

# 非马尔可夫环境下原子的几何相位演化\*

郑力明<sup>1)†</sup> 王发强<sup>2)</sup> 刘颂豪<sup>2)</sup>

1) 暨南大学信息科学技术学院, 广州 510632)

2) 华南师范大学信息光电子科技学院, 广州 510006)

(2008 年 11 月 17 日收到, 2008 年 11 月 27 日收到修改稿)

从微观哈密顿量出发, 研究了原子在非马尔可夫环境影响下的几何相位演化. 结果表明, 在强耦合条件下原子的几何相位比弱耦合时获得的几何相位大, 而且这一差别随环境损耗的增加而增大. 在环境损耗较小时, 原子的几何相位随时间变化出现连续和不连续两种演化行为, 且不连续的范围随环境的损耗增加而增大. 总之, 在非马尔可夫环境下, 原子的几何相位演化将出现丰富而复杂的演化特征.

关键词: 几何相位, 原子, 腔场, 非么正

PACC: 4250, 0365

## 1. 引 言

自从 Berry 在 1984 年发现绝热回复(cyclic)系统演化的几何相位<sup>[1]</sup>以来, 量子系统的几何相位得到了广泛的研究<sup>[2-7]</sup>, 并在实验系统中被观测到<sup>[8-11]</sup>. 目前, Berry 关于几何相位的概念已经被推广, 如 Aharonov 等<sup>[12]</sup>将 Berry 相推广到非绝热演化系统, 文献<sup>[13, 14]</sup>将 Berry 相推广到非回复系统, Uhlmann<sup>[15, 16]</sup>将几何相位推广到混态和非么正演化系统. 在几何相位的应用方面, 由于几何相位只与系统状态在 Hilbert 空间中的演化路径有关且抗干扰, 因而可以将其用于实现量子计算<sup>[17-19]</sup>. 但由于任何系统都不可避免地与环境相互作用, 并使量子相干特性受到破坏, 这使得量子计算的实现受到一定的限制. 因此, 研究环境对系统量子相位的影响很有必要. 目前, 已经有许多文献讨论了环境对几何相位的影响, 如解相环境和自旋环境的影响<sup>[20]</sup>、有限温度环境的影响<sup>[21]</sup>、压缩真空以及压缩热库的影响<sup>[22, 23]</sup>. 本文将讨论非马尔可夫环境对原子几何相位的影响.

## 2. 系统模型与几何相位

当一个两能级原子量子比特放入高  $Q$  腔中, 其

与环境相互作用的哈密顿量可以表示为

$$H = \omega_0 |e\rangle\langle e| + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k g_k (a_k^\dagger |g\rangle\langle e| + a_k |e\rangle\langle g|), \quad (1)$$

其中  $\omega_0$  是原子基态  $|g\rangle$  与激发态  $|e\rangle$  之间的跃迁频率,  $\omega_k$  是腔场  $k$  的频率,  $a_k^\dagger$  和  $a_k$  是腔场  $k$  的产生和湮没算符,  $g_k$  是原子和腔场  $k$  的耦合系数. 如果系统只有一个激发态, 则其态矢量可以展开为<sup>[24]</sup>

$$\Psi(t) = c_0 \Psi_0 + c_1 e^{-i\omega_0 t} \Psi_1 + \sum_k c_k e^{-i\omega_k t} \Psi_k, \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= |e\rangle \otimes \prod_k |0\rangle_k, \\ \Psi_k &= |g\rangle \otimes |1\rangle_k \prod_{k' \neq k} |0\rangle_{k'}, \\ \Psi_0 &= |g\rangle \otimes \prod_k |0\rangle_k. \end{aligned}$$

这里  $|0\rangle_k$  表示腔模  $k$  为真空态,  $|1\rangle_k$  表示腔模  $k$  为第一激发态. 将(2)式代入 Schrödinger 方程  $(d/dt)\Psi = H\Psi$ , 可以得到如下的耦合方程:

$$\dot{c}_1 = -i \sum_k g_k e^{-(\omega_k - \omega_0)t} c_k, \quad (3)$$

$$\dot{c}_k = -i g_k e^{(\omega_k - \omega_0)t} c_1, \quad (4)$$

其中系数  $c_0$  是常数. 初始时, 即腔场为真空态时,  $c_k(0) = 0$ , 直接积分方程(4)以消去  $c_k$ , 并将结果代入方程(3), 可以得到

\* 广东省自然科学基金(批准号: 8151063201000051)资助的课题.

† E-mail: zlmqit@126.com

$$\dot{c}_1 = - \int_0^t d\tau \alpha(t - \tau) c_1(\tau), \quad (5)$$

其中  $\alpha(t - \tau)$  是环境的记忆关联函数，

$$\alpha(t - \tau) = \sum_k g_k^2 e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t - \tau)}. \quad (6)$$

假设腔场的谱密度是 Lorentz 型<sup>[25]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\omega) &= \sum_k g_k^2 \{ \alpha(\omega - \omega_k) + \alpha(\omega + \omega_k) \} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

这里  $\gamma$  是腔模分布的谱宽，由腔场引发的噪声关联时间为  $\tau_r = 1/\gamma$ 。λ 与原子和腔场环境的耦合强度相关。当  $\lambda \gg \gamma$  时，环境的影响是强关联的，为非马尔

可夫型，而当  $\lambda \ll \gamma$  时，环境的影响则为马尔可夫型。由(7)式可以计算出环境的关联函数为

$$\begin{aligned} \alpha(t - \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t - \tau)} \\ &= \frac{\gamma\lambda}{2} e^{-\gamma(t - \tau)}. \end{aligned} \quad (8)$$

从方程(5)出发，可以解得<sup>[25]</sup>

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t} \left( \cosh \frac{dt}{2} + \frac{\gamma}{d} \sinh \frac{dt}{2} \right), \quad (9)$$

其中

$$d = \sqrt{\gamma^2 - 2\lambda\gamma}.$$

这样，便可以得到原子的约化密度矩阵为

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) |\alpha(t)|^2 & \rho_{eg}(0) \alpha(t) \\ \rho_{ge}(0) \alpha^*(t) & \rho_{gg}(0) + \rho_{ee}(0) (1 - |\alpha(t)|^2) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中  $\rho_{ee}(0)$ 、 $\rho_{eg}(0)$ 、 $\rho_{ge}(0)$  和  $\rho_{gg}(0)$  是原子初态的密度矩阵元。非幺正演化系统的几何相位由文献[26]给出，即

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{GP}}(\tau) &= \arg \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i(0)\lambda_i(\tau)} \right. \\ &\quad \times \left. \langle \Psi_i(0) | \Psi_i(\tau) \rangle e^{-\int_0^\tau \dot{\Psi}_i(t) | \Psi_i(t) dt} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\lambda_i(t)$  是密度矩阵的瞬时本征值， $|\Psi_i(t)\rangle$  是对应的瞬时本征矢量， $\dot{\Psi}_i(t)$  表示对时间求导数， $\arg(\cdot)$  表示复宗量的相位角。

如原子初态处于叠加态  $\cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |g\rangle$

( $\theta$  是极角， $\phi$  是方位角)，则其对应的初始密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2} \sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2} \sin\theta e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) & \rho_{eg}(0) \\ \rho_{ge}(0) & \rho_{gg}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

于是  $t$  时刻的原子约化密度矩阵为

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} |\alpha(t)|^2 & \frac{1}{2} \sin\theta e^{-i(\phi + \omega_0 t)} \alpha(t) \\ \frac{1}{2} \sin\theta e^{i(\phi + \omega_0 t)} \alpha^*(t) & 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} |\alpha(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

(13)式的本征值为

$$\lambda_{\pm}(t) = (1 \pm \eta)/2.$$

因为  $\lambda_-(0) = 0$ ，所以，只需计算  $\lambda_+$  所对应的本征矢。经过计算得

$$|+\rangle = \sin \frac{\theta_t}{2} |1\rangle + \cos \frac{\theta_t}{2} e^{i(\phi + \omega_0 t)} |0\rangle, \quad (14)$$

其中

$$\eta = \sqrt{1 - 4 |\alpha(t)|^2 (1 - |\alpha(t)|^2) \cos^4 \frac{\theta}{2}},$$

$$\tan \frac{\theta_t}{2} = \frac{\alpha(t) \sin\theta}{1 + \eta - 2 |\alpha(t)|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

利用以上结果，由几何相位的定义方程(11)，最终可以得到原子的几何相位为

$$\Phi_{\text{GP}} = \arg \left[ \sqrt{(1 + \eta)/2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta_t}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta_t}{2} e^{i\omega_0 t} \right) e^{i\Psi} \right], \quad (15)$$

其中

$$\Psi = - \int_0^t \frac{\omega_0 \left( 1 + \eta - 2 | \alpha(t) |^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 dt}{c^2(t) \sin^2 \theta + \left( 1 + \eta - 2 | \alpha(t) |^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}. \quad (16)$$

当经过准回复周期  $t = 2\pi/\omega_0$  后, 原子的几何相位为

$$\Phi_{\text{CP}} = - \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{\omega_0 \left( 1 + \eta - 2 | \alpha(t) |^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 dt}{c^2(t) \sin^2 \theta + \left( 1 + \eta - 2 | \alpha(t) |^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}. \quad (17)$$

由于以上积分比较复杂, 难以给出解析表达式, 所以下面将进行数值计算, 并对结果进行讨论.

### 3. 数值计算及讨论

首先, 讨论原子所获得的几何相位  $\Phi_{\text{CP}}$  在一个准周期内随时间  $t$  和极角  $\theta$  的变化关系. 图 1—图 3 给出了不同损耗条件下, 不同耦合强度时的原子几何相位随时间  $t$  和极角  $\theta$  的变化关系. 在本文计算中已设  $\omega_0 = 1$ . 由图 1 和图 2 可以发现, 在环境损耗较小时, 原子的几何相位随时间的变化因  $\theta$  的变化而出现截然不同的演化行为. 当  $\theta$  较小时, 即原子初始处于激发态概率比较高时, 原子所获得的几何相位随时间的变化是连续的, 只是在强耦合时, 由于环境与原子的作用, 当时间  $t > \pi$  之后原子的几何相位有相对明显的变化. 当  $\theta$  较大时, 即原子初始处于基态概率比较高时, 原子所获得的几何相位随时间的变化在  $t = \pi$  处出现不连续的突然变化. 从图 3 可以发现, 在强耦合时, 当环境损耗增加时原子几何相位随时间变化不连续的范围将增大, 直至所有的  $\theta$  取值范围. 图 3 显示, 当  $\gamma = 1$  时, 原子的几何相位是先随时间的增加而增加, 达到最大值后再降低, 且原子几何相位所达到的最大值随  $\theta$  的增加而减小, 至  $t = \pi$  时发生不连续的突然变化. 通过计算还发现, 环境损耗的增加对弱耦合时原子几何相位的演化影响较小. 这是因为弱耦合时原子的状态演化对环境不敏感所造成的.

其次, 讨论原子在腔中经过一个准周期  $t = 2\pi/\omega_0$  所获得的几何相位与系统参数变化之间的关系. 图 4 和图 5 分别给出了不同损耗环境下, 强耦合 ( $\lambda \gg \gamma$ ) 和弱耦合 ( $\lambda \ll \gamma$ ) 时原子几何相位  $\Phi_{\text{CP}}$  随极角  $\theta$  的变化曲线. 从图 4 和图 5 可以看出: 在强耦合条件下, 原子的几何相位将比弱耦合时获得的几

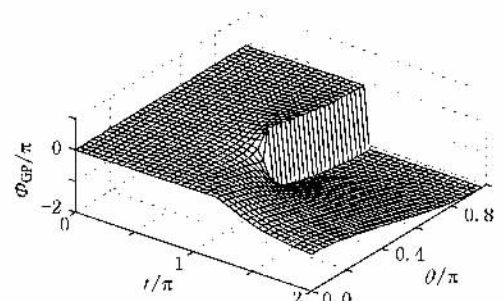


图 1 当  $\lambda = 10\gamma$ ,  $\gamma = 0.1$  时, 几何相位  $\Phi_{\text{CP}}$  随时间  $t$  和极角  $\theta$  的变化

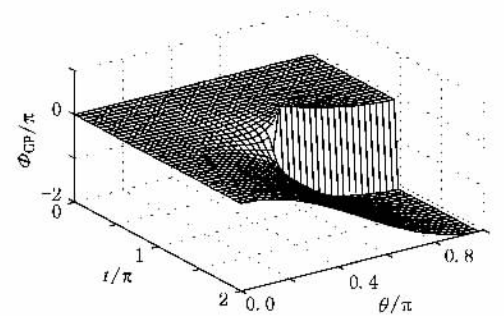


图 2 当  $\lambda = 0.1\gamma$ ,  $\gamma = 0.1$  时, 几何相位  $\Phi_{\text{CP}}$  随时间  $t$  和极角  $\theta$  的变化

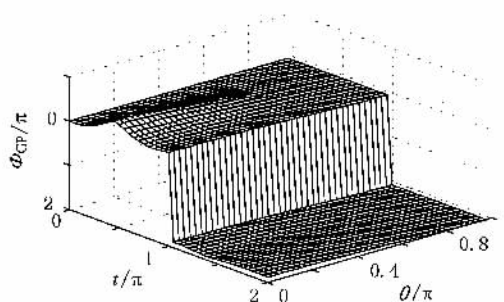


图 3 当  $\lambda = 10\gamma$ ,  $\gamma = 1$  时, 几何相位  $\Phi_{\text{CP}}$  随时间  $t$  和极角  $\theta$  的变化

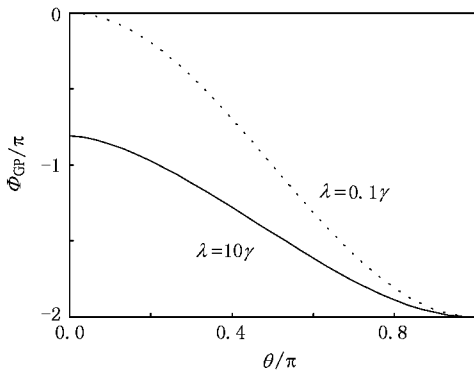


图4 当  $\gamma = 0.1$  时,几何相位  $\Phi_{GP}$  随极角  $\theta$  的变化

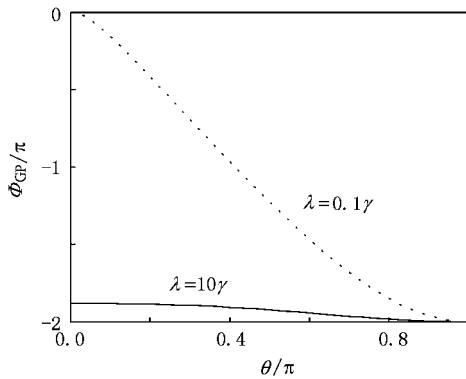


图5 当  $\gamma = 1$  时,几何相位  $\Phi_{GP}$  随极角  $\theta$  的变化

何相位大( $\theta = 0, \pi$  点除外). 这是因为强耦合时环境的变化关联时间远大于原子状态的改变时间,所以在相同的时间内由于环境对原子的非马尔可夫效应,使得原子获得了较大的几何相位.当环境损耗增加时,强耦合时原子的几何相位与弱耦合时原子的

几何相位的差别将进一步增大.这是因为随着环境损耗的增加,环境单位时间内的变化也将增大,并通过非马尔可夫效应进一步影响原子状态,使原子获得的几何相位进一步增加.强耦合时原子所获得的几何相位与弱耦合时原子的几何相位的差别随  $\theta$  的增加而减小,即随原子初始处于基态的概率增加而减小.由上述理论计算可知,当原子处于基态时系统的状态不变,环境对原子的影响将消失,从而导致原子所获得的几何相位的差别随  $\theta$  的增加而减小.

## 4. 结 论

本文从微观哈密顿量出发,通过求解腔中两能级原子的约化密度矩阵,计算了原子在非马尔可夫环境影响下的混态几何相位.结果表明,原子的几何相位与环境的损耗、原子与环境的耦合强度以及原子的初始状态有关.在强耦合条件下,原子经过一个准周期获得的几何相位将比原子在弱耦合时获得的几何相位大,而且这一差别将随环境损耗的增加而增加.当环境损耗较小时,原子的几何相位随时间的演化因  $\theta$  的变化而出现两种完全不同的演化行为,即连续和不连续两种演化行为,且不连续演化的  $\theta$  范围随环境损耗的增加而扩大.当原子初态中激发态系数较大时,由于环境的影响,使得强耦合时原子的几何相位演化出现丰富而复杂的演化特征.本文的工作将对几何量子计算中的量子门与量子调控的研究具有一定的指导意义.

- [1] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. London A* **392** 45
- [2] Shapere A, Wilczek F 1989 *Geometric Phase in Physics* (Singapore: World Scientific)
- [3] Fonseca-Romero K M, Aguiar-Pinto A C, Thomaz M T 2002 *Physica A* **307** 142
- [4] Li C F, Guo G C 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 897 (in Chinese) [李春芳、郭光灿 1996 物理学报 **45** 897]
- [5] Li B Z, Zhang D G, Wu J H, Yan F L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 227 (in Chinese) [李伯斌、张德刚、吴建华、阎凤利 1997 物理学报 **46** 227]
- [6] Li H Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1643 (in Chinese) [李华钟 2004 物理学报 **53** 1643]
- [7] Zheng Y H, Chen T, Wang H, Wang Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6199 (in Chinese) [郑映鸿、陈重、王平、常哲 2007 物理

学报 **56** 6199]

- [8] Suter D, Mueller K T, Pines A 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1218
- [9] Bhandari R, Samuel J 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1211
- [10] Kwiat P G, Chiao R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 588
- [11] Webb C L, Godun R M, Summy G S, Oberthaler M K, Featonby P D, Foot C J, Burnett K 1999 *Phys. Rev. A* **60** R1783
- [12] Aharonov Y, Anandan J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593
- [13] Samuel J, Bhandari R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2339
- [14] Pati A K 1995 *Phys. Rev. A* **52** 2576
- [15] Uhlmann A 1986 *Rep. Math. Phys.* **24** 229
- [16] Uhlmann A 1991 *Lett. Math. Phys.* **21** 229
- [17] Jones J A, Vedral V, Ekert A, Castagnoli G 1999 *Nature* **403** 689
- [18] Falci G, Fazio R, Palma G M, Siewert J, Vedral V 2000 *Nature* **407** 355

- [ 19 ] Wang Z S , Wu C F , Feng X L , Kwek L C , Lai C H , Oh C H , Vedral V 2007 *Phys. Rev. A* **76** 044303
- [ 20 ] Yi X X , Tong D M , Wang L C , Kwek L C , Oh C H 2006 *Phys. Rev. A* **73** 052103
- [ 21 ] Reza khani A T , Zanardi P 2006 *Phys. Rev. A* **73** 052117
- [ 22 ] Wang Z S , Wu C , Feng X L , Kwek L C , Lai C H , Oh C H 2007 *Phys. Rev. A* **75** 024102
- [ 23 ] Banerjee S , Srikanth R 2008 *Eur. Phys. J. D* **46** 335
- [ 24 ] Garraway B M 1997 *Phys. Rev. A* **55** 2290
- [ 25 ] Breuer H P , Kappler B , Petruccione F 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1633
- [ 26 ] Tong D , Sjoqvist E , Kwek L C , Oh C H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 080405

## Geometric phase evolution of atom under non-Markovian environment<sup>\*</sup>

Zheng Li-Ming<sup>1)†</sup> Wang Fa-Qiang<sup>2)</sup> Liu Song-Hao<sup>2)</sup>

<sup>1</sup> *College of Information Science and Technology , Jinan University , Guangzhou 510632 , China* )

<sup>2</sup> *School of Information and Photoelectronic Science and Engineering , South China Normal University , Guangzhou 510006 , China* )

( Received 17 November 2008 ; revised manuscript received 27 November 2008 )

### Abstract

The geometric phase of two-level atom , under the non-Markovian effect of environment , is investigated from the microscopic Hamiltonian . The results show that the geometric phase of atom strongly coupled with cavity field is larger than that of atom weakly coupled with cavity field , and the difference between them becomes larger as the loss of environment increases . In the case of relatively small environment loss , the geometric phase of atom shows continuous or discontinuous evolution with time depending on different initial atom states , and the discontinuity range increases when the environment loss increases . In a word , the geometric phase exhibits complicated characteristics under non-Markovian environment .

**Keywords :** geometric phase , atom , cavity field , nonunitary

**PACC :** 4250 , 0365

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China ( Grant No. 8151063201000051 ).

<sup>†</sup> E-mail : zlmqit@126.com