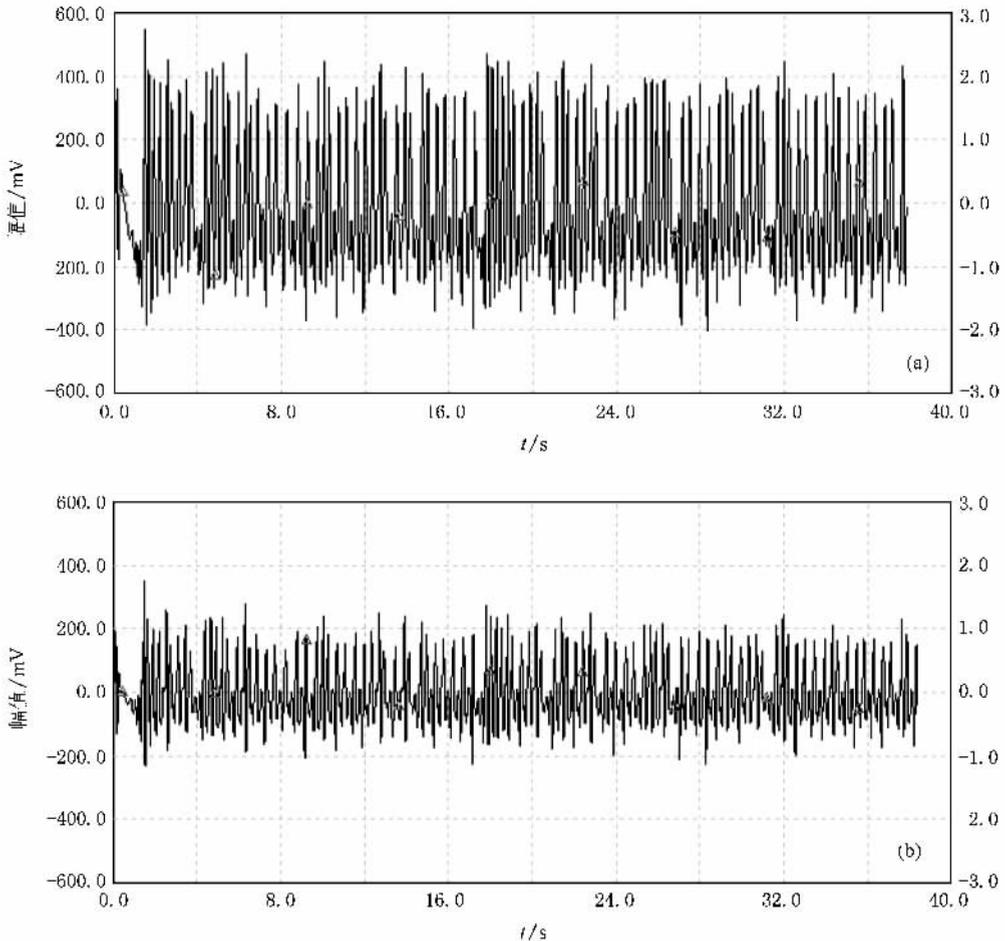


图 9 系统 (1) 部分序列的时序图 (a) x 时序图 (b) y 时序图

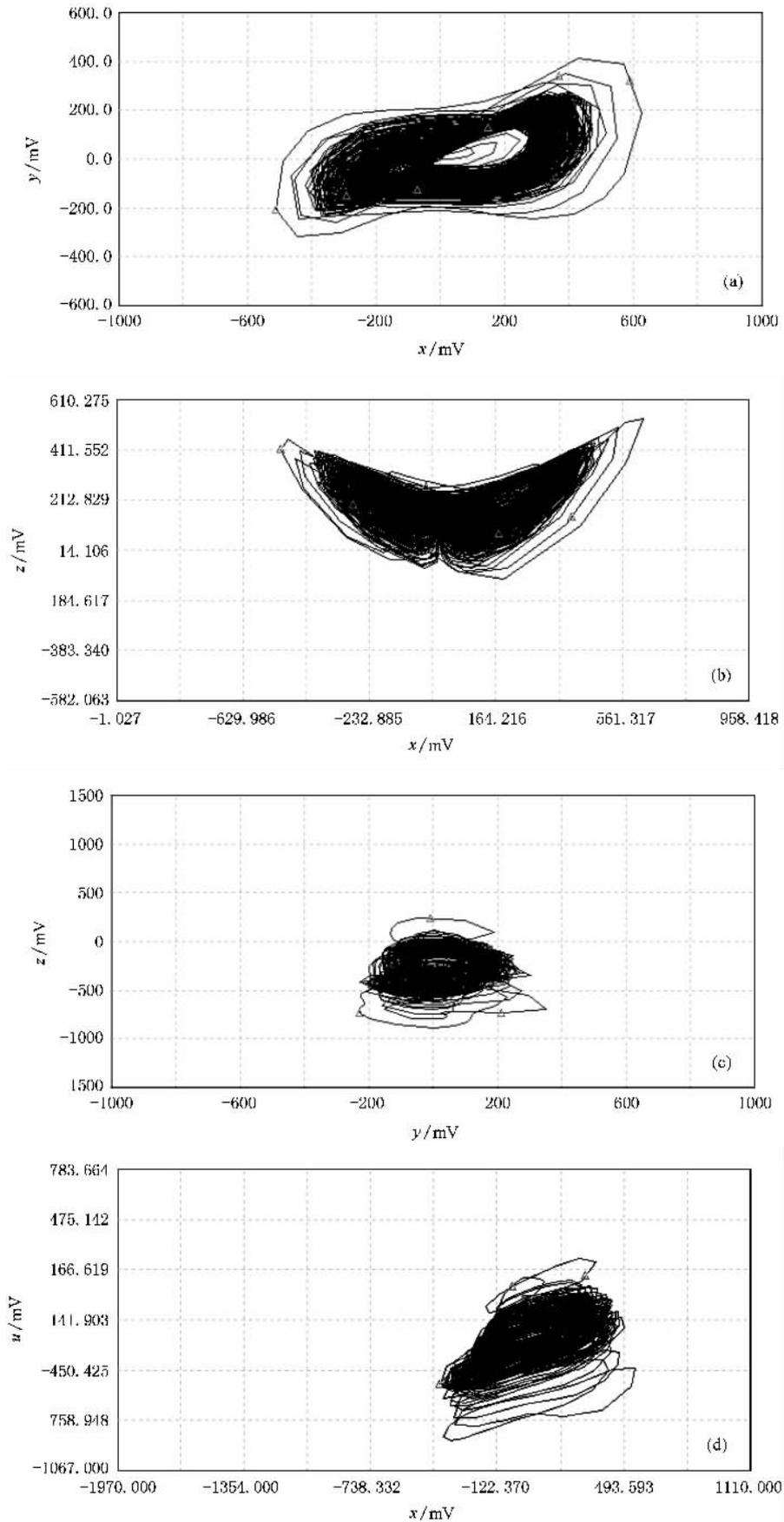


图 10 系统(1)的电路实验相图 (a) x - y 平面 (b) x - z 平面 (c) y - z 平面 (d) x - u 平面

4. 结 论

通过以上理论分析和计算机仿真,可以得出以下结论:

1. 本文提出的超混沌系统的数学模型拓扑结构简单,仅具有三个平衡点.

2. 这个新的混沌系统存在着复杂的混沌动力学行为,它具有一切混沌系统的共有特征.

3. 这个新的超混沌系统可以用电子振荡电路来实现.它在电子测量、保密通信、数字图像加密等领域中具有潜在的应用价值.

如何控制这个系统以及深入研究系统的动力学行为是作者今后将要进行的工作.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* (Washington :University of Washington Press)
- [3] Celikovsky S ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1789
- [4] Lu J H ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [5] Chen G R ,Lu J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family : Analysis ,Control ,and Synchronization* (Beijing :Science Press)(in Chinese)[陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分、控制与同步(北京 科学出版社)]
- [6] Liu C X ,Liu L ,Liu K 2004 *Chaos Solitons Frac.* **22** 1031
- [7] Qi G Y ,Du S ,Chen G R ,Chen Z ,Yuan Z 2005 *Chaos Solitons Frac.* **23** 1671
- [8] Li W ,Hao J H ,Qi B 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 1398 (in Chinese) [李 伟、郝建红、祁 兵 2008 物理学报 **57** 1398]
- [9] Xie K ,Lei M ,Feng Zh J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1267 (in Chinese)[谢 鲲、雷 敏、冯正进 2005 物理学报 **54** 1267]
- [10] Hua C C ,Guan X P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1441
- [11] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics* (Beijing :High Education Press) p18 (in Chinese)[刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用(北京 :高等教育出版社)第 18 页]
- [12] Zhang Y H ,Qi G Y ,Liu W L ,Yan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3307 (in Chinese)[张宇辉、齐国元、刘文良、阎 彦 2006 物理学报 **55** 3307]
- [13] Zhang X D ,Li Z P ,Zhang L L 2005 *Beijing Technology University Sinica* **27** 371 (in Chinese)[张效丹、李志萍、张丽丽 2005 北京科技大学学报 **27** 371]
- [14] Lu J H ,Lu J A ,Chen S H 2002 *Analysis and Application of Chaotic Time Sequences* (Wu Han :Wu Han University Press) p51 (in Chiense)[吕金虎、陆君安、陈士华 2002 混沌时间序列分析及其应用(武汉 :武汉大学出版社)第 51 页]
- [15] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3295]

A new four-dimensional hyperchaotic system and its circuit simulation

Tang Liang-Rui[†] Li Jing Fan Bing

(School of Electric and Electronic Engineering ,North China Electric Power University ,Beijing 102206 ,China)

(Received 5 August 2008 ; revised manuscript received 11 November 2008)

Abstract

A new four-dimensional chaotic system is reported in this paper. Basic dynamic properties of the new system are investigated via theoretical analysis ,numerical simulation ,Lyapunov exponent ,Lyapunov dimension and Poincare diagrams. Finally the chaotic circuit is designed and realized by the Multisim software. It confirms that the chaotic system is different from the existing chaotic systems and is a new hyperchaotic system.

Keywords : hyperchaotic system , Lyapunov exponent , Poincare diagrams , circuit realization

PACC : 0545

[†] E-mail : tangliangrui@163.com