第 58 卷 第 5 期 2009 年 5 月
1000-3290/2009/58(05)/2930-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.5,May,2009

一类广义 Sine-Gordon 扰动方程的解析解*

莫嘉琪†

(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)

(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

(2008 年 7 月 4 日收到;2008 年 8 月 6 日收到修改稿)

利用同伦映射方法研究了一类广义 Sine-Gordon 方程. 首先引入一个同伦变换. 然后构造了原方程解的迭代关系式. 最后得到了问题的解析解.

关键词:孤子,扰动,同伦映射

PACC:0545

1. 引 言

非线性问题孤子理论存在于物理学、力学和其他自然科学的许多领域的应用中,是当前国际学术界十分关注的对象. 近几年来许多学者,例如在激波[1—3]、光波散射[4]、量子力学[5]、大气物理[6—9]、神经网络[10]、爆炸与燃烧[11]等方面都作了一些研究. 非线性孤子理论的定量和定性各种方法也大量地涌现. 作者等利用微分不等式、变分迭代、不动点原理等方法也研究了一系列非线性孤子和相应的问题[12—24]. 本文是利用同伦映射方法研究了一类广义 Sine-Gordon 扰动方程. 迄今为止,孤子理论大体可以分为两大类,一类是基于逆散射变换的孤子微扰论,它已形成了比较系统和完整的体系[25]. 另一类是孤子微扰论的渐近方法,其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为线性方程求解[26]. 本文使用的同伦映射方法就是属于后一类. 本方法的优点在于思路简明,计算简单,得到的近似解具有较高的精度. 并且它还有一个突出的优点,就是这样求得的解保留了相应的解析特性. 因而不但能对得到的结果直接进行定量方面的分析,而且还能进一步更深入的作定性方面的解析分析. 本方法还可适用于其他非线性问题,具有较广泛的研究前景.

近来典型的 Sine-Gordon 方程已有研究[27,28],它代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩. 因此从进一步研究来看,已经不能满足当前科学发展的需要. 故有必要来研究更能代表真实自然现象的广义 Sine-Gordon 扰动方程. 本文就是在这样的背景下提出来的.

今讨论如下一类广义强阻尼 Sine-Gordon 扰动方程[29]:

$$u_{tt}+\alpha u_t-u_{xx}-\beta u_{txx}=g(\sin u)+f(x,t),\quad(1)$$

其中 α,β 为阻尼参数,f,g 为扰动项,设它们是关于其变量为解析的函数.

2. 同伦映射

为了进一步求得广义强阻尼 Sine-Gordon 扰动方程(1)的解. 首先引入如下一个 $R\times[0,1]\to R$ 的同伦映射[30,31]:

$$H[u,p]=L[u]-L[\tilde{u}]+p\{L[\tilde{u}]-g(\sin u)-f\},\quad(2)$$

其中 $\tilde{u}$ 为原方程(1)的初始近似,算子 $L[u]$ 为

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}.$$

首先考虑方程

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,40876010),国家重点基础研究发展计划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221),上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y604127)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$L[v] = 0. \tag{3}$$

利用 Fourier 变换法来求方程(3)的解. 对方程(3)的两边关于变量 x 进行 Fourier 变换，并设 $\bar{v}(x,t)$的 Fourier变换为 $\bar{v}(\lambda,t)$. 这时有

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + (\alpha + \beta\lambda^2)\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \lambda^2 \bar{v} = 0. \tag{4}$$

方程(4)的解为

$$\bar{v}(\lambda,t) = (r_1 - r_2)^{-1}[(\bar{\psi} - r_2\bar{\phi})\exp r_1 t - [(\bar{\psi} - r_1\bar{\phi})\exp r_2 t]. \tag{5}$$

其中 $\bar{\phi}$,$\bar{\psi}$ 分别为初始状态 $v|_{t=0} = \phi, \phi, v_t|_{t=0} = \psi$ 的 Fourier 变换，而特征值 $r_{1,2}$为

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(-(\alpha + \beta\lambda^2) \pm \sqrt{(\alpha + \beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}). \tag{6}$$

取关系式(5)的 Fourier 逆变换 F^{-1}. 便得到方程(3)的解 v 为

$$v(x,t) = F^{-1}[\bar{v}]. \tag{7}$$

3. 解的计算

令

$$u(x,t,p) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t)p^i. \tag{8}$$

将关系式(8)代入(2)式，按 p 的幂展开相应的非线性项，合并 $p^i(i=0,1,2,\cdots)$的同次幂，并分别令其系数为零. 依次可得

$$L[u_0] - L[\tilde{u}] = 0, \tag{9}$$

$$L[u_1] = -L[\tilde{u}] + g(\sin u_0) + f(x,t), \tag{10}$$

$$L[u_i] = G_i(x,t),(i = 2,3,4,\cdots). \tag{11}$$

这里

$$G_{i+1}(x,t) = \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial p^i}g(\sin(\sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i))\right]_{p=0} \quad (i = 1,2,\cdots). \tag{12}$$

由映射关系式(2)不难看出，$H[u,p]=0$ 的解 $u(x,t,p)$当 $p \to 1$ 的极限的情形就是方程(1)的解.

首先选择 $\tilde{u} = v$，由(3)，(7)，(9)式及 Fourier 逆变换的定义，有

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(r_1 - r_2)^{-1} \times [\psi(\xi) - r_2\phi(\xi))\exp(r_1 t) - (\psi(\xi) - r_1\phi(\xi))\exp(r_2 t)] \times \cos\lambda(\xi - x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda. \tag{13}$$

不难由 Fourier 变换法可依次地得到线性双曲型方程(10)，(11)的解为

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(r_1 - r_2)^{-1}[g(\sin u_0) + f(\xi,\tau)] \times [\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)] \times \cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$u_i(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(r_1 - r_2)^{-1}G_i(\xi,\tau) \times [\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)] \times \cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau, \quad i = 2,3,\cdots. \tag{15}$$

由(13)—(15)式，及同伦映射理论便得到广义强阻尼 Sine-Gordon 扰动方程(1)的解析解

$$\begin{aligned} u(x,t) = {}& \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}[(r_1 - r_2)^{-1} \\ & \times [(\psi(\xi) - r_2\phi(\xi))\exp(r_1 t) \\ & - (\psi(\xi) - r_1\phi(\xi))\exp(r_2 t)] \\ & \times \cos\lambda(\xi - x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(r_1 - r_2)^{-1}[g(\sin u_0) \\ & + f(\xi,\tau)][\exp r_1(t-\tau) \\ & - \exp r_2(t-\tau)]\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{i=2}^{\infty}[\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(r_1 - r_2)^{-1}G_i(\xi,\tau) \\ & \times [\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)] \\ & \times \cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau], \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $r_1, r_2, G_i(i=2,3,\cdots)$和 u_0 分别由关系式(6)，(12)，(13)表示.

4. 近似解

我们已经得到了方程(1)的解析解(16). 通常，我们一般是取级数(16)的前几项而得到的部分和作为方程(1)的近似解. 下面我们通过一个具体例子来观察其近似解的精度.

设 Sine-Gordon 扰动方程(1)中的扰动项为 $g(\sin u) = \varepsilon\sin u, f(x,t) = \exp(-t)\cos x$，其中 ε 为小参数 $0 < \xi \ll 1$，并不妨设问题的初始状态为 $\phi(x) = 0, \psi(x) = \exp(-x^2)$. 这时由同伦映射方法得到方程(1)的解(16)的前二项部分和的近似 u_{hom}为

$$\begin{aligned} u_{\text{hom}} = {}& \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(r_1 - r_2)^{-1}[\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t)] \\ & \times \exp(-\xi^2)\cos\lambda(\xi - x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(r_1 - r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) \\ & - \exp r_2(t-\tau)]\cos\xi\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$+\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (r_1-r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)]\sin\tilde{u}_0\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau, \quad (17)$$

其中 $\tilde{u}_0$ 为

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [(r_1-r_2)^{-1}[\exp(r_1 t)-\exp(r_2 t)] \times \exp(-\xi^2)\cos\lambda(\xi-x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda.$$

另一方面，因这时问题为微扰的情形，我们能用微扰理论来求出问题的渐近解 u_{per}. 设

$$u = \bar{u}_0 + \varepsilon\bar{u}_1 + \varepsilon^2\bar{u}_2 + \cdots, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (18)$$

将上式代入相应的方程，按 ε 的幂展开非线性项，合并 ε 的同次幂项，并使方程两端 ε 的同次幂项的系数相等. 可依次地得到 $\bar{u}_i$ ($i=0,1,2,\cdots$) 所满足的方程. 对于 $i=0,1$，可得 $\bar{u}_0,\bar{u}_1$ 所满足的方程

$$(\bar{u}_0)_{tt} + \alpha(\bar{u}_0)_t - (\bar{u}_0)_{xx} - \beta(\bar{u}_0)_{txx} = \exp(-t)\cos x, \quad (19)$$

$$(\bar{u}_1)_{tt} + \alpha(\bar{u}_1)_t - (\bar{u}_1)_{xx} - \beta(\bar{u}_1)_{txx} = \sin\bar{u}_0. \quad (20)$$

由方程(19)和(20)，并注意到初始状态 $\phi(x)=0,\psi(x)=\exp(-x^2)$，不难得到

$$\bar{u}_0(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [(r_1-r_2)^{-1}[\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t)]\exp(-\xi^2)\cos\lambda(\xi-x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (r_1-r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)]\cos\xi\cos\lambda(x-\xi) \times \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau,$$

$$\bar{u}_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (r_1-r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)]\sin\tilde{u}_0\cos\lambda(x-\xi) \times \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau.$$

将上述的结果代入(18)式，便得到问题的摄动解 u_{per} 的渐近展开式

$$u_{\mathrm{per}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [(r_1-r_2)^{-1}[\exp(r_1 t)-\exp(r_2 t)] \times \exp(-\xi^2)\cos\lambda(\xi-x)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (r_1-r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)]\cos\xi\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (r_1-r_2)^{-1}[\exp r_1(t-\tau) - \exp r_2(t-\tau)]\sin\tilde{u}_0\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2), \quad 0<\varepsilon\ll 1. \quad (21)$$

比较两种方法计算出的近似解(16)，(21)，它们的主要部分完全相同. 因此，从这个侧面来说，由同伦映射方法计算出来的近似解具有良好的近似度.

5. 讨　　论

由 Sine-Gordon 广义扰动方程(1)的左端项的结构及其扰动项 $g(\sin u)+f(x,t)$ 关于其变元的性态，以及由本文引入的同伦映射关系式(2)的解析性. 我们可以证明由 $H[u(x,t),p]=0$ 所决定的解 $u(x,t,p)$ 是关于 p 在[0,1]上的解析函数. 因此，由本文的方法确定的级数(8)，在 $p\in[0,1]$ 上是收敛的[31]. 所以用同伦映射法决定的解(16)式收敛有效.

用同伦映射方法得到的解的收敛快慢，关键是取决于初始近似的选取. 本文选取的初始近似 $v(x,t)$ 的选取是采用非扰动情形下的典型 Sine-Gordon 方程的解(7). 它保证了对应于扰动情形下的 Sine-Gordon 方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Liu S K, Fu Z, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 14 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 14]

[4] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]

[5] Pan L X, Liu J L, Li S S *et al* 2002 *Sci*. *China* **32** A 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深等 2002 中国科学 **32**A 556]

[6] Feng G L, Dong W J, Jia X J *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181]

[7] Feng G L, Dai X G, Wang A H *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]

[8] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog*. *Natur*. *Sci*. **12** 102 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌 自然科学进展 **12** 102]

[9] Wang L S，Xu D Y 2003 *Sci*. *China* **32** E 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 **32** E 488]

[10] Wu J F，Ye W H，Zhang W Y *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1688 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩等 2003 物理学报 **52** 1668]

[11] Mo J Q 1989 *Science in China* **32** A 1306

[12] Mo J Q，Lin W T 2006 *J*. *Sys*. *Sci*. *& Math*. *Scis*. **26** 737 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2006 系统科学与数学 **26** 737]

[13] Mo J Q，Wang H 2007 *Acta Ecologica Sin*. **27** 4366

[14] Mo J Q，Zhang W J，He M 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[15] Mo J Q，Zhang W J，Chen X F 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6170 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6170]

[16] Mo J Q，Zhang W J，He M 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[17] Mo J Q，Lin W T，Lin Y H 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]

[18] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 550

[19] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[20] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **17** 230

[21] Mo J Q，Lin W T 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1291 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1291]

[22] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2008 *Chin*. *Geographical Sci*. **18** 193

[23] Mo J Q，Lin W T 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 370

[24] Mo J Q，Lin W T 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 743

[25] Huang N N 1996 *Theory of solitons and Method of perturbations* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 孤子理论和扰动方法(上海:上海科技教育出版社)]

[26] Pan L X，Yan J R，Zhou G H 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 594

[27] He H S，Chen J，Yang K Q 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1926

[28] Zhang Q，Yue P，Gong L X 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 35

[29] Zhang J W，Wang D X，Wu R H 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 2021 (in Chinese) [张建文、王旦霞、吴润衡 2008 物理学报 **57** 2021]

[30] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences*，*Shengzhou*: *Henan Science and Technology Publisher* (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学中的近似分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]

[31] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation*: *Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)

Analytic solution for a class of generalized Sine-Gordon perturbation equation*

Mo Jia-Qi†

(*Department of Mathemtics*，*Anhui Normal University*，*Wuhu* 241000，*China*)

(*Division of Computational Science*，*E-Institutes of Shanghai Universities at Shanghai Jiaotong University*，*Shanghai* 200240，*China*)

(Received 4 July 2008; revised manuscript received 6 August 2008)

Abstract

Using the homotopic mapping method，a class of generalized Sine-Gordon equation is obtained. Firstly，by introducing a homotopic mapping，the homotopic mapping solution for original equation is constructed. The analytic solution for the problem is finally obtained.

Keywords: soliton，perturbation，homotopic mapping

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016，40876010)，the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304)，the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221)，in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the National Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y604127).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn