

超混沌分数阶 Lü 系统电路实验与追踪控制*

闵富红^{1)†} 余 杨¹⁾ 葛曹君²⁾

1) 南京师范大学电气与自动化工程学院, 南京 210042)

2) 南京师范大学基建处, 南京 210042)

(2008 年 8 月 9 日收到, 2008 年 8 月 20 日收到修改稿)

对提出的新型超混沌 Lü 系统, 研究了其分数阶混沌系统, 通过数值仿真和电路实验, 证实了分数阶超混沌 Lü 系统的混沌行为. 利用分数阶系统稳定性理论, 设计简单的线性反馈控制器, 成功地实现了分数阶超混沌 Lü 系统的所有状态向量与正弦信号和任意不动点的追踪控制. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 分数阶 Lü 系统, 超混沌系统, 电路实验, 追踪控制

PACC: 0545

1. 引 言

分数阶微积分是整数阶微积分理论的推广, 利用分数阶微积分算子能够更准确地描述混沌系统的动力学特性, 以及能反映系统呈现的工程物理现象, 从而促进了分数阶混沌的研究. 目前, 人们已经研究了许多分数阶系统的混沌动力学行为^[1-5]. 同时, 分数阶混沌系统的电路实现也逐渐引起了人们的兴趣和关注^[6-9]. 另外, 分数阶混沌系统的控制和同步也有了相关研究^[10-12]. 以上研究, 大多数基于三维系统, 对于超混沌的四维分数阶系统的混沌现象、电路实验、控制与同步的研究还比较少. 尤其是分数阶混沌系统追踪控制的研究也不多.

在 2002 年, Lü 和 Chen 发现了一个新的临界混沌系统, 称为 Lü 系统^[13], 代表了 Lorenz^[14]和 Chen 系统^[15]之间的转换, 他们将 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统用一个光滑的连续变换统一起来, 被称为统一混沌系统^[16, 17]. 可见, Lü 系统起到了一个桥梁的作用, 因而具有重要的应用研究价值. 在 2006 年, Chen 和 Lu 等人, 通过给 Lü 系统增加一个状态反馈控制器, 构造了一个四维的超混沌 Lü 系统^[18], 通过改变系统的参数, 出现了复杂的动力学行为, 具有一定的研究价值. 对于其复杂的分数阶混沌系统更值得深入研究, 因为分数阶系统在保密通信等领域有

着更广泛的应用前景.

针对新型的超混沌 Lü 系统, 本文首先研究其分数阶的混沌动力学行为, 基于频域近似方法, 进行数值仿真, 以及运用最新的软件 Multism 10 设计电路实验, 证实分数阶 Lü 系统混沌行为的存在. 其次, 基于分数阶系统的稳定性理论, 设计合适的线性反馈控制器, 实现分数阶 Lü 混沌系统的追踪控制, 使得其所有的状态向量能够追踪任意期望的不动点或者正弦信号.

2. 分数阶微分定义、近似和分数阶微分系统的稳定性

在分数阶微积分理论发展过程中, 有很多种函数的分数阶微积分定义, 其中最常用的定义是 Riemann-Liouville (R-L) 定义^[3-12]

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{dn}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

其中, $\Gamma(n-q)$ 是 Gamma 函数, $n-1 \leq q \leq n$, n 为整数, q 为分数微分的阶数. 在零初始条件下 (1) 式的拉普拉斯变换为

$$L\left\{\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right\} = s^q L\{f(t)\}. \quad (2)$$

因而, 分数阶微分算子 q 可以在频域中用传递函数 $F(s) = 1/s^q$ 表示. 文献 [1] 基于波特图的频域近似方法, 推导出近似误差分别为 2 dB 和 3 dB 时, q

* 国家自然科学基金 (批准号 60774060) 和江苏省普通高校自然科学基金 (批准号 08KJB51006) 资助的课题.

† E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

从 0.1 到 0.9 的 $1/s^q$ 的展开式. 在本文的数值仿真以及电路实验中, 就是采用这种近似误差来分析.

考虑如下分数阶微分系统^[18]:

$$\frac{d^q X(t)}{dt^q} = AX(t), X(0) = x_0 \quad (3)$$

是渐近稳定的, 当且仅当其系统矩阵 A 的特征值幅角大于 $q\pi/2$, 即 $|\arg(\text{spe}(A))| > q\pi/2$.

3. 超混沌分数阶 Lü 系统及其电路实现

3.1. 分数阶超混沌 Lü 系统

分数阶 Lü 混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x) + w, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= -xz + cy, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz, \\ \frac{d^q w}{dt^q} &= xz + dw, \end{aligned} \quad (4)$$

阶超混沌 Lü 系统. 它是 Chen 等^[18]在三维 Lü 混沌系统的基础上, 通过增加一个状态反馈控制器, 构造的一个四维新型的超混沌 Lü 系统, 因而研究其分数阶混沌系统更有意义.

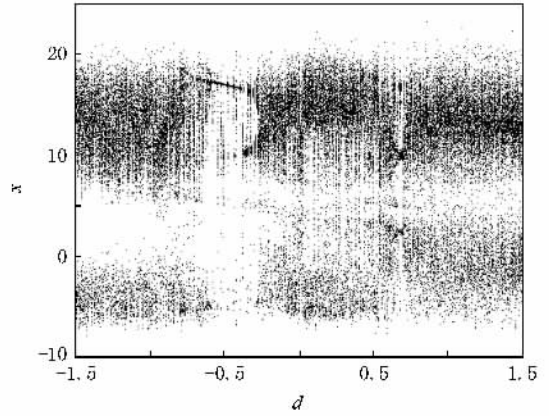


图 2 参数 d 变化的分数阶超混沌 Lü 系统分岔图 ($q = 0.9$, 2 dB 误差逼近)

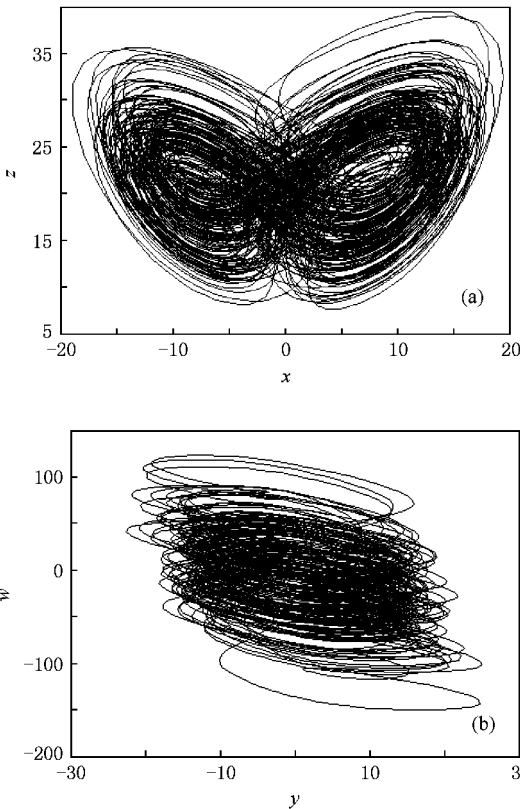


图 1 分数阶 Lü 混沌吸引子 ($q = 0.9$, 2 dB 误差逼近)

其中 a, b, c, d 是参数. 当 $q = 1$ 时, 系统(4)为整数

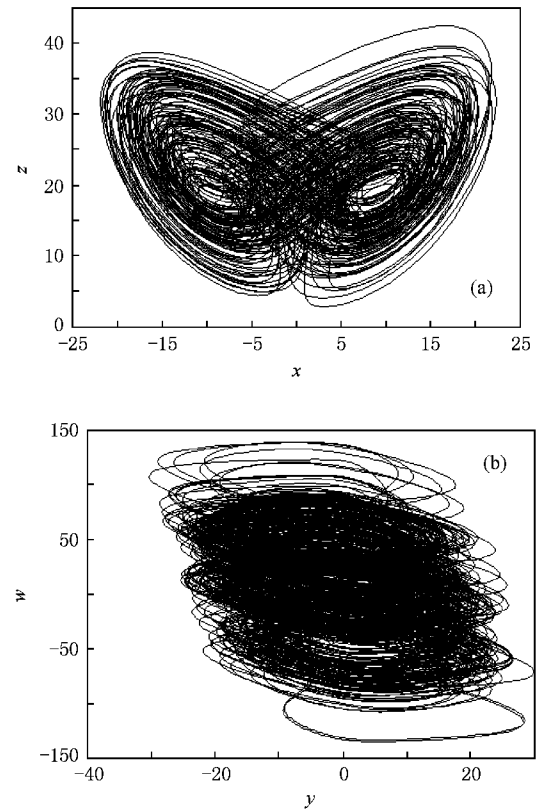


图 3 分数阶 Lü 混沌吸引子 ($q = 0.1$, 3 dB 误差逼近)

采用文献 [1] 中的近似方法, 利用四阶龙格库塔法进行数值仿真. 系统参数为 $a = 36, b = 3, c = 20, d = 1.3$, 对分数阶 $q = 0.9-0.1$ 都进行了数值仿真. 当取逼近误差为 2 dB 时, $q = 0.9, 0.2, 0.1$ 时, 系

统 4) 都存在混沌吸引子; 而取逼近误差为 3 dB 时, 只有 $q = 0.1$ 时, 系统 4) 存在混沌现象. 其他情形都只出现周期轨道, 如图 1—3 所示. 图 2 表示改变参数 d , 得到的向量 x 的分岔图, 可见混沌区域很多.

3.2. 电路实现

基于波特图的频率近似方法, 文献 [6, 7] 设计了一种 q 从 0.1 到 0.9 的 $1/s^q$ 展开式的多个 RC 模块串联的单元电路, 如图 4 所示. 图 4 中 A 与 B 之间的等效电路的复频域表达式为

$$F(s) = \frac{1/C_1}{s + 1/R_1 C_1} + \frac{1/C_2}{s + 1/R_2 C_2} + \dots + \frac{1/C_n}{s + 1/R_n C_n}, \quad (5)$$

式中 n 为 q 从 0.1 到 0.9 的 $1/s^q$ 展开式分母中 s 的最高阶. 文献 [7] 中, 已经计算了逼近误差为 2 dB 时, 单元电路中的电阻和电容值. 这里以逼近误差 3 dB 为例, 参照文献 [1], 有表达式

$$\frac{1}{s^{0.1}} \approx \left(\frac{501.14(s + 0.6811)}{(s + 0.3162)(s + 681.1)} \right), \quad (6)$$

将 (5) 和 (6) 两式比较, 令 (5) 式中 $n = 2$, 有 $R_1 = 849.5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 735.4 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 3.723 \mu\text{F}$, $C_2 = 2.0 \mu\text{F}$, 从而得到了 $1/s^{0.1}$ 时 3 dB 近似误差的分数阶单元电路. 同理, 可以将 3 dB 误差逼近的 q 从 0.1 到 0.9 的 $1/s^q$ 的等效电路中的所有 RC 值求出.

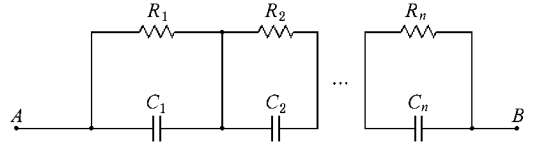


图 4 分数阶 $1/s^q$ 的单元电路实现形式

利用 Multisim 10 电路仿真软件, 设计超混沌分数阶 Lü 系统的电路原理图. 选用 3554BM 的运算放大器, 选用 MUL TIPLIER 普通乘法器, 输出增益为 1, 用该乘法器可以实现混沌系统中的非线性部分.

首先, 设计当 $q = 0.9$ 2 dB 误差近似时, 超混沌分数阶 Lü 系统的电路原理图, 如图 5 所示. 分数阶等效模块 AB 中电阻电容值参照文献 [7], $R_a = 62.84 \text{ M}\Omega$, $R_b = 250 \text{ k}\Omega$, $R_c = 2.5 \text{ k}\Omega$, $C_a = 1.232 \mu\text{F}$,

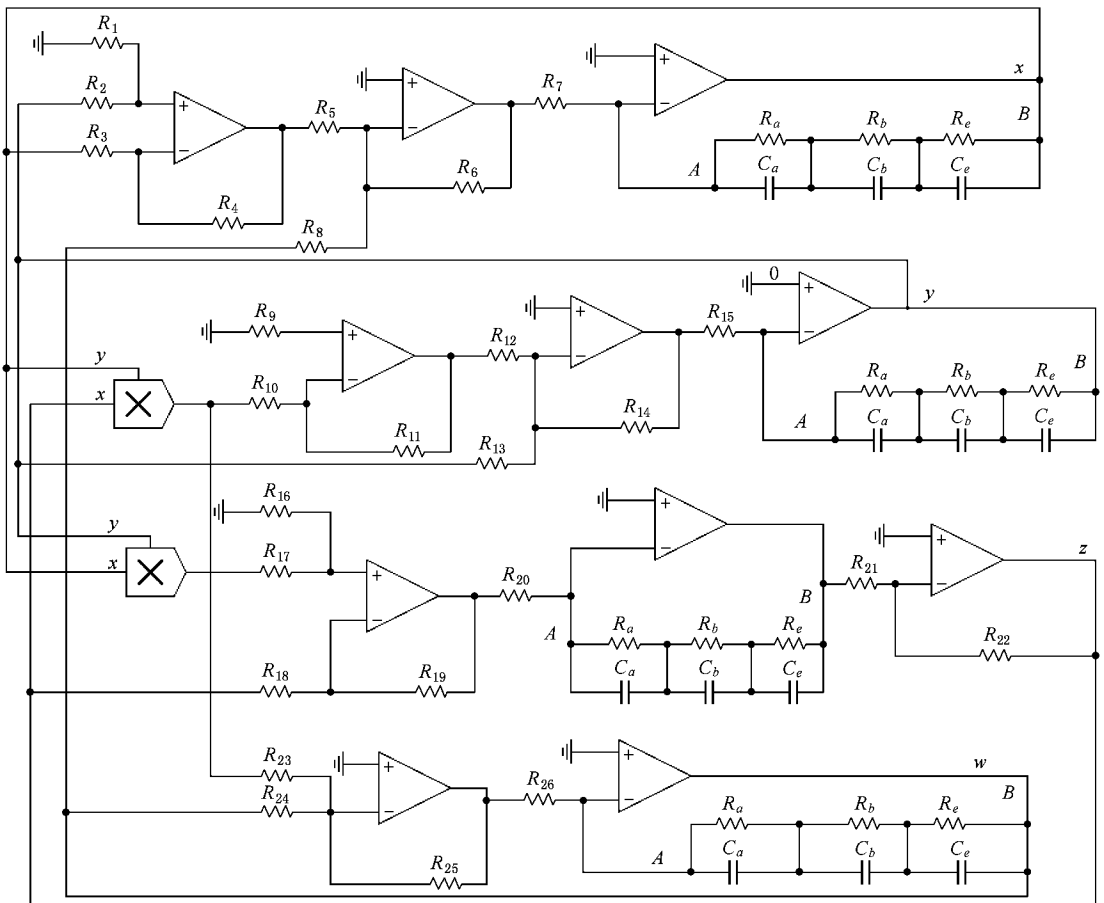


图 5 超混沌分数阶 Lü 系统的电路原理图 ($q = 0.9$ 2 dB 误差逼近)

$C_b = 1.84 \mu\text{F}$, $C_e = 1.1 \mu\text{F}$. 其他的电阻值按照系统的参数计算, 得到 $R_1, R_4 = 36 \text{ k}\Omega$, $R_{13} = 5 \text{ k}\Omega$, $R_7, R_8, R_{15}, R_{20}, R_{26} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{24} = 76.92 \text{ k}\Omega$, 剩下的电阻值

都是 $10 \text{ k}\Omega$. 经过仿真, 得到混沌相图图 6. 将图 6 与图 1 比较, 电路实验图与数值仿真图形, 基本是一致的. 说明了电路设计的有效性.

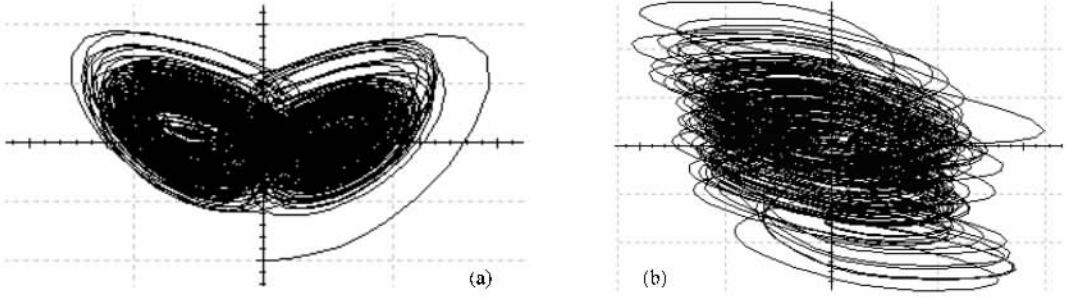


图 6 Lü 混沌系统电路实验相图 ($q = 0.9$ 2 dB 误差逼近) (a) $x-z$ (1 V/div, 1 V/div) (b) $y-u$ (1 V/div, 5 V/div)

其次, 还可以设计分数阶算子 $q = 0.1$ 3 dB 误差逼近时, Lü 混沌系统的电路图. 只需将图 5 中的四个电路模块 AB 两端中, 所有电容电阻值更改为前面计算出的值, 即 $R_a = 849.5 \text{ k}\Omega$, $R_b = 735.4 \text{ k}\Omega$,

$C_a = 3.723 \mu\text{F}$, $C_b = 2.0 \text{ pF}$, R_e 和 C_e 都去掉, 短接. 具体电路图这里省略. 经过电路实验, 得到电路相图如图 7 所示. 由于电路实验时, 初始值的大小以及仿真步长的原因, 所以开始时存在一些不稳定的值, 但

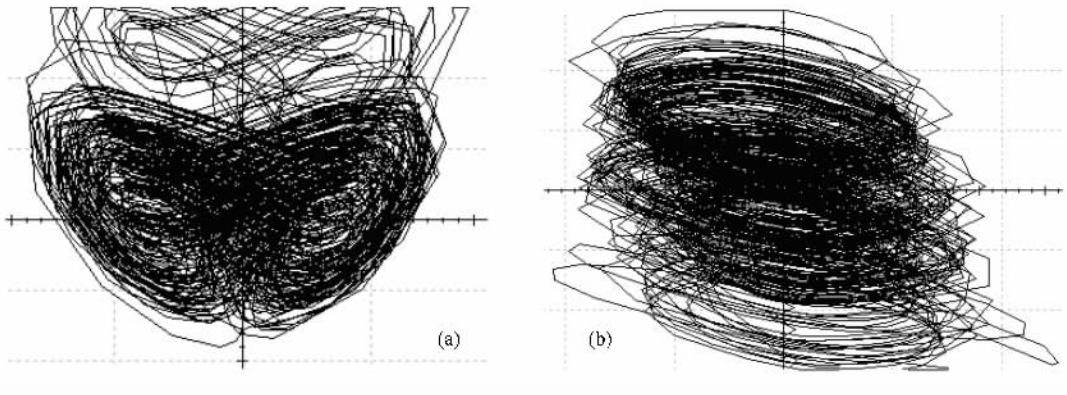


图 7 Lü 混沌系统电路实验相图 ($q = 0.1$ 3 dB 误差逼近) (a) $x-z$ (1 V/div, 1 V/div) (b) $y-u$ (1 V/div, 5 V/div)

是图 7 与图 2 基本一致, 证实了混沌的存在.

4. 追踪控制分数阶 Lü 混沌系统

在文献 [11] 中, 基于严格数学分析, 采用线性反馈法控制分数阶 Rössler 混沌系统达到任意稳定的不动点, 缺少数值仿真, 理论分析繁琐.

这里利用线性反馈控制器, 使得超混沌分数阶 Lü 系统所有的状态向量能够达到任意所需的稳定不动点, 或者追踪正弦信号等. 选定希望的追踪输出状态为 (x^*, y^*, z^*, w^*) . 为了能够使得分数阶 Lü 混沌系统稳定到该状态, 采用如下的线性反馈控制, 受控系统如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x) + w \\ &\quad + (k_1 + a)(x - x^*) + \phi_1, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= -xz + cy + (k_2 - c)(y - y^*) \\ &\quad + z^*(x - x^*) + x^*(z - z^*) + \phi_2, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz + (k_3 + b)(z - z^*) \\ &\quad - y^*(x - x^*) - x^*(y - y^*) + \phi_3, \\ \frac{d^q w}{dt^q} &= xz + dw + (k_4 + d)(w - w^*) \\ &\quad - z^*(x - x^*) - x^*(z - z^*) + \phi_4, \end{aligned} \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \alpha(x^* - y^*) - w^* , \\
 \phi_2 &= x^* z^* - cy^* , \\
 \phi_3 &= -x^* y^* + bz^* , \\
 \phi_4 &= -x^* z^* - dw^* ,
 \end{aligned} \tag{8}$$

而且 $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为线性反馈控制增益.

则系统的特征值分别为 $\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2, \lambda_3 = k_3$ 以及 $\lambda_4 = k_4$.

按照分数阶微分系统(3)的稳定条件,只要矩阵(9)的所有特征值满足 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2, i = 1, 2, 3, 4$. 那么就能够使得受控分数阶 Lü 混沌系统(7)稳定到任意输出状态 x^*, y^*, z^*, w^* , 即每个状态向量可以稳定到不同的任意不动点, 或者有界的正弦信号等.

接着, 利用仿真软件 Matlab7.0, 对受控系统进行数值仿真. 假设所要追踪的任意输出为 $x^* = -5, y^* = 10, z^* = -0.5, w^* = 1.5\sin(t)$. 其中, 系统参数取 $(a, b, c, d) = (36, 3, 20, 1.3)$, 分数阶微分算子 $q = 0.9, 2$ dB 误差逼近. 取控制增益 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (-30, -20, -10, -40)$. 令误差 $e_1 = x - x^*, e_2 = y - y^*, e_3 = z - z^*, e_4 = w - w^*$. 仿真结果如图 8 所示.

可见, 分数阶 Lü 混沌系统所有状态向量都能够快速地追踪到期望的状态. 误差曲线很快衰减到零, 稳定性好. 该方法的优点是控制参数的选取与追踪的值无关, 而且可以追踪任意有界的信号, 甚至混沌信号.

5. 结 论

本文研究了四维的超混沌 Lü 系统的分数阶动力学行为, 基于频率近似法, 得出了丰富的数值仿真结果, 并且构造了电路图进行实验, 证实了分数阶超混沌 Lü 系统中的混沌现象. 同时, 基于分数阶微分稳定性理论, 设计了简单灵活的线性反馈控制器, 成功地将超混沌分数阶 Lü 系统的所有状态向量追踪控制, 到任意期望的平衡态或者正弦信号. 控制增益选择灵活, 控制效果好, 误差曲线衰减快. 该方法还可以推广到追踪任意的混沌信号. 总之, 该方法具有普适性, 简单灵活.

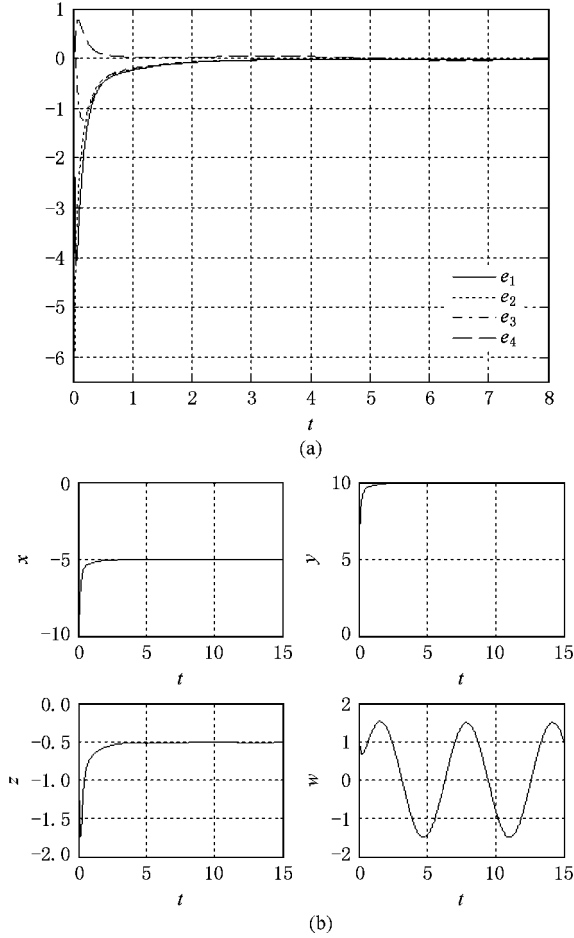


图 8 受控的分数阶 Lü 系统数值仿真结果 ($q = 0.9, 2$ dB 误差逼近) (a) 误差曲线图 (b) 状态向量追踪曲线图

根据受控系统(7)和(8)式, 获得系统(7)在稳定状态 (x^*, y^*, z^*, w^*) 的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} k_1 & a & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

[1] Ahmad W, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **16** 339
 [2] Li C G, Chen G 2004 *Physica A* **341** 55
 [3] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101

[4] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **22** 443
 [5] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
 [6] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese)

- [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [7] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [8] Chen X R ,Liu C X ,Wang F Q ,Li Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永郎 2008 物理学报 **57** 1416]
- [9] Chen X R ,Liu C X ,Wang F Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1614
- [10] Zhang C F ,Gao J F ,Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [11] Zhou P ,Zhang N Y 2007 *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications* **19** 756 (in Chinese) [周 平、张年英 2007 重庆邮电大学学报 **19** 756]
- [12] Wang X Y ,He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1485 (in Chinese) [王兴元、贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485]
- [13] Lü J H ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [14] Lorenz ED N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [15] Chen G R ,Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [16] Lü J H ,Chen G R ,Cheng D Z ,Celikovsk Y S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [17] Li C P ,Yan J P 2007 *Chaos, Solitons Fract.* **32** 751
- [18] Chen A M ,Lu J A ,Lü J H ,Yu S M 2006 *Physics A* **364** 103

Circuit implementation and tracking control of the fractional-order hyper-chaotic Lü system *

Min Fu-Hong^{1)†} Yu Yang¹⁾ Ge Cao-Jun²⁾

¹⁾ School of Electronic Engineering and Automation ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210042 ,China)

²⁾ Department of Capital Construction ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210042 ,China)

(Received 9 August 2008 ; revised manuscript received 20 August 2008)

Abstract

This paper studies the fractional-order Lü system which has been presented recently ,and designed an electronic circuit to realize it. The hyper-chaotic behavior of the fractional-order Lü system is verified by numerical simulation and circuit experiment. Based on the stability theory of the fractional-order system ,a simple linear feedback controller is designed to make full states of a fractional order Lü system to track control sinusoidal waves or arbitrarily fixed point. The simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords : fractional order Lü system ,hyper-chaotic system ,circuit implementation ,tracking control

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60774060) and the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant No.08KJB510006).

† E-mail : minfuhong@njnu.edu.cn