

# 一类线性阻尼振子的随机共振研究\*

靳艳飞<sup>1)†</sup> 胡海岩<sup>1)2)</sup>

1) 北京理工大学力学系, 北京 100081)

2) 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

(2008 年 10 月 1 日收到, 2008 年 11 月 6 日收到修改稿)

针对随机有色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下的线性阻尼振子, 利用 Shapiro-Logvinov 公式推导了系统响应的一、二阶稳态矩的解析表达式. 发现这类系统存在传统的随机共振、广义的随机共振和“真正”的随机共振, 当乘性噪声强度和调制噪声强度的比值大于等于 1 时, 系统出现随机多共振现象. 通过数值计算的系统响应功率谱, 验证了理论分析结果.

关键词: 随机共振, 周期调制的噪声, 线性阻尼振子

PACC: 0540

## 1. 引 言

1981 年, Benzi 等<sup>[1]</sup>和 Nicolis 等<sup>[2]</sup>提出随机共振的概念并用来解释第四纪全球气象冰川现象. 此后, 随机共振的理论和实验研究引起了各领域科学家的广泛关注<sup>[3-6]</sup>. 人们在激光系统、生物系统、光学系统及电子系统中均发现了随机共振现象, 随机共振开始成为非线性科学研究的一个热点问题. 以往, 人们认为随机共振出现在具有周期和噪声激励的非线性系统中. 近年来, Gitterman 等<sup>[7,8]</sup>的研究结果表明, 随机共振现象可以出现在由乘性色噪声或分段噪声驱动的线性系统中, 甚至是白噪声激励的具有随机阻尼的欠阻尼线性系统中<sup>[9]</sup>. 然而, Gitterman 等<sup>[7,8]</sup>发现的随机共振相对于传统意义的随机共振是广义上的, 即系统响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随噪声强度单调变化, 但随系统的其他一些特征参数(如激励振幅、频率或噪声的相关时间等)非单调变化.

在一些实际物理系统中, 噪声和信号以相乘的方式出现. 例如, 在光学或射电天文学的扩充器中需要使用周期信号调制的噪声. Dykman 等<sup>[10]</sup>研究了具有周期信号调制噪声的非对称双稳系统并发现了随机共振现象. Wang 等<sup>[11]</sup>研究了具有周期信号调制噪声的单模激光模型并观察到了随机多共振现象.

文献 [12, 13] 研究了具有周期信号调制噪声激励的过阻尼线性系统并发现了传统意义上的随机共振现象. 但上述研究大多局限于过阻尼极限的情形, 即研究具有一阶微分的 Langevin 方程, 而对具有阻尼项的二阶随机微分方程的随机共振研究非常有限. 王辅忠等<sup>[14]</sup>用电子线路模拟的方法对 Duffing 系统进行了随机共振实验研究, 发现在一定条件下, 通过改变阻尼系数可获得较高的输出信噪比. 康艳梅等<sup>[15]</sup>研究了弱噪声极限下二维布朗运动的随机共振现象, 应用多维 Fokker-Planck 方程与时间有关问题的理论得到了适用于任何阻尼的信噪比, 特别是适合于阻尼很小的布朗运动. 所以, 当阻尼系数不是大、甚至很小时, 研究具有周期调制噪声的线性阻尼振子的随机共振具有重要意义.

本文研究了随机有色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下的线性阻尼振子的随机共振. 在有色噪声激励的情况下, 利用 Shapiro-Logvinov 公式, 得到了系统响应的一、二阶稳态矩的解析表达式, 并讨论了噪声和系统参数对系统响应幅度和二阶稳态矩的影响, 发现这类系统存在随机共振现象. 文中得到的解析表达式适用于任何大小的线性黏性阻尼, 而且不必限制在弱噪声和激励范围内, 从而揭示了绝热近似条件下不能得到的一些物理现象. 最后, 利用欧拉法对系统进行数值模拟, 并给出了响应功率谱的数值结果.

\* 国家自然科学基金(批准号: 10532050, 10702025 和 10672074), 北京理工大学优秀青年教师资助计划(批准号: 2008Y0715)和北京市教委项目(批准号: 20080739027)资助的课题.

† E-mail: jinyf@bit.edu.cn

## 2. 周期调制噪声激励下线性阻尼振子的一、二阶矩

随机色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下的线性阻尼振子可由下列随机微分方程描述：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2[1 + \xi(t)]x = A_0 \sin \Omega t \cdot \eta(t), \quad (1)$$

其中  $\gamma > 0$  为阻尼系数,  $\omega$  为无任何激励时系统的固有频率,  $A_0$  为周期激励幅值,  $\Omega$  为周期激励频率,  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  为具有零均值和非零相关时间的有色噪声, 其统计性质如下：

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 0, \quad \eta(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{D_1}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ \eta(t)\eta(t') &= \frac{D_2}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ \xi(t)\eta(t') &= \eta(t)\xi(t') \\ &= \frac{k\sqrt{D_1 D_2}}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $D_1$  和  $D_2$  为色噪声强度,  $\tau$  为色噪声的相关时间,  $\lambda = \tau^{-1}$  为色噪声的相关率,  $k$  ( $|k| \leq 1$ ) 为  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  之间的关联系数.

当  $A_0 = 0$  时, 方程(1)成为物理、生物以及经济等领域广泛研究的模型. 利用累积量展开方法<sup>[16]</sup>可得  $x$  满足的微分方程为

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + (\gamma - \omega^2 c_2) \frac{d}{dt} + \omega^2(1 - \omega c_1) \right] x = 0, \quad (3)$$

$$\text{其中 } c_1 = \frac{4\omega\tau D_1}{1 + 4\omega^2 \tau^2}, \quad c_2 = \frac{8\omega^2 \tau^2 D_1}{1 + 4\omega^2 \tau^2}.$$

利用 Routh-Hurwitz 定理 结合(3)式可知,  $x$  是渐近稳定的当且仅当下列条件：

$$\gamma > \omega^2 c_2, \quad \omega c_1 < 1 \quad (4)$$

满足. 当(4)式不满足时,  $x$  将发散, 是不稳定的.

当  $\tau \rightarrow 0$  时, 有色噪声(2)将退化为下列高斯白噪声：

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 0, \quad \eta(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= 2D_1 \delta(t-t'), \\ \eta(t)\eta(t') &= 2D_2 \delta(t-t'), \\ \xi(t)\eta(t') &= \eta(t)\xi(t') \\ &= 2k\sqrt{D_1 D_2} \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (5)$$

此时,  $D_1$  和  $D_2$  为白噪声的噪声强度,  $\sqrt{D_1 D_2}$  为白噪声之间的相关强度,  $k$  为白噪声间的相关系数. 与此同时, 稳定性条件(4)中  $c_1 = 0, c_2 = 0$ , 即在白噪声激励下, 系统“固有频率”的随机振荡并不影响  $x$  的稳定性.

下面我们将研究具有周期调制噪声的情形, 即  $A_0 \neq 0$ .

### 2.1. 系统响应的一阶矩

首先, 将方程(1)改写成下面的一阶微分方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega^2[1 + \xi(t)]x \\ &\quad + A_0 \sin \Omega t \cdot \eta(t). \end{aligned} \quad (6)$$

对(6)式进行平均, 得到关于一阶矩的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d x}{dt} &= y, \\ \frac{d y}{dt} &= -\gamma y - \omega^2 x - \omega^2 x \xi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

由于(7)式的第二式中含有新的耦合项  $\xi(t)x$ , 所以需要对该项进行解耦. 利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[17]</sup>, 可得到  $\xi(t)x$  满足的微分方程为

$$\frac{d \xi x}{dt} = \xi y - \lambda \xi x. \quad (8)$$

此时(8)式中又出现了新的耦合项  $\xi(t)y$ , 再次利用 Shapiro-Loginov 公式得到  $\xi(t)y$  所满足的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d \xi y}{dt} &= -(\gamma + \lambda) \xi y - \omega^2 \xi x \\ &\quad - \omega^2 \lambda D_1 x + k\lambda \sqrt{D_1 D_2} A_0 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

这样, 方程(7)(8)(9)可组成关于  $x, y, \xi(t)x$  和  $\xi(t)y$  的一个微分方程组. 对该微分方程组进行合并和化简, 可以得到一个关于一阶矩  $x$  的四阶微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{dt^4} + (\gamma + \lambda) \frac{d^3 x}{dt^3} \\ + (\gamma^2 + 2\omega^2 + 3\lambda\gamma + \lambda^2) \frac{d^2 x}{dt^2} \\ + (\lambda + \gamma)(2\omega^2 + \lambda\gamma) \frac{d x}{dt} \\ + \omega^2[\omega^2 + \lambda\gamma + \lambda^2 - \omega^2 \lambda D_1] x \\ = -k\lambda \sqrt{D_1 D_2} \omega^2 A_0 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

设方程(10)的解为  $x = x_0 + x_A$ , 其中

$x_0$  为齐次方程(3)的解,  $x_A$  为由激励  $A_0 \sin \Omega t \cdot \chi(t)$  产生的特解, 则非齐次方程(10)的解可以写成  $x_A = A \sin(\Omega t + \phi)$  的形式. 将其代入(10)式可得  $A$  和  $\phi$  的表达式<sup>[18]</sup>

$$A = \frac{A_0 \omega^2 k \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

$$\phi = \pi - \arctan\left(\frac{g_2}{g_1}\right), \quad (11)$$

其中

$$g_1 = (\Omega^2 - \omega^2) \chi(\Omega^2 - \omega^2 - \lambda^2) - \Omega^2(\gamma^2 + 3\gamma\lambda) + \omega^2\lambda(\gamma - \omega^2 D_1),$$

$$g_2 = \Omega[\lambda + \gamma \chi(\gamma\lambda - \chi(\Omega^2 - \omega^2))].$$

## 2.2. 系统响应的二阶矩

现用类似的方法求方程(1)响应的二阶矩. 首先将(6)式的第一、二式分别乘以  $2x$  和  $2y$  后平均, 可得

$$\frac{d}{dt} x^2 = 2xy,$$

$$\frac{d}{dt} y^2 = -2\gamma y^2 - 2\omega^2 xy - 2\omega^2 \xi xy + 2A_0 \sin \Omega t \gamma y. \quad (12)$$

然后, 将方程(6)的第一式和第二式分别乘以  $y$  和  $x$  后平均, 可得关于  $xy$  的微分方程

$$\frac{d}{dt} xy = -\gamma xy - \omega^2 x^2 + y^2 - \omega^2 \xi x^2 + A_0 \sin \Omega t \gamma x. \quad (13)$$

由于方程(12)和(13)产生了一些新的耦合项  $\xi xy$ ,  $\xi x^2$ ,  $x\eta$  和  $\gamma y$ , 为了求出  $x^2$  的表达式, 必须对这些项进行解耦. 利用 Shapiro-Loginov 公式可得

$$\frac{d}{dt} x\eta = \gamma y - \lambda \eta x, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \eta y = -(\gamma + \lambda) \eta y - \omega^2 x\eta - \omega^2 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} x + A_0 \lambda D_2 \sin \Omega t, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \xi x^2 = 2 \xi xy - \lambda \xi x^2, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \xi xy = -(\gamma + \lambda) \xi xy - \omega^2 \xi x^2 + \xi y^2 - \omega^2 \lambda D_1 x^2 + A_0 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} \sin \Omega t x, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \xi y^2 = -(\gamma + \lambda) \xi y^2 - 2\omega^2 \xi xy - 2\omega^2 \lambda D_1 xy + 2A_0 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} \sin \Omega t y. \quad (18)$$

这样, 方程(12)–(18)就构成了含 8 个未知函数  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ ,  $\xi xy$ ,  $\xi x^2$ ,  $x\eta$ ,  $\gamma y$  和  $\xi y^2$  的微分方程组. 其中方程(14)和(15)可以化简为一个关于  $x\eta$  的二阶微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2} x\eta + (\gamma + 2\lambda) \frac{d}{dt} x\eta + (\omega^2 + \lambda\gamma + \lambda^2) x\eta = \lambda(-\omega^2 k \sqrt{D_1 D_2} x + A_0 D_2 \sin \Omega t), \quad (19)$$

其中  $x$  的表达式可由(10)式来确定.

同样, 将方程(12)–(13)–(16)–(17)–(18)合并化简为关于  $\xi x^2$  和  $x^2$  的两个三阶微分方程

$$\frac{d^3}{dt^3} x^2 + 3\gamma \frac{d^2}{dt^2} x^2 + \chi(\gamma^2 + 2\omega^2) \frac{d}{dt} x^2 + 4\omega^2 \gamma x^2 = -4\omega^2 \frac{d}{dt} \xi x^2 + 6A_0 \sin \Omega t \frac{d}{dt} x\eta - \chi(2\gamma + \lambda)\omega^2 \xi x^2 + 2A_0[\Omega \cos \Omega t + \chi(\gamma + \lambda) \sin \Omega t] x\eta, \quad (20)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \xi x^2 + \chi(\gamma + \lambda) \frac{d^2}{dt^2} \xi x^2 + (3\lambda^2 + 6\gamma\lambda + 2\gamma^2 + 4\omega^2) \frac{d}{dt} \xi x^2 + [(2\gamma + \lambda)(\lambda^2 + \lambda\gamma + 2\omega^2) + 2\omega^2 \lambda] \xi x^2 = -4\omega^2 \lambda D_1 \frac{d}{dt} x^2 + 2A_0 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} \sin \Omega t \frac{d}{dt} x - \chi(2\gamma + \lambda)\omega^2 \lambda D_1 x^2 + 4A_0 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} \sin \Omega t y + \chi(2\gamma + \lambda)A_0 k \lambda \sqrt{D_1 D_2} \sin \Omega t x. \quad (21)$$

通过求解微分方程(19)–(20)–(21)可得  $x^2$  的表达式. 由于得到的解具有非常复杂的形式, 所以仅给出当  $t \rightarrow +\infty$  时  $x^2$  的极限表达式. 由 2.1 节的计算可知,  $x$  由  $x_0$  和  $x_A$  两部分组成, 而  $x_0$  仅当条件(4)满足时才是稳定的, 故此处仅在条件(4)满足的前提下进行讨论. 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 由于  $x_0 \rightarrow 0$ , 故有  $x = x_A = A \sin(\Omega t + \phi)$  和  $y = dx/dt = A\Omega \cos(\Omega t + \phi)$  同时成立. 这样, 二阶平稳矩的表达式  $x^2_{st}$  为

$$x^2_{st} = \frac{A_0 \lambda \{A_0 D_2 b_1 (\omega^2 + b_2) - A \omega^2 k \sqrt{D_1 D_2} \cos \phi [\omega^2 b_1 + (2b_1 + \gamma) b_2]\}}{2\omega^2 b_2 [\gamma (\omega^2 + b_2) - \omega^2 \lambda D_1 (b_1 + \gamma)]}, \quad (22)$$

其中  $b_1 = \lambda + \gamma$ ,  $b_2 = \lambda\gamma + \omega^2 + \lambda^2$ ,  $A$  和  $\phi$  同(11)式定义.

当系统(1)中的有色噪声(2)退化为白噪声(5)时,相应系统的二阶平稳矩  $x^2_{wst}$  为

$$x^2_{wst} = \frac{A_0^2 D_2}{\omega^2 (\gamma - 2\omega^2 D_1)}. \quad (23)$$

由(23)式可见,在白噪声激励情况下,当  $\gamma < 2\omega^2 D_1$  时,系统相应的二阶矩变得不稳定.此外,  $x^2_{wst}$  是白噪声强度  $D_1$  和  $D_2$  的单调函数,故在白噪声激励下,此线性系统不存在随机共振现象.

### 3. 讨论和数值结果

(11)式和(22)式给出了系统(1)和(2)的一阶和二阶矩的解析表达式,下面我们讨论噪声和系统参数对随机共振的影响并对原系统进行数值模拟.

#### 3.1. 讨论

图1描述了系统响应振幅  $A$  作为乘性噪声强度  $D_1$  的函数,随着不同的阻尼系数  $\gamma$  变化的情况.  $A$  随着  $D_1$  的增大出现一个共振峰,呈现传统的随机共振,该现象在噪声和信号以相加方式引入的线性系统<sup>[9]</sup>是观察不到的.在图1中,  $A$  随着  $\gamma$  的增加而减小,系统阻尼使响应减弱,符合物理直观.图2给出了系统响应振幅  $A$  作为周期激励频率  $\Omega$  的函数,随着不同的系统固有频率  $\omega$  变化的曲线.当  $\omega = 0.3$  和  $\omega = 1.3$  时,  $A$  随着  $\Omega$  的增大单调递减,没有共振现象出现.当  $\omega = 0.5$  和  $\omega = 1$  时,  $A$  随着  $\Omega$  的增大出现一个共振峰,并且峰值的位置随着  $\omega$  的不同而变化,即只有当  $\omega$  和  $\Omega$  之间满足某种特定的关系时,  $A$  才能达到最大值,该现象类似于线性振子在简谐激励下发生的共振,本文称其为“真实”的随机共振.同时,峰值的高度随  $\omega$  的增大而增大.

图3描述了系统响应幅值  $A$  作为噪声相关时间  $\tau$  的函数,随着不同的噪声之间的关联系数  $k$  变化的情况.  $A$  随着  $\tau$  增加出现一个单峰,出现了广义随机共振.同时,  $A$  随着  $k$  的增加而增大,即两个色噪声之间的相关性越强,系统响应越强.图4给出了系统响应振幅  $A$  作为噪声相关率  $\lambda$  的函数,随着不

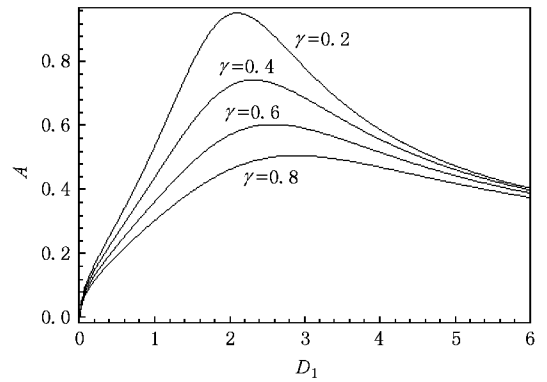


图1  $A$  作为  $D_1$  的函数随  $\gamma$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, \omega = 1, D_2 = 2, k = 0.5, \Omega = 0.5, \lambda = 2$ )

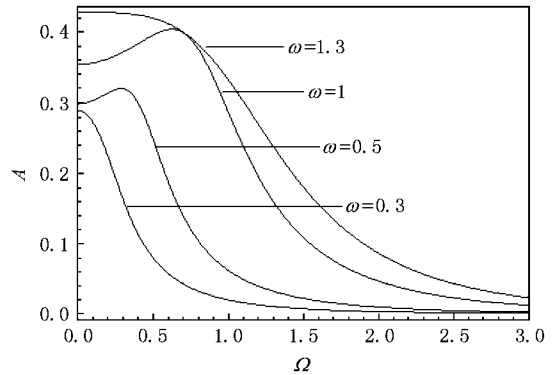


图2  $A$  作为  $\Omega$  的函数随  $\omega$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, D_1 = 1, D_2 = 2, k = 0.5, \gamma = 0.5, \lambda = 2$ )

同的噪声强度比率  $R$  变化的曲线,其中  $R = D_1/D_2$  为乘性噪声强度和调制噪声强度的比值.当  $R = 0.5$  时,  $A$  随着  $\lambda$  的增大出现一个单峰,是广义随机共振现象.当  $R = 1$  和  $2$  时,  $A$  随着  $\lambda$  的增大出现两个峰值,即随机多共振现象.

图5描述了二阶平稳矩  $x^2_{st}$  作为激励频率  $\Omega$  的函数随噪声之间的关联系数  $k$  变化的情况.值得注意的是,  $x^2_{st}$  随着  $\Omega$  增加出现两个极值.首先,随着  $\Omega$  增加,  $x^2_{st}$  逐渐减小达到一个极小值,形成了一个抑制平台,呈现抑制现象.然后,随着  $\Omega$  继续增加,  $x^2_{st}$  逐渐增加达到一个极大值,出现广义随机共振现象.因此,二阶平稳矩非单调依赖于激励频率.图6给出二阶平稳矩  $x^2_{st}$  作为噪声相关时间  $\tau$  的函数,随着调制噪声强度  $D_2$  变化的情况.由图6

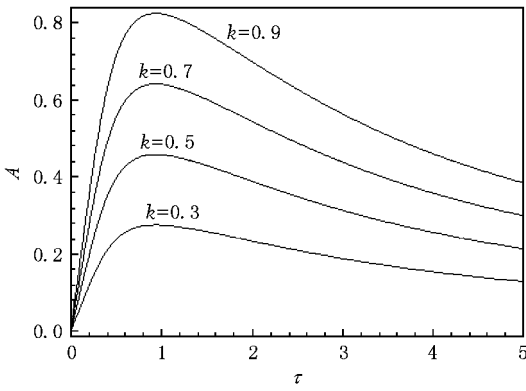


图3 A 作为  $\tau$  的函数随  $k$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, \omega = 1, D_1 = 1, D_2 = 2, \Omega = 0.5, \gamma = 0.5$ )

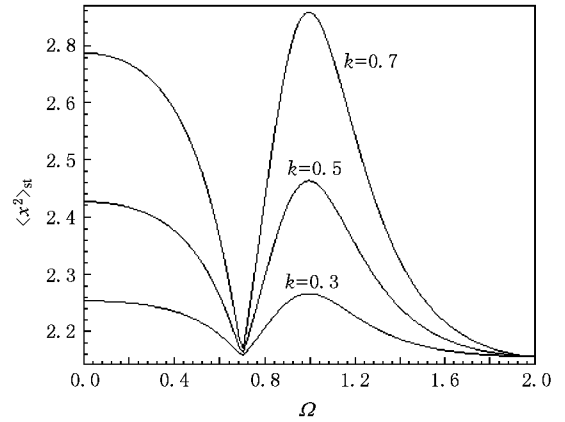


图5  $\langle x^2 \rangle_{st}$  作为  $\Omega$  的函数随  $k$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, \omega = 1, D_1 = 0.5, D_2 = 1, \gamma = 0.4, \lambda = 1$ )

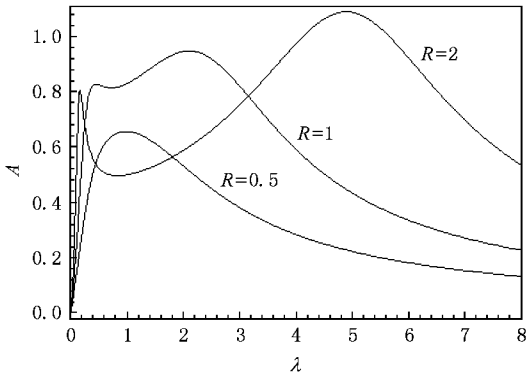


图4 A 作为  $\lambda$  的函数随  $R$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, \omega = 1, k = 0.5, D_2 = 2, \Omega = 0.5, \gamma = 0.2$ )

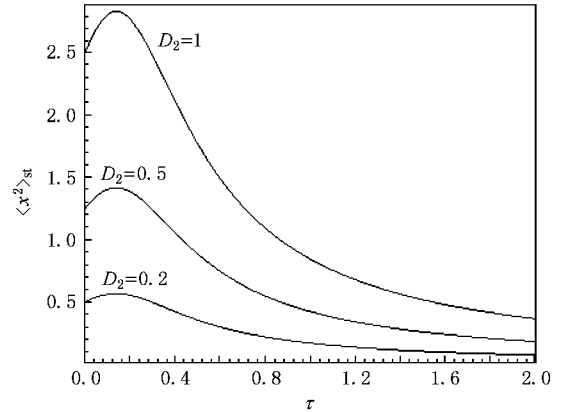


图6  $\langle x^2 \rangle_{st}$  作为  $\tau$  的函数随  $D_2$  变化的曲线 ( $A_0 = 1, \omega = 1, D_1 = 0.5, \Omega = 0.5, \gamma = 0.7, k = 0.2$ )

可见,  $x^2_{st}$  为  $\tau$  的非单调函数, 出现了一个共振峰, 这是广义随机共振现象. 同时,  $x^2_{st}$  随着  $D_2$  的增加而增大, 故适当增大信号调制噪声强度可以提高系统响应.

### 3.2. 数值模拟

为了检验理论结果的有效性, 有必要给出数值模拟结果. 首先, 根据(2)式引入色噪声  $\zeta(t) = \eta(t) - k\sqrt{D_2/D_1}\xi(t)$  则有

$$\zeta(t) = 0,$$

$$\zeta(t)\zeta(t') = \frac{D_2}{\tau}(1 - k^2)\exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau}\right) \quad (24)$$

在上面的变换下, 方程(1)可以等价地写成下述形式:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2[1 + \xi(t)]x = A_0 \sin(2\pi f_s t) \cdot \left[ \zeta(t) + k\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\xi(t) \right], \quad (25)$$

由于  $\xi(t)\zeta(t') = \zeta(t)\xi(t') = 0$ , 方程(25)中的色噪声  $\xi(t)$  和  $\zeta(t)$  不相关, 可通过两个具有常强度的 Ornstein-Uhlenbeck 噪声的微分方程来描述<sup>[19, 20]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(t)}{dt} &= -\frac{\zeta(t)}{\tau} + \frac{p(t)}{\tau}, \\ \frac{d\xi(t)}{dt} &= -\frac{\xi(t)}{\tau} + \frac{q(t)}{\tau}. \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $p(t)$  和  $q(t)$  为均值为零的高斯白噪声, 且

$$\begin{aligned} p(t)p(t') &= \mathcal{X}(1 - k^2)D_2\delta(t - t'), \\ q(t)q(t') &= 2D_1\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (27)$$

利用欧拉法对系统方程(25)(26)(27)进行数值积分. 在积分过程中, 通过 Box-Muller 算法和一伪随机数发生器而产生高斯白噪声. 利用欧拉法可以得到时间序列的数值解, 然后对时间序列作快速傅里叶变换, 可得系统响应的功率谱. 计算中, 积分步长取为  $h = 0.02$ , 采样频率  $F_s = 10$ , 用 Matlab 功率谱

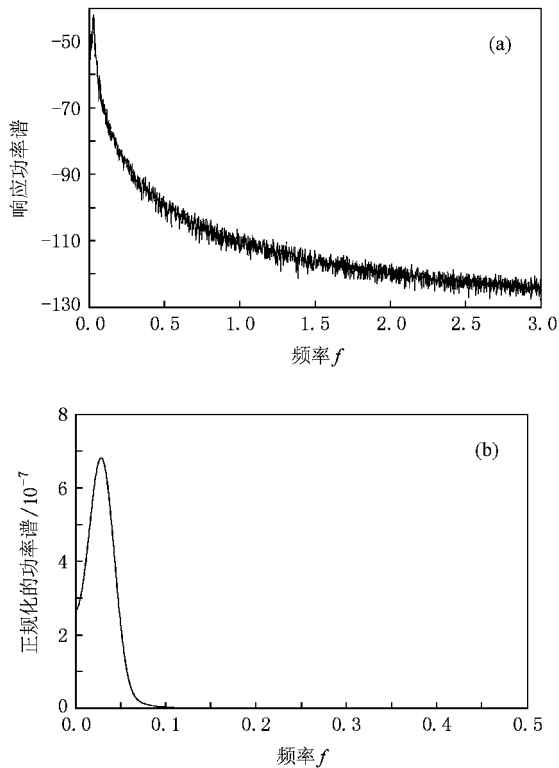


图 7 系统(1)的响应功率谱 (a) 响应功率谱 (b) 正规化后实际功率谱图 ( $A_0 = 1, \omega = 1, D_1 = 0.5, D_2 = 1, f_s = 0.16, \gamma = 0.4, \lambda = 1$ )

函数  $P_{\text{welch}}^{[21]}$  并经过窗函数正规化处理得到图 7

(a). 图 7 (b) 是通过图 7 (a) 的功率谱图作正规化处理得到的实际功率谱图, 其中图 7 中参数的取值与图 5 相同. 在图 7 (a) 中, 频率  $f = 0.03$  处有一针状尖峰, 验证了在随机色噪声参数激励的线性系统中加入周期信号调制噪声可激发随机共振现象. 图 7 (b) 反映了实际功率谱谱峰高度和形状, 显见在  $f = 0.03$  处有一单峰出现.

## 4. 结 论

本文研究了随机噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下的线性阻尼振子的随机共振问题, 推导出系统响应的一阶和二阶矩的解析表达式, 并讨论了噪声和系统参数对系统响应及随机共振的影响, 发现了三种不同形式的随机共振. 与以往研究局限于过阻尼和绝热近似理论的结果不同, 本文得到的理论结果适合于任意大小的线性粘性阻尼和激励幅值, 从而拓展了随机共振理论研究的范围. 需要指出的是, 仅当乘性噪声强度、噪声相关率和系统频率之间满足条件 (4) 时, 系统的一阶和二阶矩才是稳定的. 因此, 文中仅讨论了稳定情形.

虽然在过阻尼条件下, 线性和非线性系统随机共振的研究已取得许多进展, 但对于欠阻尼和任意阻尼条件下的研究尚不充分, 有待于进一步的研究.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453  
 [2] Nicolis C, Nicolis G 1981 *Tellus* **33** 225  
 [3] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626  
 [4] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030  
 [5] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海: 上海科技出版社)]  
 [6] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223  
 [7] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161  
 [8] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494  
 [9] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309  
 [10] Dykman M I, Luchinsky D G, McClintock P V E, Stein N D 1992 *Phys. Rev. A* **46** R1713  
 [11] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1217  
 [12] Jin Y F, Xu W, Xu M, Fang T 2005 *J. Phys. A* **38** 3733

[13] Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、李 伟、徐 猛 2005 物理学报 **54** 2562]  
 [14] Wang F Z, Wen X D, Li R, Qin G R 1996 *Journal of Beijing Normal University* **32** 47 (in Chinese) [王辅忠、温孝东、李 蓉、秦光戎 1996 北京师范大学学报 **32** 47]  
 [15] Kang Y M, XU J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 802]  
 [16] Van Kampen N G 1992 *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland)  
 [17] Shapiro J H, Logvinov V M 1978 *Physica A* **91** 563  
 [18] Jin Y F, Hu H Y 2007 *Transactions of Nonlinear Science and Complexity* **1** 144  
 [19] Fox R F, Gatland I R, Roy R, Vemuri G 1988 *Phys. Rev. A* **38** 5938  
 [20] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys. Lett.* **13** 1201  
 [21] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 396 (in Chinese) [肖方红、闫桂荣、韩雨航 2004 物理学报 **53** 396]



# Stochastic resonance of a damped linear oscillator<sup>\*</sup>

Jin Yan-Fei<sup>1</sup>† Hu Hai-Yan<sup>1</sup>‡

<sup>1</sup> *Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

<sup>2</sup> *Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

( Received 1 October 2008 ; revised manuscript received 6 November 2008 )

## Abstract

The stochastic resonance is studied for a damped linear oscillator subject to both parametric excitation of random noise and external excitation of periodically modulated random noise. By means of the Shapiro-Loginov formula, the expressions of the first-order and the second-order moments are obtained for the system response. It is found that there exist conventional stochastic resonance, bona fide stochastic resonance and stochastic resonance in a broad sense in the system. When the noise intensity ratio  $R \geq 1$ , the stochastic multi-resonance is found in the system. Moreover, the numerical results of power spectrum density of system response are presented to verify the analytic results.

**Keywords** : stochastic resonance, periodically modulated noise, damped linear oscillator

**PACC** : 0540

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10532050, 10702025 and 10672074 ), the Excellent Young Scholars Research Fund of Beijing Institute of Technology ( Grant No. 2008Y0175 ) and Beijing Municipal Commission of Education Project ( Grant No. 20080739027 ).

† E-mail : jinyf@bit.edu.cn