

基于符号动力学的耦合映像格子系统的初值估计*

沈民奋^{1)†} 林兰馨¹⁾ 李小艳¹⁾ 常春起²⁾

¹⁾ 汕头大学工学院, 汕头 515063)

²⁾ 香港大学电子工程系, 香港)

(2008 年 6 月 28 日收到, 2008 年 11 月 3 日收到修改稿)

在符号动力学的基础上, 深入探讨了基于动力学符号序列的局部耦合映像格子系统求逆问题. 在理论上系统地分析耦合映像系统初值估计的性能与耦合系数及映射函数之间的数学关系, 证明相空间 I^M 上的任意取值通过基于符号向量序列的迭代过程并不一定收敛至初值, 其敛散性与耦合强度和映射函数的选择有直接关系. 同时证明了混沌或其拓扑共轭的逆不一定为压缩映射, 其总体的敛散性与整个迭代过程中的收敛与发散的强度对比有关. 理论分析与数值实验结果完全一致, 说明本文提出的耦合映像格子系统初值估计问题的分析与算法是正确的. 全面深入探讨了基于符号动力学估计耦合映像系统初值的可行性条件, 为更好地分析和刻画实际模型的物理过程提供了重要的理论依据与实验结果.

关键词: 耦合映像格子, 符号动力学, 初值估计

PACC: 0545

1. 引 言

耦合映像格子(coupled map lattices, CML)是一种在时间域和空间域离散、状态域连续的动力学系统, 是研究非线性系统时空行为的一种重要模型^[1]. 该模型将低维混沌单元按全局耦合、双向耦合、单向耦合等方式耦合而成的特殊高维混沌系统, 即时空混沌系统^[2]. CML 作为研究时空混沌现象的有效模型, 已有研究表明这类模型可以再现物理、化学、以及生物系统等时空系统中扰动的本质特征^[3-4]. 在经济学、生物医学、气象预报、地震预报、神经网络和保密通信等领域都得到了广泛的应用和推广^[5-8].

CML 的提出大大简化了对时空混沌现象的认识和研究, 而符号动力学的提出则更进一步简单化了模型. 符号动力学把系统的相空间进一步粗粒化, 对不同的分割区域用不同的符号表示, 从而得到结构更为简单的符号序列. 符号动力学方法已经成为理解和分析混沌现象的一个有效途径. 目前, 已经提出基于符号动力学的符号熵来刻画信息量的大小^[9, 10] 以及利用动力学符号序列确定混沌系统的伪随机特性^[11]和 CML 的各态历经性等^[12].

符号动力学理论在混沌系统中的研究已经得到广泛的重视, 尤其是在利用符号序列进行系统求逆的研究方面^[13-18]. Ling 等人根据符号序列与混沌系统初始条件之间的关系为混沌信号的估计提出了基于符号动力学的算法^[13], 并以 Logistic 映射为例证明了符号序列与初值之间是一一对应的关系, 充分讨论了一维混沌系统中估计初始条件的情形. 该算法计算效率高, 并且具有较好的普适性. 然而, 自然界许多实际物理系统和工程应用领域中存在大量的时空混沌现象. 针对这一情况, 人们开始研究时空混沌系统的求逆问题. 文献^[14]提出在忽略各格点间耦合作用的前提下恢复初始条件的统计特性, 在此基础上文献^[15]进一步研究了弱耦合条件下并采用时变映射系数恢复信号初始值的统计特性. 这一系列的研究使基于符号动力学的 CML 初值估计问题取得了有益的结果. 然而, 这些方法都只能恢复整个 CML 系统格点初值的统计特性, 在实际应用中更需要知道 CML 系统中各格点的具体初值. 王开等人探讨了符号向量序列的局部 CML 求逆问题^[17], 利用混沌或其拓扑共轭的逆映射一定为压缩映射这一前提条件, 证明在相空间 I^M 任意取值通过基于符号向量序列的 CML 系统迭代过程必然收敛至初值. 然

* 国家自然科学基金(批准号: 60571066 和 60271023)和广东省自然科学基金重点项目(批准号: 5008317)资助的课题.

† E-mail: mfishen@stu.edu.cn

而,混沌或其拓扑共轭的逆映射一定为压缩映射这一结论并没有经过严格的证明和充分论证,此外,由于没有进一步探讨系统耦合系数及映射函数对迭代过程的敛散性影响,给出的结论是否对所有参数都成立还需要进一步研究.针对这些情况,本文全面讨论局部 CML 系统迭代过程的敛散性与系统耦合系数及映射函数之间的关系,在理论上证明了系统敛散性与耦合系数之间的关系,并重点研究了映射函数分别为 Logistic 映射和 Tent 映射时系统的初值估计性能.本文理论及数值仿真结果均表明: CML 迭代过程并非必然收敛至初值.究其原因,是因为不同的耦合系数对迭代过程的敛散性具有关键性作用,此外,不同的映射函数在初值的估计性能上仍存在差异.本文全面深入地探讨了基于符号动力学估计 CML 系统初值的可行性条件,为更好地分析和刻画实际模型的物理过程提供了理论依据与实验结果.

2. 模型与方法

一个典型的 M 格点局部 CML 模型可描述如下^[1]:

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \frac{\epsilon}{2}[f(x_n^{i-1}) + f(x_n^{i+1})]. \quad (1)$$

边界条件选取为开放边界条件,即

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= (1 - \epsilon)f(x_n^1) + \epsilon f(x_n^2), \\ x_{n+1}^M &= \epsilon f(x_n^{M-1}) + (1 - \epsilon)f(x_n^M), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, M$ 表示格点位置, M 表示格点数目, n 表示时间,这里等价于迭代步数; ϵ 表示耦合系数,映射函数 $f: I \rightarrow I$ 已知, I 为相空间.假设 $E = \{E_0, E_1, \dots, E_{q-1}\}$ 是相空间 I 内有限个不相交的集合,即 $\bigcup_{i=0}^{q-1} E_i = I, E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$.假定在 n 时刻相空间点 x_n^i 落在第 j 个符号区间,定义一个符号 $s_n^i = j, j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.则在 n 时刻,不同格点处产生符号向量 $s_n = [s_n^1, s_n^2, \dots, s_n^M]^T$,而(1)式从 0 时刻出发的轨道可以由符号向量序列 $\{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ 完全描述.

对于一个格点数为 $M (M \geq 2)$ 的 CML 系统,令 $x_n = [x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^M]^T, f(x_n) = [f(x_n^1), f(x_n^2), \dots, f(x_n^M)]^T$,则(1)式可简写为 $x_{n+1} = A \circ f(x_n)$,其中 A 为系统耦合矩阵,其对角线上元素为 $1 - \epsilon$,与主对角元素相邻的则为 $\epsilon/2$ (第一行与第 M 行除外),

其余为 0.当 $|A| \neq 0$,系统耦合矩阵 A 可逆,并有 $f(x_n) = A^{-1}(x_{n+1})$.又由于映射 f 在符号区间上均为单调函数,分别存在逆映射,所以有 $x_n = f_{s_n}^{-1}$.

$A^{-1}(x_{n+1})$,令 $H_{s_n}^{-1} = f_{s_n}^{-1} \circ A^{-1}$,则有

$$x_n = f_{s_n}^{-1} \circ A^{-1}(x_{n+1}) = H_{s_n}^{-1}(x_{n+1}), \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & \epsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \epsilon/2 & 1 - \epsilon & \epsilon/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon/2 & 1 - \epsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon & 1 - \epsilon \end{pmatrix}_{M \times M}. \quad (4)$$

由于 $f_{s_n}^{-1}$ 和 A^{-1} 已知,理论上我们可以通过(3)式精确恢复初值,但由于计算机的有限精度效应,在逆向计算的过程中将存在量化误差以及不可避免的噪声污染.若映射 $H_{s_n}^{-1}$ 是压缩映射(contraction map, 又称收敛映射),则我们能够克服这些量化误差及噪声并最终恢复初值;但若 $H_{s_n}^{-1}$ 是发散的,则细微的扰动会随着迭代次数的增加不断扩大最终变得与初值毫不相关,无法估计初值.

定理 1 压缩映射定理(contraction mapping theorem)

设 (X, d) 是一个完备的度量空间, $T: X \rightarrow X$ 具有性质

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), 0 < k < 1,$$

T 是压缩映射.则 T 在 X 中恰有一个不动点,设这个不动点为 \bar{x} ,则对于任何初始点 $x_0 \in X$,逐次迭代点列 $x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots$,收敛于 \bar{x} .

为了下面描述方便,我们将 $d(T(x_n), T(y_n)) = k_n d(x_n, y_n)$ 中的 k_n 称为敛散因子.当 $0 < k_n < 1$ 时, k_n 称为收敛因子,同时称映射 T 在第 n 次迭代中是收敛的;当 $k_n \geq 1$ 时, k_n 称为发散因子,同时称映射 T 在第 n 次迭代中是发散的.那么,若对于任意的 n ,有 $0 < k_n < 1$,则映射 T 是压缩映射.令 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}, Q = \{q_1, q_2, \dots, q_j\}$,且 $P \cup Q = \mathbf{N}, P \cap Q = \emptyset$.若对于 $n \in P$,有 $0 < k_n < 1$,而对于 $n \in Q$ 有 $k_n \geq 1$,那么映射 T 既存在收敛区,又存在发散区,当整体收敛强度远大于发散时,则称映射 T 是总体收敛的;当整体发散强度远大于收敛时,则称映射 T 是总体发散的.

当 $H_{s_n}^{-1}$ 是压缩映射,可以得到初值的估计^[17]

$$\hat{x}(0 | L) = \lim_{L \rightarrow \infty} H_s^{-L}(\eta) = x_0. \quad (5)$$

当 $H_{s_n}^{-1}$ 不是压缩映射,但总体收敛时,同样可以得到初值的估计

$$\hat{x}(0 | L) = \lim_{L \rightarrow \infty} H_s^{-L}(\eta) = x_0 + \mu, \quad (6)$$

其中 μ 为无穷小的数,其值的大小与收敛和发散之间的强弱对比及收敛发散出现的概率有关.

王开等人根据压缩映射的定义,由混沌或其拓扑共轭的逆映射一定为压缩映射,以及耦合系数矩阵 A 的逆矩阵的无穷范数(又称行和范数)恒为 1 这两个条件得出映射 $H_{s_n}^{-1}$ 为压缩映射^[17].实际上,混沌或其拓扑共轭的逆映射一定为压缩映射这一结论并没有严格的理论依据,同时耦合系数矩阵 A 的逆矩阵的无穷范数恒为 1 这一结论并不准确,因此 $H_{s_n}^{-1}$ 是否为压缩映射需要重新考虑.再者,在 $H_{s_n}^{-1}$ 不是压缩映射的情况下,我们通过考查 $H_{s_n}^{-1}$ 的总体敛散性以衡量 CML 初值估计是否可行.

3. 敛散性的研究

下面将着重讨论 $H_{s_n}^{-1}$ 的敛散性.由于 $H_{s_n}^{-1}$ 是由 $f_{s_n}^{-1}$ 和 A^{-1} 联合决定.我们首先分别对这两个函数的敛散性进行讨论,再探讨 $H_{s_n}^{-1}$ 的整体敛散性.

3.1. 耦合矩阵的逆矩阵的敛散性

对于任意 $x_n, y_n \in I^M$, 其中 $x_n = [x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^M]^T$, $y_n = [y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^M]^T$, 定义相空间 I^M 上的向量范数为无穷范数

$$d(x_n, y_n) = \|x_n - y_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} |x_n^i - y_n^i|. \quad (7)$$

当 $|A| \neq 0$ 时,令 $A^{-1} = (a_{ij})_{M \times M}$, 定义 A^{-1} 的范数为无穷范数,即 $\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} (\sum_{j=1}^M |a_{ij}|)$, 同时令 $x'_n = A^{-1} \times x_n = (\xi_n^1, \xi_n^2, \dots, \xi_n^M)^T$, $y'_n = A^{-1} \times y_n = (\zeta_n^1, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^M)^T$ 则

$$\begin{aligned} d(x'_n, y'_n) &= \|A^{-1} \times x_n - A^{-1} \times y_n\|_\infty \\ &\leq \|A^{-1}\|_\infty \max_{1 \leq i \leq M} |x_n^i - y_n^i| \\ &= \|A^{-1}\|_\infty d(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (8)$$

同时,对于 $A^{-1} = (a_{ij})_{M \times M}$, 恒有 $\sum_{j=1}^M a_{ij} = 1$ 则

$$\begin{aligned} d(x'_n, y'_n) &= \|A^{-1} \times x_n - A^{-1} \times y_n\|_\infty \\ &\geq \|x_n - y_n\|_\infty = d(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (9)$$

综上得

$$d(x_n, y_n) \leq d(x'_n, y'_n) \leq \|A^{-1}\|_\infty d(x_n, y_n). \quad (10)$$

王开等人认为^[17],对于所有耦合系数,都有 $\|A^{-1}\|_\infty = 1$.然而,事实上耦合系数为 0.5 和 1 时,耦合系数矩阵 A 是奇异矩阵,不存在逆矩阵;同时当 A 为非奇异矩阵时,只有当耦合系数为 0 时, $\|A^{-1}\|_\infty = 1$, 否则 $\|A^{-1}\|_\infty > 1$. 图 1(a)所示为 $\|A^{-1}\|_\infty$ 在不同的耦合系数条件下的计算结果.由图 1(a)可知对于不同格点数的系统其 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的最小值都出现在 $\epsilon = 0$ 的时候.随着耦合系数在 0 到 0.4 之间的增加, $\|A^{-1}\|_\infty$ 也随着单调缓慢增加.当耦合系数处于 0.4 到 0.5 之间时, $\|A^{-1}\|_\infty$ 随着耦合系数的增大而迅速增大.耦合系数大于 0.5 时, $\|A^{-1}\|_\infty$ 受系统格点数的影响非常大,变化十分不规律.图 1(b)给出了耦合系数在 $[0, 0.4]$ 之间 $\|A^{-1}\|_\infty$ 与系统规模 M 之间的关系,实验结果表明

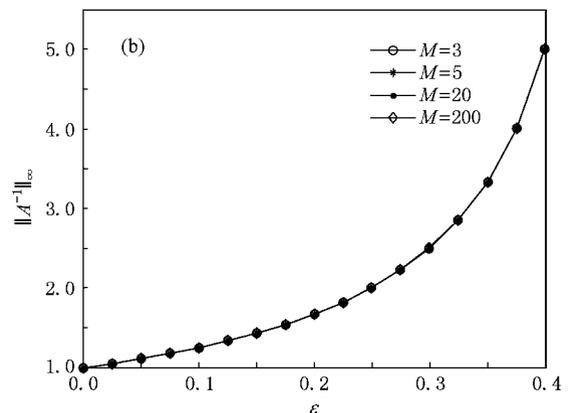
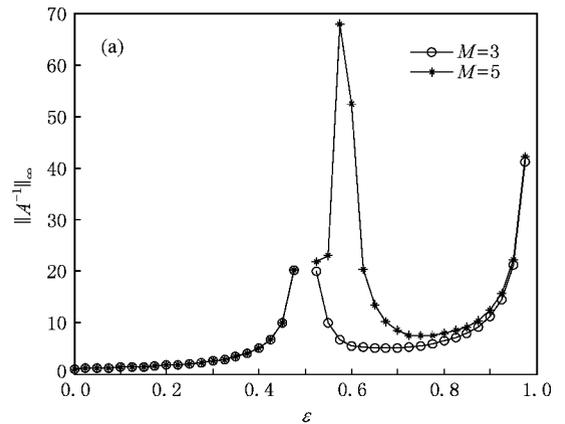


图 1 A 逆的范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 与耦合系数 ϵ 、耦合系统规模(格点数目 M)之间的关系 (a)所示为 $\|A^{-1}\|_\infty$ 在不同的耦合系数条件下的计算结果 (b)给出了耦合系数 $[0, 0.4]$ 时, $\|A^{-1}\|_\infty$ 与 M 之间的具体关系

在相同的耦合系数条件下, $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的值与 M 无关. 由此可见, 当耦合系数小于 0.5 时, M 对 A^{-1} 的敛散性毫无影响.

综合图 1(a)(b) 可知, 对于所有耦合参数都有 $\|A^{-1}\|_{\infty} \geq 1$. 并由(9)式得 $d(A^{-1} \times x_n, A^{-1} \times y_n) \geq d(x_n, y_n)$. 根据压缩映射定理, A^{-1} 并非是一个压缩映射, 相反它是一个发散的映射.

3.2. 混沌映射的逆映射的敛散性

3.2.1. Logistic 映射的逆映射的敛散性

下面讨论混沌映射的逆映射的敛散性. 首先研究 Logistic 映射的逆映射 $f_{LS_n}^{-1}$ 的敛散性. 映射形式采用单峰满 Logistic 映射 $f_L(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$, 求得其相空间 I^M 的逆映射为

$$f_{LS_n}^{-1}(x_n) = [1 + (2s_{n-1} - 1)\sqrt{1 - x_n}] / 2 \quad (11)$$

x_n 和 y_n 属于度量空间 (I^M, d) 上的两个点, 根据(7)式度量的定义考察 Logistic 逆映射的敛散性:

$$\begin{aligned} & d(f_{LS_n}^{-1}(x_n), f_{LS_n}^{-1}(y_n)) \\ &= \max_{1 \leq i \leq M} |(\sqrt{1 - x_n^i} - \sqrt{1 - y_n^i}) / 2| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq M} [1/2 (2|\sqrt{1 - x_n^i} + \sqrt{1 - y_n^i}|)] d(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{令 } k_{f_{LS_n}^{-1}}(n) = \max_{1 \leq i \leq M} [1/2 (2|\sqrt{1 - x_n^i} + \sqrt{1 - y_n^i}|)].$$

假设当 $i = p$ 时, $1/2 (2|\sqrt{1 - x_n^i} + \sqrt{1 - y_n^i}|)$ 达到最大, 即 $k_{f_{LS_n}^{-1}}(n) = 1/2 (2|\sqrt{1 - x_n^p} + \sqrt{1 - y_n^p}|)$. 当

$|\sqrt{1 - x_n^p} + \sqrt{1 - y_n^p}| > 1/2$ 时, $k_{f_{LS_n}^{-1}}(n) < 1$, $f_{LS_n}^{-1}$ 在本次迭代中是压缩的. 而当 $|\sqrt{1 - x_n^p} + \sqrt{1 - y_n^p}| <$

$1/2$ 即 $k_{f_{LS_n}^{-1}}(n) > 1$, 由于(12)式中 $d(f_{LS_n}^{-1}(x_n),$

$f_{LS_n}^{-1}(y_n))$ 与 $k d(x_n, y_n)$ 的关系为小于等于, 而不是等于, 根据压缩映射定理的定义, 并不能由此确定 $f_{LS_n}^{-1}$ 在本次迭代中是发散的, 从而无法从数学角度确定 Logistic 逆映射在迭代过程中是否存在发散的情况. 因此我们从物理的角度出发, 考查 Logistic 逆映射的敛散性. 以斜率为 ± 1 作 Logistic 映射的切线, 从图 2 可以看到, $x \in (0.375, 0.625)$ 时, $\Delta x \geq \Delta y$, 那么在 Logistic 求逆过程中, 必然存在发散区间. 因此我们可由此确定 Logistic 逆映射迭代过程中一定存在发散的情况. 图 3 曲线所示为 $|\sqrt{1 - x_n^p} + \sqrt{1 - y_n^p}| = 1/2$

的函数曲线. 在曲线的内部, 即白色区域, $|\sqrt{1 - x_n^p} + \sqrt{1 - y_n^p}| > 1/2$, 是 Logistic 逆映射的收敛区; 对于曲线的外部, 虽然不能确定整个灰色区域是发散区, 但由前面分析可知, 在灰色区域内必然存在发散区.

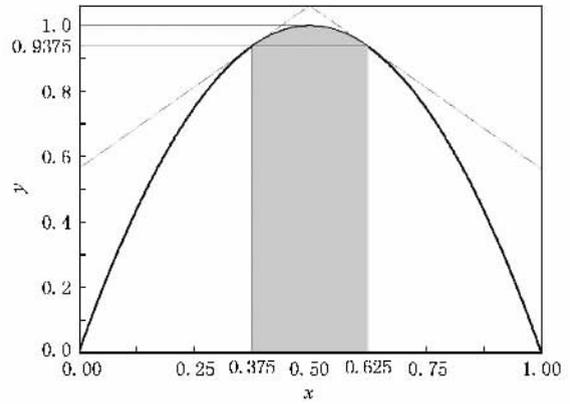


图 2 Logistic 映射特征分析(在阴影区域, $\Delta x \geq \Delta y$; 在白色区域 $\Delta x < \Delta y$)

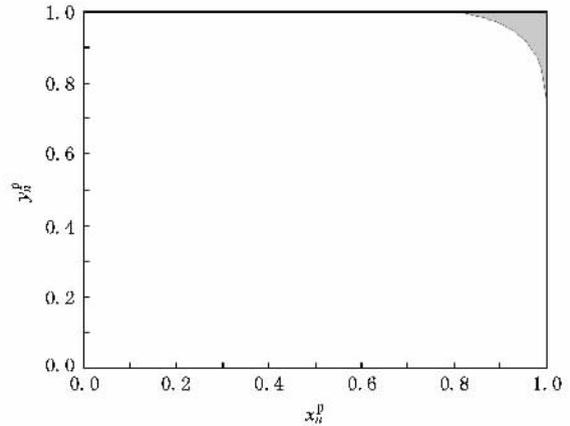


图 3 Logistic 逆映射的敛散区分析图

由图 2、3 可以看出, 虽然 Logistic 逆映射的相空间的大部分区域内是收敛的, 但依然存在发散区. 因此我们可以得到结论: 由于存在发散区, Logistic 映射的逆映射并不是压缩映射; 但由于其在逆迭代过程中收敛占绝对优势, 因此它是总体收敛的, 同时存在局部发散. 由此可见, 王开等人提出混沌或其拓扑共轭的逆映射一定为压缩映射这一结论是不正确的. 对于不同的映射, 其逆映射是否为压缩映射还需要分别进行有针对性的研究.

3.2.2. Tent 映射的逆映射的敛散性

下面研究 Tent 映射的逆映射的敛散性. Tent 映

射函数形式采用 $f_T(x_n) = 1 - 2|x_n - 1/2|$, 则其在相空间 I^M 的逆映射为 $f_{Ts_n}^{-1}(x_n) = 1/2 + (2s_{n-1} - 1)(1 - x_n)/2$. 同样采用无穷范数来定义度量:

$$d(f_{Ts_n}^{-1}(x_n), f_{Ts_n}^{-1}(y_n)) = 1/2 d(x_n, y_n). \quad (13)$$

从 (13) 式可以看到, Tent 映射的逆映射为压缩映射, 并不存在任何发散的情况.

3.3. 整个求逆系统的敛散性

3.3.1. 以 Logistic 为映射的整个求逆系统的敛散性

结合 Logistic 映射的逆映射 $f_{Ls_n}^{-1}$ 及 A^{-1} 映射的敛散性分析, 现在讨论整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 的敛散性, 则有

$$\begin{aligned} & d(H_{Ls_n}^{-1}(x_n), H_{Ls_n}^{-1}(y_n)) \\ &= d(f_{Ls_n}^{-1}(x'_n), f_{Ls_n}^{-1}(y'_n)) \\ &= \max_{1 \leq i \leq M} |(\sqrt{1 - \xi_n^i} - \sqrt{1 - \zeta_n^i})/2| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq M} [1(2|\sqrt{1 - \xi_n^i} + \sqrt{1 - \zeta_n^i}|)] d(x'_n, y'_n) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq M} [1(2|\sqrt{1 - \xi_n^i} + \sqrt{1 - \zeta_n^i}|)] \\ &\quad \times \|A^{-1}\|_\infty d(x_n, y_n) \\ &= 1(2|\sqrt{1 - \xi_n^p} + \sqrt{1 - \zeta_n^p}|) \\ &\quad \times \|A^{-1}\|_\infty d(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (14)$$

由前面分析可知, Logistic 映射的逆映射是总体收敛的, A^{-1} 映射是发散的, 由图 1 知, $\|A^{-1}\|_\infty$ 的值随着耦合系数 ϵ 的增大而增大, 且 $\|A^{-1}\|_\infty \geq 1$. 当 $\|A^{-1}\|_\infty = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 时, 整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 的敛散区分析图如图 4 所示. 其中, $\|A^{-1}\|_\infty = 1$ 即耦合系数为 0 时, 整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 简化为 Logistic 映射的逆映射 $f_{Ls_n}^{-1}$ 系统, 文献 [6] 研究的就是耦合系数为 0 时的特殊情形. 由图 4 可预见, 随着 $\|A^{-1}\|_\infty$ 值的增大, 整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 的发散区逐渐扩大, 同时, 当 $\|A^{-1}\|_\infty$ 达到一定值时, 发散区将大于收敛区. 由于整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 在每次迭代中, 其 $H_{Ls_n}^{-1}$ 敛散因子 $k_{H_{Ls_n}^{-1}}(n)$ 的值是不同的, 同时在整个求逆过程中, 压缩与发散出现的概率是无法确定的, 因此我们无法明确地确定整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 收敛与发散的临界点. 但从图 1(b) 可知, 当为弱耦合的时候, $\|A^{-1}\|_\infty$ 增加的比较缓慢, 这时 $k_{H_{Ls_n}^{-1}} = k_A^{-1} \cdot k_{f_{Ls_n}^{-1}} < 1$ 在整个求逆过程中占绝对优势, 即收

敛占绝对优势, 因此整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 是总体收敛的, 同时存在局部发散. 随着耦合系数的增大, $\|A^{-1}\|_\infty$ 快速增大, 这时 $k_{H_{Ls_n}^{-1}} > 1$ 在整个求逆过程中占绝对优势, 因此整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 总体是发散的, 同时存在局部收敛. 综合上述, 同时考虑敛散区所占的比例以及收敛因子与发散因子的大小对整个求逆系统的敛散性的影响, 我们可以得到一个定性的结论: 采用 Logistic 映射, 在 CML 的整个求逆过程中, 当收敛占绝对优势时, $H_{Ls_n}^{-1}$ 是总体收敛的, 同时存在局部发散. 这时可以根据 (15) 式进行逆向迭代, 从而有效地实现 CML 的初值估计. 在不考虑噪声的情况下, 估计性能不仅与迭代次数有关, 同时与收敛和发散的强弱对比有关. 在同等条件下, 收敛占的比例越大, 初值估计性能越好. 当发散占绝对优势时, $H_{Ls_n}^{-1}$ 是总体发散的, 同时存在局部收敛, 这时对 CML 进行初值估计是无效的,

$$\begin{aligned} x_n &= H_{Ls_n}^{-1}(x_{n+1}) = f_{Ls_n}^{-1} \circ A^{-1}(x_{n+1}) \\ &= [1 + (2s_n - 1)\sqrt{1 - A^{-1}(x_{n+1})}]/2. \end{aligned} \quad (15)$$

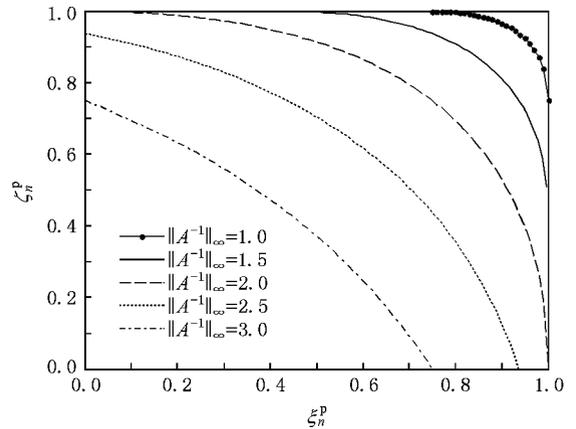


图 4 $\|A^{-1}\|_\infty$ 取不同值时, 整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 的敛散区分析图

3.3.2. 以 Tent 为映射的整个求逆系统的敛散性

结合 Tent 映射的逆映射 $f_{Ts_n}^{-1}$ 及 A^{-1} 映射的敛散性分析, 现在讨论整个求逆系统 $H_{Ts_n}^{-1}$ 的敛散性, 则有

$$\begin{aligned} & d(H_{Ts_n}^{-1}(x_n), H_{Ts_n}^{-1}(y_n)) \\ &= d(f_{Ts_n}^{-1}(x'_n), f_{Ts_n}^{-1}(y'_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1/2d(\mathbf{y}'_n, \mathbf{x}'_n) \\
 &\leq 1/2 \|A^{-1}\|_{\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n). \tag{16}
 \end{aligned}$$

由上式可知, $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 的敛散性主要由 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 决定. 同时由(10)式得 $1/2d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq d(H_{T_{s_n}}^{-1}(\mathbf{x}_n), H_{T_{s_n}}^{-1}(\mathbf{y}_n)) \leq 1/2 \|A^{-1}\|_{\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$, 即 $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 敛散因子 $\{k_{H_{T_{s_n}}^{-1}}(n), n \in \mathbf{N}\}$ 的取值范围为 $[1/2, 1/2 \|A^{-1}\|_{\infty}]$. 当 $1/2 \|A^{-1}\|_{\infty} < 1$, 即 $\|A^{-1}\|_{\infty} < 2$, $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 是压缩映射, 系统在每次迭代都是收敛的, 不存在局部发散的情况. 这时, 在不考虑噪声的情况下, CML 初值估计的性能只受迭代次数的影响. 由图 1(b) 得到, 当 $\epsilon < 0.25$ 时, $\|A^{-1}\|_{\infty} < 2$, $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 是压缩映射. 当 $\|A^{-1}\|_{\infty} \geq 2$ 时, $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 在整个迭代过程中, 既存在收敛的情况, 也存在发散的情况. 当收敛占绝对优势时, 那么 $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 是总体收敛的, 同时存在局部发散, 这时 CML 的初值估计的性能既与迭代次数有关, 同时与收敛和发散的强弱对比有关; 当发散占绝对优势时, 那么 $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 是总体发散的, 同时存在局部收敛, 这时对 CML 进行初值估计是无效的. 当 $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 是压缩映射或总体收敛时, 根据(17)式逆向迭代就可以估计出 CML 系统的初值.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_n &= H_{T_{s_n}}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}) = f_{T_{s_n}}^{-1} \circ A^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}) \\
 &= [1/2 + (2s_n - 1)\xi(1 - A^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}))]/2. \tag{17}
 \end{aligned}$$

4. 分析及结果

CML 所有格点的初值在 $(0, 1)$ 内随机选取, 然后把初值按照(1)式进行迭代映射, 记录每一个格点的动力学符号序列 s_n^i 以及轨迹 x_n^i . 再根据 CML 的逆映射 $\mathbf{x}_n = H_{T_{s_n}}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1})$ 逐步求逆并记录下各格点每一步逆向迭代所得的估计值 \hat{x}_n^i . 最后, 采用均方误差 (mean square errors, MSE) 对估计性能进行分析. MSE 的定义: $MSE(\hat{\mathbf{x}}_n) = 1/M \times \sum_{i=1}^M |\hat{x}_n^i - x_n^i|^2$, 其中 M 代表格点数目, \hat{x}_n^i 代表 n 时刻第 i 个格点信号恢复值, x_n^i 代表 n 时刻第 i 个格点信号真实值.

在逆向迭代的初始部分的值随机选取, 即令 $\hat{x}_L^i = \xi$, 其中 ξ 在空间 I 上任意取值, L 为迭代步长. 同时为了更好的观察 $H_{T_{s_n}}^{-1}$ 敛散性, 我们在实验中加入适当的高斯白噪声.

4.1. 以 Logistic 为映射的 CML 初值估计

实验采用格子规模 $M = 20$ 的系统进行仿真, 迭代总次数为 20 次. 图 5(a) 是映像函数为 Logistic、信噪比为 60 dB 耦合系数 ϵ 分别为 0.01, 0.1, 0.15, 0.2 和 0.25 的局部耦合系统, 迭代次数与各格点初值估计的性能 (MSE) 的对应关系. 从图 5(a) 中可以看出, 当为弱耦合时, 系统在迭代过程中迅速收敛, 当 $L = 20$ 时, MSE 值逼近 0, 说明系统在求逆过程中, 各格点的值得到很好的恢复. 为了更清晰地分析不同的耦合系统下, 系统的收敛特性, 图 5(b) 给出了以 dB 为单位的 MSE 的值, 即 $MSE_{dB} = \log_{10}(MSE)$. 从图 5(b) 我们知道, 随着迭代次数 L 的增加, 估计性能越好; 另外, 耦合系数 ϵ 越小, 系统的整体收敛性能越好, 收敛速度越快. 随着耦合系数 ϵ 的增大, 发散强度随之增大, 系统的整体收敛性能

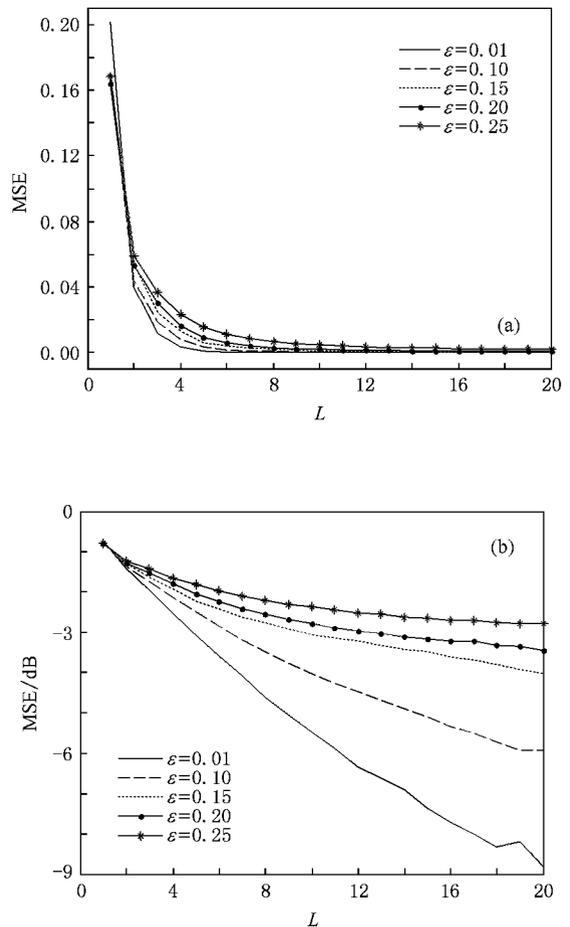


图 5 以 Logistic 为映射函数, 迭代步数 L 与各步格点值估计性能的关系图 (a) 以均方误差值表征估计性能 (b) 是以取对数后的均方误差值表征估计性能

变差,收敛速度减慢.这与理论分析相一致,即这时的估计性能不仅与迭代次数有关,同时与收敛与发散的强弱对比有关.当整个求逆系统是总体收敛时,随着迭代次数趋于无穷大,估计误差将收敛到无穷小.

为了考查不同信噪比情况下系统的收敛特性,图 6 给出耦合系数 ϵ 为 0.1 时,在不同信噪比情况下的仿真结果.从仿真结果我们可以看到,在高信噪比的情况下,系统的收敛性能较低信噪比时要好.这是由于噪声的存在影响符号动力学中符号向量的值,噪声越强,计算每步的符号向量时出现错误的概率就越高,从而导致系统的收敛特性变差.

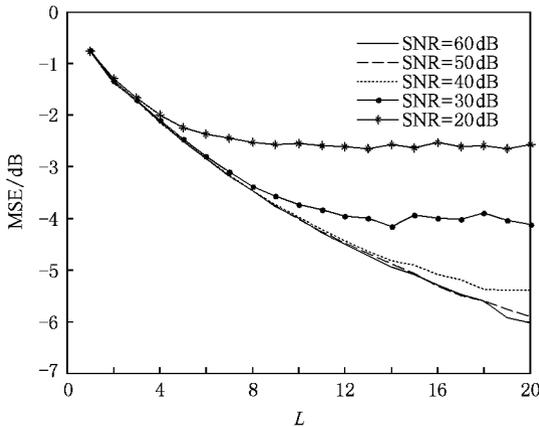


图 6 以 Logistic 为映射函数,不同信噪比情况下,迭代步数 L 与各步格点值估计性能的关系图

4.2. 以 Tent 为映射的 CML 初值估计

与 Logistic 为映射的仿真类似,实验同样采用格子规模 $M = 20$ 的系统进行仿真,逆迭代次数为 20 次.图 7 是映像函数为 Tent,信噪比为 60 dB,耦合系数 ϵ 分别为 0.01, 0.1, 0.15, 0.2 和 0.25 的局部耦合系统,逆迭代次数与各格点初值估计的性能(MSE/MSE_{db})的对应关系.图 8 是耦合系数 ϵ 为 0.1 时,在不同信噪比情况下的仿真结果,系统的收敛性能与 Logistic 为映射时的结论一致.

4.3. 实验结果对比与讨论

比较 Logistic 映射与 Tent 映射对整个求逆系统的敛散性造成的影响,对比图 5 与图 7,我们可以看到,在同等条件下,以 Tent 映射为映射函数的求逆系统的收敛性能明显优于 Logistic 映射组成的求逆系统,前者的收敛速度快于后者.这是由于 $\epsilon < 0.25$ 时, $\|A^{-1}\|_{\infty} < 2$,以 Tent 为映射的整个求逆系统

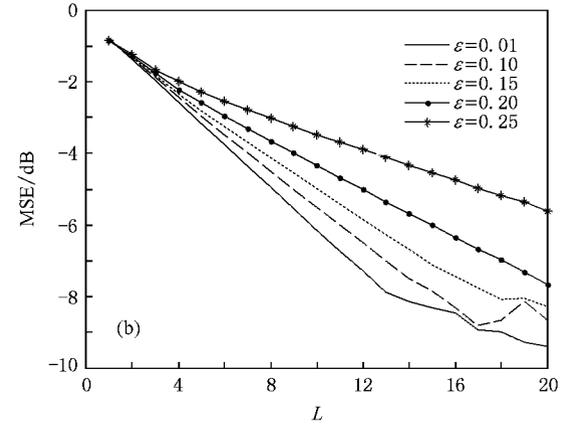
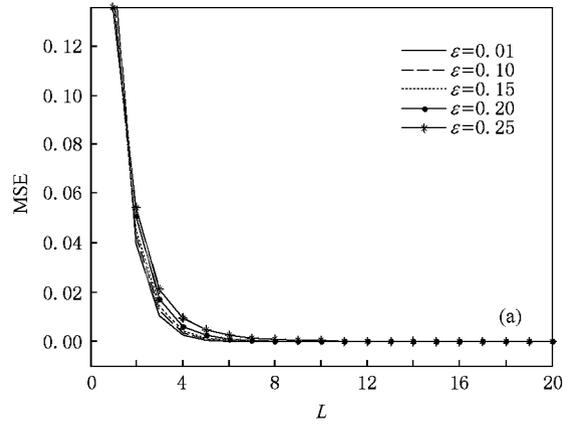


图 7 以 Tent 为映射函数,迭代步数 L 与各步格点值估计性能的关系图 (a)以均方误差值表征估计性能 (b)是以取对数后的均方误差值表征估计性能

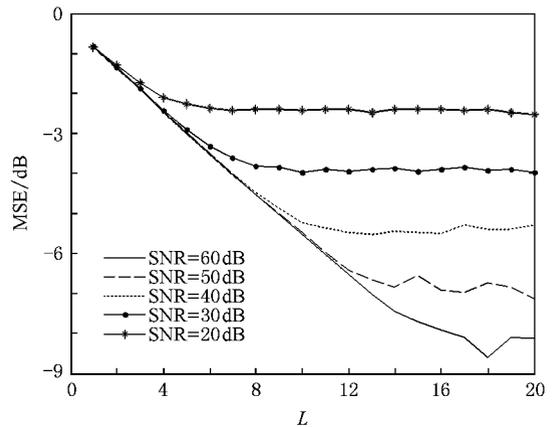


图 8 以 Tent 为映射函数,不同信噪比情况下,迭代步数 L 与各步格点值估计性能的关系图

$H_{Ts_n}^{-1}$ 是压缩映射,不存在任何发散的行为.而此时,以 Logistic 为映射的整个求逆系统 $H_{Ls_n}^{-1}$ 是总体收敛的,同时存在局部发散,由于局部发散的影响,使

$H_{L_s}^{-1}$ 的收敛性能明显差于 $H_{T_s}^{-1}$, 而且随着耦合强度的增加, 两者收敛性能的差异变得越来越大.

5. 结 论

在 CML 中, 能否恢复系统初值直接决定了符号向量序列与 CML 相空间之间能否建立一一对应的关系. 本文在符号动力学的基础上, 探讨了 CML 系统求逆过程的敛散性与系统耦合系数大小及映射函数的选择之间的关系. CML 系统的求逆的过程受到这两方面敛散性的综合影响, 二者敛散性的强弱对比决定了整个求逆过程总体敛散性. 其中, 耦合系数

的强弱对整个逆系统的敛散性起着关键性影响. 在系统的映射不是压缩映射或不能确定其是压缩映射的情况下, 我们提出了总体收敛且局部发散与总体发散且局部收敛的概念, 同时利用这一概念作为能否实现 CML 初值估计的依据. Logistic 映射是非线性映射, 其逆映射的敛散性比分段线性的 Tent 映射要复杂, 它并非在所有的相空间都是收敛, 而是存在局部发散区, 这个特点使得它在同等条件下, CML 系统的收敛性能明显差于以 Tent 为映射的系统. 本文全面深入的探讨了基于符号动力学估计 CML 系统初值的可行性条件, 为更好地分析和刻画实际模型的物理过程提供了理论及事实依据.

- [1] Yang W M 1994 *Spatiotemporal Chaos and Coupled Map Lattice* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p13 (in Chinese) [杨维明 1994 时空混沌和耦合映像格子 (上海科学技术教育出版社) 第 13 页]
- [2] Zhang J S , Dang J L , Li H C 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 67 (in Chinese) [张家树、党建亮、李恒超 2007 物理学报 **56** 67]
- [3] Wang Z B , Hu G 2001 *Acta Phys . Sin .* **50** 1666 (in Chinese) [王志斌、胡 岗 2001 物理学报 **50** 1666]
- [4] Wang S C , Yip P C , Leung H 1999 *IEEE Trans . on Signal Processing* **47** 3289
- [5] Jin Y Y 2002 *Progress in Natural Science* **12** 56 (in Chinese) [金友渔 2002 自然科学进展 **12** 56]
- [6] Zhang X , Shen K 2001 *Acta Phys . Sin .* **50** 624 (in Chinese) [张旭、沈 柯 2001 物理学报 **50** 624]
- [7] Wang J L , Chen G Z 1999 *Acta Phys . Sin .* **48** 1605 (in Chinese) [王金兰、陈光旨 1999 物理学报 **48** 1605]
- [8] Wang H X , He C 2003 *Acta Phys . Sin .* **52** 2409 (in Chinese) [王宏霞、何 晨 2003 物理学报 **52** 2409]
- [9] Xiao F H , Yan G R , Han Y H 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 2877 (in Chinese) [肖方红、阎桂荣、韩宇航 2004 物理学报 **53** 2877]
- [10] Zheng W M , Hao B L 1994 *Applied Symbolic Dynamics* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p50 (in Chinese) [郑伟谋、郝柏林 1994 实用符号动力学 (上海科学技术教育出版社) 第 50 页]
- [11] Hao B L 1994 *Starting With Parabolas An Introduction to Chaotic Dynamics* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) p20 [郝柏林 1994 从抛物线谈起——混沌动力学引论 (上海科学技术教育出版社) 第 20 页]
- [12] Buminovich L A 1997 *Physica D : Nonlinear Phenomena* **103** 1
- [13] Ling C , Wu X F , Sun S G 1999 *IEEE Trans . on Signal Processing* **47** 1424
- [14] Zeng Y C , Tong Q Y 2003 *Acta Phys . Sin .* **52** 285 (in Chinese) [曾以成、童勤业 2003 物理学报 **52** 285]
- [15] Liu Y , Shen M F , Chen H Y 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 564 (in Chinese) [刘 英、沈民奋、陈和晏 2006 物理学报 **55** 564]
- [16] Pang Q , Wu W , Fan Y L 2007 *Acta Phys Sin .* **56** 6836 (in Chinese) [庞 全、武 薇 范影乐 2007 物理学报 **56** 6836]
- [17] Wang K , Pei W J , Xia H S , He Z Y 2007 *Acta Phys Sin .* **56** 3766 (in Chinese) [王 开、裴文江、夏海山、何振亚 2007 物理学报 **56** 3766]
- [18] Kay S 1995 *IEEE Trans . on Signal Processing* **43** 1009

Initial condition estimate of coupled map lattices system based on symbolic dynamics *

Shen Min-Fen^{1,2)†} Lin Lan-Xin¹⁾ Li Xiao-Yan¹⁾ Chang Chun-Qi²⁾

1) *College of Engineering, Shantou University, Shantou 515063, China*

2) *Department of Electronics Engineering, University of Hong Kong, Hong Kong, China*

(Received 28 June 2008 ; revised manuscript received 3 November 2008)

Abstract

The initial condition estimate of local coupled map lattice system based on given symbolic sequence is researched. The relationships between the parameter of coupling strength, the map function and the performance of estimating initial condition are analyzed. It is proved that any value taken from the phase-space I^M does not necessarily converge to the initial vector. There is a direct relationship between convergence property and coupling strength. Moreover, the performances of estimating initial vector are different according to different map functions. The simulation results are completely consistent with theoretical analysis, which shows that the proposed arithmetic for estimating initial vector of coupled map lattice system is correct. The inverse process of coupled map lattice system is fully investigated and the simulation results in this paper provide a theoretical and factual basis for better analysis and description of the physical process of the actual model.

Keywords : coupled map lattices, symbolic dynamics, initial vector estimate

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60571066 & 60271023) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 5008317).

† E-mail : mfshen@stu.edu.cn