

一类节点结构互异的复杂网络的混沌同步*

吕翎† 张超

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2008 年 9 月 5 日收到, 2008 年 9 月 18 日收到修改稿)

提出了一种实现节点结构互异的复杂网络的混沌同步方法. 以异结构混沌系统作为节点构造复杂网络, 基于 Lyapunov 稳定性定理确定了复杂网络中连接节点的耦合函数的形式. 以 Rössler 系统、Coullet 系统以及 Lorenz 系统作为网络节点构成的复杂网络为例, 仿真模拟发现, 整个复杂网络存在稳定的混沌同步现象. 此方法不但可以实现任意混沌系统作为节点的网络混沌同步, 而且网络节点数对整个复杂网络同步的稳定性也无影响, 因而, 具有一定的普适性.

关键词: 混沌同步, 复杂网络, 异结构, Lyapunov 稳定性定理

PACC: 0545

1. 引言

自然界存在着大量的有着相互作用的复杂系统, 对于这样的若干个系统可以用复杂网络来描述和研究. 关于复杂网络的研究主要集中在三个方面. 其中之一是复杂网络的建模. 目前提出的复杂网络模型最为著名的有 Erdős 等提出的随机图(random graph)模型^[1]、Watts 等提出的小世界网络(small-world network)^[2]以及 Barabasi 等提出的无标度网络(scale-free network)^[3]. 研究内容之二是复杂网络的特性, 其中包括传递性、类聚性以及节点度分布^[4-8]等方面. 内容之三是网络动力学研究, 主要集中在传染过程、网络相变以及网络混沌同步等方面, 其中网络混沌同步研究正引起国内外学者极大的关注. Hung 等研究了无标度网络的广义同步问题^[9]; Atay 等对节点间存在延迟时复杂网络的同步规律进行了分析^[10]; 高洋等对多重边融合动力学网络的自适应同步进行了研究^[11]; 秦洁等完成了超混沌 Rössler 系统构成星型网络的混沌同步^[12]; Li 等构建了一个具有一般形式的复杂网络, 并研究了它的同步问题^[13]; Haken 完成了脉冲耦合神经网络的混沌同步研究^[14]; 于洪洁等实现了非线性函数耦合的 Chen 系统构成复杂网络的混沌同步^[15]. 这些重要的研究

成果为人们进一步进行复杂网络混沌同步的理论研究以及实际应用奠定了良好的基础. 在已有的这些实现复杂网络混沌同步的文献报道中, 一个共同的特征是网络中所有节点是同结构的, 即处于网络节点的混沌系统是完全相同的, 仅仅是系统的初始条件有所差异. 而在实际中, 复杂网络节点的结构常常存在互异的情况, 因此, 有必要研究节点结构互异的复杂网络的混沌同步问题.

本文提出了一种实现节点结构互异的复杂网络的混沌同步方法. 以异结构混沌系统作为节点构造复杂网络, 基于 Lyapunov 稳定性定理确定了复杂网络中连接节点的耦合函数的形式. 以 Rössler 系统、Coullet 系统以及 Lorenz 系统作为网络节点构成的复杂网络为例, 仿真模拟发现, 整个复杂网络存在稳定的混沌同步现象. 此方法不但可以实现任意混沌系统作为节点的网络混沌同步, 而且网络节点数对整个复杂网络同步的稳定性也无影响, 因而, 具有一定的普适性.

2. 网络同步

设一个任意的复杂网络有 m 个节点, 节点的状态方程是异结构的混沌系统. 其中第 i 个节点的 n 维状态变量是 x_i , $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathbf{R}^n$. 单个节

* 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147)以及辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

点在不考虑耦合作用时所满足的状态方程为

$$\dot{x}_i = F_i(x_i), \quad (1)$$

其中 $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

考虑 m 个异结构混沌系统(1)作为节点构成的网络系统

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + H_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (2)$$

这里 $H_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为连接节点之间待定的耦合函数.

定义网络系统状态变量之间的误差

$$e_i = x_i - x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1), \quad (3)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{i+1} \\ &= \Delta F(x_i, x_{i+1}) + \Delta H, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta F(x_i, x_{i+1}) &= F_i(x_i) - F_{i+1}(x_{i+1}), \\ \Delta H &= H_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\quad - H_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

若令

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\Delta F(x_i, x_{i+1}) - \alpha e_i \\ (\alpha > 0, i &= 1, 2, \dots, m-1), \end{aligned} \quad (5)$$

那么, 就有

$$\begin{aligned} H_k &= H_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta F(x_i, x_{i+1}) + \alpha \sum_{i=1}^{k-1} e_i \\ &= H_1 + F_1(x_1) - F_k(x_k) + \alpha(x_1 - x_k) \\ (k &= 2, 3, \dots, m). \end{aligned} \quad (6)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} e_i^2, \quad (7)$$

考虑到(4)以及(5)式, 可以得到 V 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{m-1} e_i \dot{e}_i \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{m-1} e_i^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理^[16], 此时, 整个网络系统达到完全同步.

3. 仿真结果

为了说明上述同步机理, 选择 Rössler 系统、Coulet 系统以及 Lorenz 系统这三个异结构混沌系统作为网络节点进行同步控制, 网络节点数取 $m = 3$.

Rössler 混沌系统由下列动力学方程描述^[17]:

$$\dot{x}_1 = -y_1 - z_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_1 + a_1 y_1, \\ \dot{z}_1 &= b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 a_1, b_1, c_1 是系统的三个参量. 当参量值为 $a_1 = 0.2, b_1 = 0.2, c_1 = 5.7$ 时, 系统(9)存在如图 1 所示的混沌吸引子.

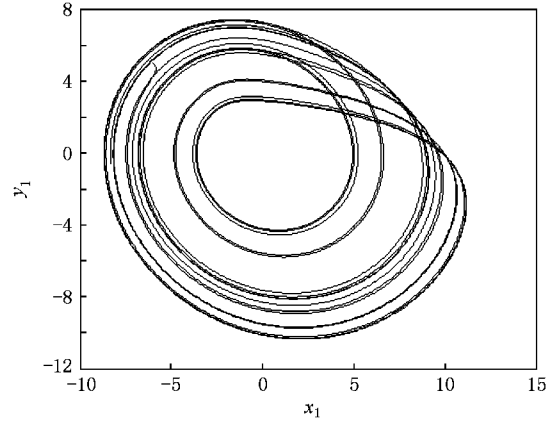


图 1 Rössler 系统的相图

Coulet 混沌系统的动力学方程为^[18]

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a_2 z_2 + b_2 y_2 + c_2 x_2 - x_2^3, \end{aligned} \quad (10)$$

其中参量 $a_2 = -0.45, b_2 = -1.1, c_2 = 0.8$ 时, 系统(10)存在如图 2 所示的混沌吸引子.

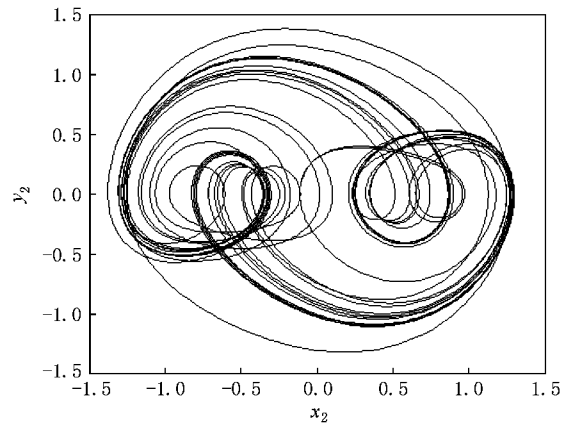


图 2 Coulet 系统的相图

Lorenz 混沌系统的动力学方程为^[19]

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= a_3(y_3 - x_3), \\ \dot{y}_3 &= x_3(b_3 - z_3) - y_3, \\ \dot{z}_3 &= x_3 y_3 - c_3 z_3, \end{aligned} \quad (11)$$

其中参量 $a_3 = 10, b_3 = 28, c_3 = \frac{8}{3}$ 时, 系统(11)存在
 如图 3 所示的混沌吸引子.

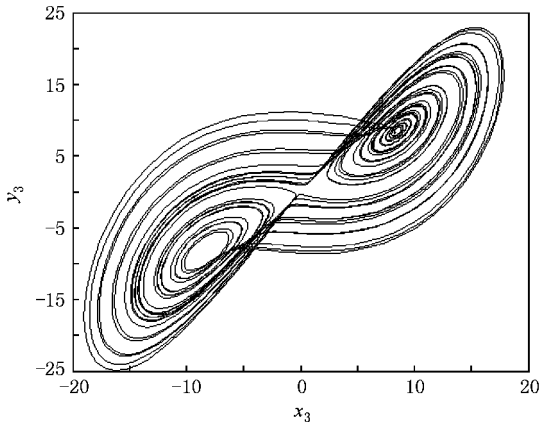


图 3 Lorenz 系统的相图

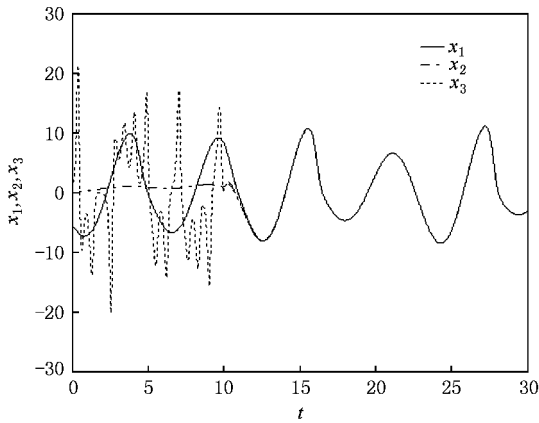


图 4 状态变量 (x_1, x_2, x_3) 随时间的演化

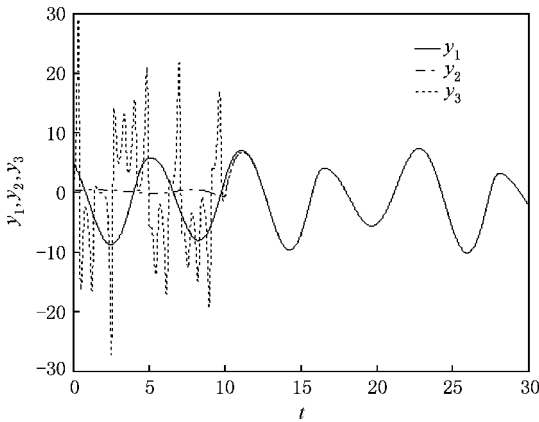


图 5 状态变量 (y_1, y_2, y_3) 随时间的演化

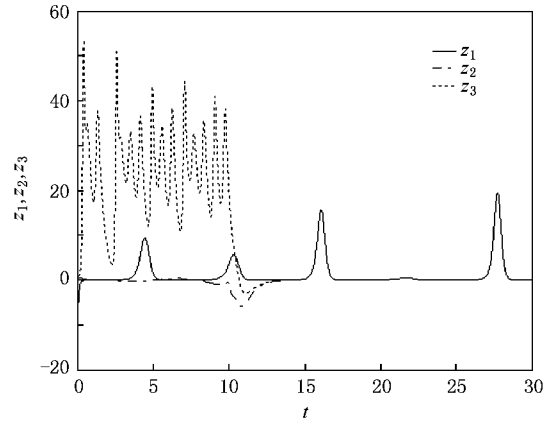


图 6 状态变量 (z_1, z_2, z_3) 随时间的演化

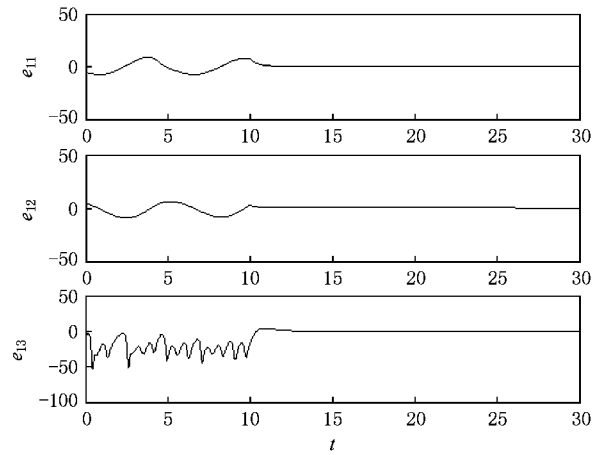


图 7 节点(1)与(2)误差变量的时间演化

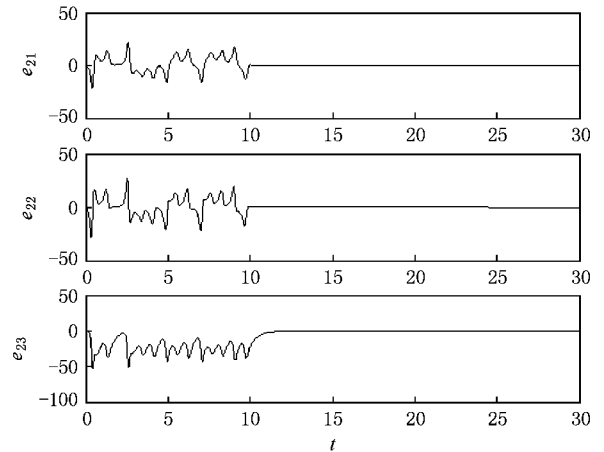


图 8 节点(2)与(3)误差变量的时间演化

仿真模拟网络同步时,选取耦合函数 $H_1 = 0$,这就意味着复杂网络中第一个节点 Rössler 系统被取作目标系统,其余节点是响应系统.三个异结构混沌系统按(2)式的连接方式构成复杂网络

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a_1 y_1, \\ \dot{z}_1 &= b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 + H_{21}, \\ \dot{y}_2 &= z_2 + H_{22}, \\ \dot{z}_2 &= a_2 z_2 + b_2 y_2 + c_2 x_2 - x_2^3 + H_{23}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= a_3(y_3 - x_3) + H_{31}, \\ \dot{y}_3 &= x_3(b_3 - z_3) - y_3 + H_{32}, \\ \dot{z}_3 &= x_3 y_3 - c_3 z_3 + H_{33}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 H_{ij} 的选取满足(6)式.

仿真模拟时,参量 α 在大于零的区域内任意取值,如 $\alpha = 0.8$,网络耦合从 10 s 开始,复杂网络中所有系统状态变量随时间的演化如图 4—6 所示.可以发现时间迭代 10 s 以前,由于网络中每个节点是异结构的混沌系统,所以状态变量随时间的演化轨迹

各不相同,时间迭代 10 s 以后,整个网络所有节点相应的状态变量的演化轨迹经过短暂的时间序列后达到完全一致,网络同步得以实现.相应的误差变量随时间的演化如图 7,8 所示.仿真模拟过程中我们还发现,无论节点数 m 取何值,整个复杂网络的混沌同步均可以实现.

4. 结 论

研究了节点结构互异的复杂网络的混沌同步问题.介绍了实现混沌同步的机理.以 Rössler 系统、Coullet 系统以及 Lorenz 系统作为网络节点构成的复杂网络为例,仿真模拟网络状态变量随时间的演化图以及节点之间误差变量的时间演化图显示,任取 Rössler 系统所在的节点作为目标系统,整个复杂网络将同步于这个指定的网络节点的混沌状态,并且无论复杂网络的节点数如何以及从何时开始实施网络耦合,经过极其短暂的时间序列,整个网络所有节点相应的状态变量的演化轨迹迅速达到完全一致,相应的误差变量随时间的演化迅速平稳地趋于零,表明这种同步方法具有良好的普适性和有效性.

- [1] Erdős P, Renyi A 1961 *Acta Mathematica Scientia Hungary* **12** 261
 [2] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
 [3] Albert R, Jeong H, Barabasi A L 1999 *Nature* **401** 130
 [4] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
 [5] Huberman B A, Adamic L A 1999 *Nature* **401** 131
 [6] Vazquez A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 66130
 [7] Adamic L A, Huberman B A 2000 *Science* **287** 2115
 [8] Barabasi A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
 [9] Hung Y C, Huang Y T, Ho M C, Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
 [10] Atay F M, Jost J, Wende A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 144101
 [11] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X, Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2081 (in Chinese) [高 洋, 李丽香, 彭海朋, 杨义先,

- 张小红 2008 *物理学报* **57** 2081]
 [12] Qin J, Yu H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6828 (in Chinese) [秦洁, 于洪洁 2007 *物理学报* **56** 6828]
 [13] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica A* **334** 281
 [14] Haken H 2005 *Physica D* **205** 1
 [15] Yu H J, Zheng N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4712 (in Chinese) [于洪洁, 郑 宁 2008 *物理学报* **57** 4712]
 [16] Lü L 2000 *Nonlinear dynamics and chaos* (Dalian: Dalian publishing house 大连理工大学出版社) [吕 翎 2000 *非线性动力学与混沌* (大连: 大连出版社)]
 [17] Epstein I R 1984 *J. Phys. Chem.* **88** 187
 [18] Wu C W, Chua L O 1996 *J. Bif. Chaos* **6** 801
 [19] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130

Chaos synchronization of a complex network with different nodes^{*}

Lü Ling[†] Zhang Chao

(*College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*)

(Received 5 September 2008 ; revised manuscript received 18 September 2008)

Abstract

A method of chaos synchronization of a complex network with different nodes is proposed. The complex network is constructed by chaos systems with diverse structures. The coupling functions of the connected nodes of the complex network are identified based on Lyapunov stability theory. The Rössler system, Coulllet system and Lorenz system are taken as network nodes of the complex network in the paper. Simulation results show that a stable synchronization is obtained in whole complex network. The method can achieve synchronization of the networks with nodes of any chaotic systems, and the number of the node does not affect the stability of the whole complex network, therefore it has a universal application.

Keywords : chaos synchronization , complex network , diverse structure , Lyapunov stability theory

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee (Grant No. 2008T108).

[†] Corresponding author. E-mail : lluling1960@yahoo.com.cn