第 58 卷 第 4 期 2009 年 4 月
1000-3290/2009/58(04)/2155-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.4, April, 2009

Davey-Stewartson 方程组的包络周期解和孤立波解*

高 斌[1)2)] 刘式适[1)†] 刘式达[1)]

1)(北京大学物理学院,北京 100871)

2)(玉溪师范学院物理系,玉溪 653100)

(2008 年 6 月 3 日收到;2008 年 9 月 18 日收到修改稿)

应用 Jacobi 椭圆函数展开法,求得了 Davey-Stewartson 方程组的包络周期解和孤立波解.

关键词:Davey-Stewartson 方程, Jacobi 椭圆函数, 包络周期解, 孤立波解

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

在广泛的流体力学问题中都会遇到 Davey-Stewartson 方程组(简称为 DS 方程组).其形式可写为[1—3]

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\delta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta_1|u|^2u-\mu uv=0,\tag{1a}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\delta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\beta_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u|^2=0,\tag{1b}$$

其中 u 为复函数,v 为实函数,β_1,β_2 为非线性系数,μ 为相互作用系数,$\delta=\pm1$.当 $\delta=+1$ 时,方程组(1)称为 DSⅠ方程组;当 $\delta=-1$ 时,方程组(1)称为 DSⅡ方程组.应用 Darboux 变换[4]、散射反演法[5]和 Hirota 方法[6]可以获得 DS 方程组(1)的多种孤立子解.本文主要应用 Jacobi 椭圆函数展开法[7,8],求 DS 方程组的包络周期解,相应的包络冲击波解和孤立波解.

2. 定性分析

对于 DS 方程组(1),设

$$\begin{aligned}u&=\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)},\\ v&=v(\xi),\\ \xi&=px+qy-\sigma t,\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\varphi(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 都是实函数,p 和 q 分别是波包在 x 和 y 方向的波数,σ 为波包的圆频率,k 和 l 分别是载波在 x 和 y 方向的波数,ω 为载波的圆频率.

(2)式代入到 DS 方程组(1)得

$$\alpha(p^2+\delta q^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\varphi+[-\sigma+2\alpha(kp+\delta lq)]\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\varphi+[\omega-\alpha(k^2+\delta l^2)]\varphi+\beta_1\varphi^3-\mu\varphi v=0,\tag{3a}$$

$$(p^2-\delta q^2)\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2}-\beta_2p^2\frac{\mathrm{d}^2(\varphi^2)}{\mathrm{d}\xi^2}=0.\tag{3b}$$

由于 φ 是实函数,因此由(3a)式的虚部为零可得

$$\alpha(p^2+\delta q^2)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}+[\omega-\alpha(k^2+\delta l^2)]\varphi+\beta_1\varphi^3-\mu\varphi v=0,\tag{4a}$$

$$\sigma=2\alpha(kp+\delta lq).\tag{4b}$$

(3b)式对 ξ 积分两次,取积分常数为零得

$$(p^2-\delta q^2)v-\beta_2p^2\varphi^2=0,\tag{5}$$

因而

$$v=\frac{\beta_2p^2}{p^2-\delta q^2}\varphi^2.\tag{6}$$

这是 v 与 φ 之间联系的简单代数式.

(6)式代入(4a)式得

$$\alpha(p^2+\delta q^2)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}-\gamma\varphi+\beta\varphi^3=0,\tag{7}$$

其中

$$\omega-\alpha(k^2+\delta l^2)=-\gamma\qquad(\gamma>0),\tag{8}$$

$$\beta=\beta_1-\frac{\mu\beta_2p^2}{p^2-\delta q^2}.\tag{9}$$

令 $\psi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}$,则非线性常微分方程(7)等价于下列自

* 国家自然科学基金(批准号:90511009)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:liusk@pku.edu.cn

治动力系统：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\psi, \tag{10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\alpha(p^2+\delta q^2)}(\gamma\varphi-\beta\varphi^3). \tag{10b}$$

动力系统(10)有三个平衡点：

$$\begin{aligned}(\varphi_1^*,\psi_1^*)&=(0,0),\\(\varphi_2^*,\psi_2^*)&=(\sqrt{\gamma/\beta},0),\\(\varphi_3^*,\psi_3^*)&=(-\sqrt{\gamma/\beta},0).\end{aligned} \tag{11}$$

由于 $\gamma>0$，因而要求 $\beta>0$.

在平衡点处，(10)式右端的 Jacobi 矩阵分别为

$$J_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)} & 0\end{pmatrix},$$

$$J_{2,3}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)} & 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

它们的特征方程分别是

$$\begin{aligned}\lambda^2-\frac{\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)}&=0,\\ \lambda^2+\frac{2\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)}&=0.\end{aligned} \tag{13}$$

相应的特征根分别为

$$\begin{aligned}\lambda&=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)}},\\ \lambda&=\pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)}}.\end{aligned} \tag{14}$$

显然，在 $\gamma>0$ 的条件下，对于平衡点 $(\varphi_1^*,\psi_1^*)=(0,0)$ 而言，其特征根或是不等实根 $(p^2+\delta q^2>0)$，或是共轭纯虚根 $(p^2+\delta q^2<0)$；同样，对于平衡点 $(\varphi_{2,3}^*,\psi_{2,3}^*)=(\pm\sqrt{\gamma/\beta},0)$ 而言，其特征根或是共轭纯虚根 $(p^2+\delta q^2>0)$，或是不等实根 $(p^2+\delta q^2<0)$；因而平衡点或是中心点，或是鞍点.

由(10)式知，在相平面 (φ,ψ) 上的相轨道满足

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{\alpha(p^2+\delta q^2)}\frac{\gamma\varphi-\beta\varphi^3}{\psi}. \tag{15}$$

积分上式得

$$\frac{1}{2}\psi^2-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha(p^2+\delta q^2)}\varphi^2+\frac{1}{4}\frac{\beta}{\alpha(p^2+\delta q^2)}\varphi^4=H, \tag{16}$$

其中 H 为系统(7)的总能量或 Hamiliton 函数.

因方程(16)可以化为

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial\psi}. \tag{17}$$

所以，(7)式表示的系统为保守系统，有周期解.

3. 包络周期解

下面应用 Jacobi 椭圆函数展开法，求出了 DS 方程的包络周期解，相应的包络冲击波解和孤立波解.

将 $\varphi(\xi)$ 展开为下列 Jacobi 椭圆正弦函数的级数：

$$\varphi=\sum_{i=0}^{n}a_i\,\mathrm{sn}^i\xi. \tag{18}$$

由(7)式中的非线性项与最高阶导数项平衡可定出 $n=1$，则

$$\varphi=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi. \tag{19}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}&=a_1\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\\ \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}&=a_1[-\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}^2\xi-m^2\mathrm{cn}^2\xi\mathrm{sn}\xi]\\ &=-a_1(1+m^2)\mathrm{sn}\xi+2a_1m^2\mathrm{sn}^3\xi.\end{aligned}$$

把(19)式代入(7)式得

$$\begin{aligned}&\alpha(p^2+\delta q^2)[-a_1(1+m^2)\mathrm{sn}\xi+2a_1m^2\mathrm{sn}^3\xi]\\ &-\gamma(a_0+a_1\mathrm{sn}\xi)+\beta(a_0^3+3a_0^2a_1\mathrm{sn}\xi\\ &+3a_0a_1^2\mathrm{sn}^2\xi+a_1^3\mathrm{sn}^3\xi)=0.\end{aligned} \tag{20}$$

由此得

$$\begin{aligned}&-\gamma a_0+\beta a_0^3=0,\\ &-a_1(1+m^2)\alpha(p^2+\delta q^2)-\gamma a_1+3\beta a_0^2a_1=0,\\ &3a_0a_1^2\beta=0,\\ &2a_1m^2\alpha(p^2+\delta q^2)+\beta a_1^3=0.\end{aligned} \tag{21}$$

解之得

$$\begin{aligned}a_0&=0,\\ a_1&=\pm\sqrt{-\frac{2\alpha(p^2+\delta q^2)}{\beta}}m,\\ p^2+\delta q^2&=-\frac{\gamma}{(1+m^2)\alpha},\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $0\leqslant m\leqslant1$ 为模数.

(22)式代入到(18)式求得 u 的振幅是

$$\varphi(\xi)=\pm m\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(1+m^2)}}\mathrm{sn}(px+qy-\sigma t). \tag{23}$$

显然这是围绕中心点的闭合轨道. 当 $m\to1$ 时，上式化为

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\tanh(px + qy - \sigma t). \tag{24}$$

因 $\xi \to +\infty$ 时，$\varphi(\xi) \to \pm\sqrt{\gamma/\beta}$；$\xi \to -\infty$ 时，$\varphi(\xi) \to \mp\sqrt{\gamma/\beta}$，故这是连接两鞍点 $\varphi_1^* = \sqrt{\gamma/\beta}$，$\varphi_2^* = -\sqrt{\gamma/\beta}$ 的异宿轨道，即冲击波解.

(23)式代入(2)和(6)式，求得 DS 方程的包络 Jacobi 椭圆正弦函数周期解为

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(1+m^2)}}\, m\,\mathrm{sn}(px + qy - \sigma t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}, \tag{25}$$

$$v = \frac{\beta_2 p^2}{p^2 - \delta q^2}\frac{2\gamma}{\beta(1+m^2)} m^2\mathrm{sn}^2(px + qy - \sigma t). \tag{26}$$

以下还可以作 $\mathrm{cn}\xi$ 展开和 $\mathrm{dn}\xi$ 展开分别得出 Jacobi 椭圆余弦函数周期解和第三类 Jacobi 椭圆函数周期解及相应的孤立波解.

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(2m^2-1)}}\, m\,\mathrm{cn}(px + qy - \sigma t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}, \tag{27}$$

$$v = \frac{\beta_2 p^2}{p^2 - \delta q^2}\frac{2\gamma}{\beta(2m^2-1)} m^2\mathrm{cn}^2(px + qy - \sigma t), \tag{28}$$

$$\gamma = \alpha(2m^2 - 1)(p^2 + \delta q^2). \tag{29}$$

与

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(2-m^2)}}\,\mathrm{dn}(px + qy - \sigma t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}, \tag{30}$$

$$v = \frac{\beta_2 p^2}{p^2 - \delta q^2}\frac{2\gamma}{\beta(2-m^2)}\mathrm{dn}^2(px + qy - \sigma t), \tag{31}$$

$$\gamma = \alpha(2 - m^2)(p^2 + \delta q^2). \tag{32}$$

当 $m \to 1$ 时，$\mathrm{cn}\xi \to \mathrm{sech}\xi$，$\mathrm{dn}\xi \to \mathrm{sech}\xi$. 则

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\,\mathrm{sech}(px + qy - \sigma t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}, \tag{33}$$

$$v = \frac{\beta_2 p^2}{p^2 - \delta q^2}\frac{2\gamma}{\beta}\mathrm{sech}^2(px + qy - \sigma t). \tag{34}$$

这就是 DS 方程组的包络孤立波解.

4. 结　论

本文应用行波变换将 Davey-Stewartson 方程化为了非线性常微分方程，对其进行了定性分析，并应用 Jacobi 椭圆正弦函数、Jacobi 椭圆余弦函数和第三类 Jacobi 椭圆函数展开法，求出了它的包络周期解，相应的包络冲击波解和孤立波解.

[1] Davey A, Stewartson K 1974 *Proc. R. Soc.* A **338** 101

[2] Dai Z D, Jiang M R, Li D L 2007 *Davey-Stewartson Equation* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [戴正德、蒋慕蓉、李栋龙 2007 戴维-斯特瓦尔松方程(北京:科学出版社)]

[3] Zhang J, Guo B L, Sheng S F 2005 *Appl. Math. Mech.* **26** 127 (in Chinese) [张　隽、郭柏灵、沈守枫 2005 应用数学和力学 **26** 127]

[4] Matveev V B, Salle M A 1991 *Darboux Transformations and Solitons* (Berlin: Springer-Verlag)

[5] Arkadiev V A, Pogrebkov A K, Polivanov M C 1989 *Physica* D **36** 189

[6] Hietarinta J, Hirota R 1990 *Phys. Lett.* A **145** 237

[7] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

Envelope periodic and solitary solutions of Davey-Stewartson equation*

Gao Bin[1)2)] Liu Shi-Kuo[1)†] Liu Shi-Da[1)]

1)(*School of Physics*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)

2)(*Department of Physics*, *Yuxi Normal University*, *Yuxi* 653100, *China*)

(Received 3 June 2008; revised manuscript received 18 September 2008)

Abstract

The Jacobi elliptic function expansion method is applied to construct the envelope periodic and solitary solutions to the Davey-Stewartson equation.

Keywords: Davey-Stewartson equation, Jacobi elliptic function, envelope periodic solution, solitary solution

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90511009).

† Corresponding author. E-mail: liusk@pku.edu.cn