

# 耦合电路中的复杂振荡行为分析\*

张晓芳 陈章耀 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2008 年 4 月 24 日收到, 2008 年 7 月 2 日收到修改稿)

讨论了两个非线性电路适当连接后的耦合系统随耦合强度变化的演化过程, 给出了两子系统各自的分岔行为及通向混沌的过程, 指出原子系统均为周期运动时, 耦合系统依然会由倍周期分岔进入混沌, 同时在混沌区域中存在有周期急剧增加及周期增加分岔等现象, 而当周期运动和混沌振荡相互作用时, 在弱耦合条件下, 受混沌子系统的影响, 原周期子系统会在其原先的轨道邻域内作微幅振荡, 其振荡幅值随耦合强度的增加而增大, 混沌的特征越加明显, 相反, 周期子系统不仅可以导致混沌子系统的失稳, 也会引起混沌吸引子结构的变化.

关键词: 非线性电路, 耦合强度, 分岔, 混沌

PACC: 0545, 0547

## 1. 引 言

非线性系统之间的相互耦合由于广泛的应用背景, 其复杂动力学行为的研究引起了国内外学术界的高度重视<sup>[1,2]</sup>, 各国学者在该领域进行了大量的工作, 揭示了许多诸如饱和现象<sup>[3]</sup>、高维环面<sup>[4]</sup>、超混沌<sup>[5]</sup>、调谐混沌<sup>[6]</sup>等非线性现象. 不同系统之间的耦合体现了子系统之间的相互作用<sup>[7]</sup>. 各种同步的概念如广义同步<sup>[8]</sup>、混沌同步<sup>[9]</sup>、混沌相位同步<sup>[10]</sup>等被引入来探讨耦合系统状态变量之间的相互关系, 从而揭示相互作用对各子系统的影响. 迄今为止, 虽然在非线性耦合系统方面取得了大量的成果, 但是非线性系统之间的这种相互作用引起的复杂性还有待进一步的探讨, 许多问题诸如不同吸引子相互作用后的行为, 混沌演化的过程, 尤其是相互作用的强弱即耦合参数对系统的影响还没有被深刻地刻画出来.

随着现代技术的迅猛发展, 电路系统在实际应用中往往涉及到各种各样的耦合问题<sup>[11]</sup>, 大量的研究报道揭示了非线性耦合电路中同样存在着各种各样丰富的动力学现象<sup>[12]</sup>, 同时, 由于电路系统具有直观和可操作性强等特点<sup>[13]</sup>, 许多相应的实验结果从不同角度给出了不同电路子系统之间相互作用的

过程<sup>[14]</sup>. 体现不同系统之间相互作用的这种耦合, 可以是线性, 也可以是非线性, 耦合不仅增加了所研究对象的维数<sup>[15]</sup>, 同时, 也会使系统的非线性行为更为复杂, 例如, 即使对于相对简单的蔡氏电路<sup>[16]</sup>, 其耦合会产生周期急剧增加的现象<sup>[17]</sup>. 深入分析不同非线性电路中各种吸引子之间的相互作用及其耦合强度对整个系统动力学特性的影响不仅对于深入了解耦合电路的复杂特性有一定的价值, 同时, 对于调控电路系统的行为有一定的指导意义.

本文考虑图 1(c)所示的非线性耦合电路系统, 其中两子系统即模块  $a$  和  $b$  的结构分别如图 1(a) 和 1(b) 所示, 其相应无量纲一般形式的动力学方程可以表示为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - x + c(x - x^2) \\ &\quad + \epsilon(x - y), \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= by - y - c(y - y^3) \\ &\quad + \epsilon(y - x), \end{aligned} \quad (1b)$$

其中  $a, b, c$  分别表示电路中的实际参数,  $\epsilon$  代表耦合强度.

我们首先分析两子系统和耦合系统的动力特性, 进而讨论随着耦合强度的变化, 各种子系统运动模式相互作用下耦合系统的复杂行为的演化过程.

\* 国家自然科学基金(批准号 20476041)资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

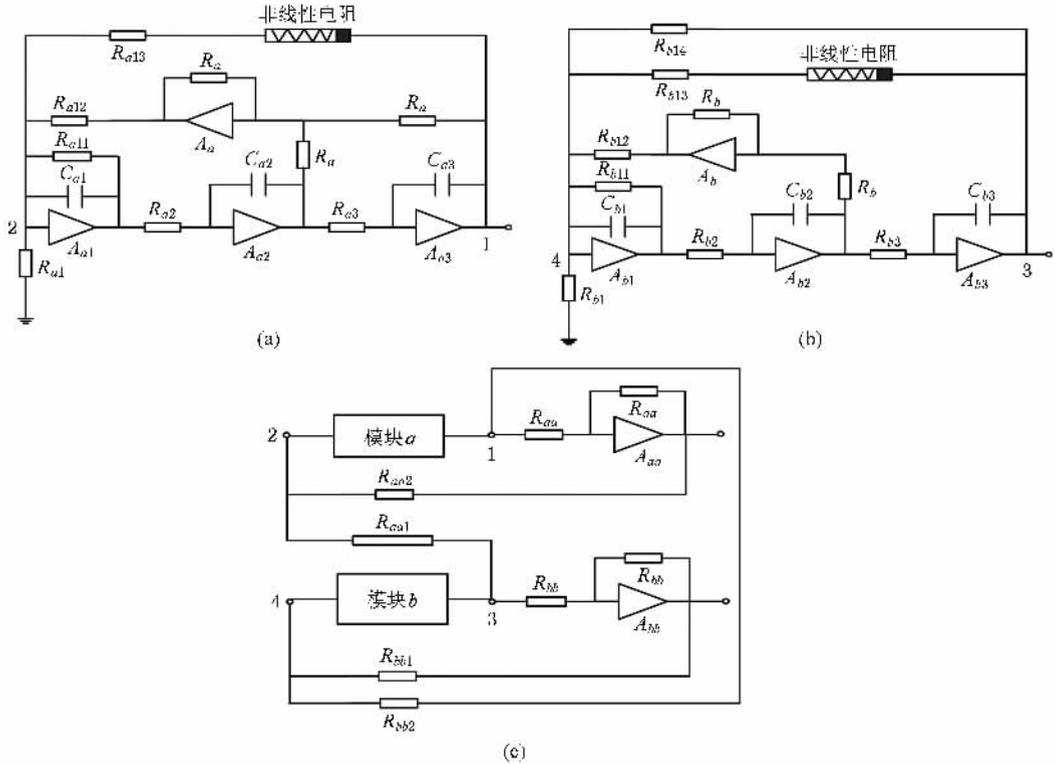


图 1 耦合电路及其子系统 (a)  $\epsilon = 0$  时子系统 (1a) (b)  $\epsilon = 0$  时子系统 (1b) (c) 耦合系统

## 2. 分岔分析

### 2.1. 耦合前两子系统的分岔分析

首先讨论 (1) 式中  $\epsilon = 0$  的情况, 即不考虑两个子系统存在相互作用. 显然子系统 (1a) 的平衡点为  $X_{10} \equiv (x, \dot{x}, \ddot{x}) = (0, 0, 0)$  和  $X_{20} \equiv (x, \dot{x}, \ddot{x}) = (1, 0, 0)$ , 其稳定性由相应的特征方程决定, 利用 Routh-Hurwitz 准则, 可以判断出当  $c < 0$  和  $a < c$  同时满足时,  $X_{10}$  是稳定的; 当  $c > 0$  和  $a + c < 0$  时,  $X_{20}$  稳定. 这样可以得到三个可能的分岔集, 分别为简单分岔集  $S_1^{(1)}$  和 Hopf 分岔集  $H_1^{(1)}, H_2^{(1)}$ , 即

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}: & \quad c = 0, \\ H_1^{(1)}: & \quad a - c = 0, \\ H_2^{(1)}: & \quad a + c = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

它们将参数空间  $(a - c)$  划分为对应于不同相轨迹的区域 (见图 2(a)). 实线表示真实的分岔集, 而虚

线表示满足 (2) 式而实际并不存在的分岔集. 通过数值计算容易检验, 在区域 ① 中有稳定的平衡点  $X_{10}$ , 一旦参数穿越分岔集  $S_1^{(1)}$ , 简单分岔产生, 在区域 ② 中存在稳定的平衡点  $X_{20}$ , 区域 ③ 和 ④ 中分别存在由两个稳定的平衡点分岔产生两种形式的周期解.

在此系统中, 我们取定  $c = 1.0$  作出分岔图, 如图 2(b) 所示. 进一步研究发现随着  $a$  的变化, 振荡器经过不断的倍周期分岔最终导致混沌.

同样地, 子系统 (1b) 有三个平衡点, 分别为  $Y_{10} \equiv (y, \dot{y}, \ddot{y}) = (0, 0, 0)$ ,  $Y_{20} \equiv (y, \dot{y}, \ddot{y}) = (1, 0, 0)$  和  $Y_{30} \equiv (y, \dot{y}, \ddot{y}) = (-1, 0, 0)$ . 其中,  $Y_{10}$  的稳定性条件为  $c > 0$  和  $b + c < 0$ ,  $Y_{20}$  和  $Y_{30}$  的稳定性条件为  $c < 0$  和  $b < 2c$ . 同样我们可以相应地给出其不同的分岔集, 如图 2(c) 所示.

图 2(d) 给出了子系统 (1b) 在  $c = 1.0$  随参数  $b$  变化的分岔图, 从图中可以观察到系统也会经过不断地倍周期分岔进入混沌.

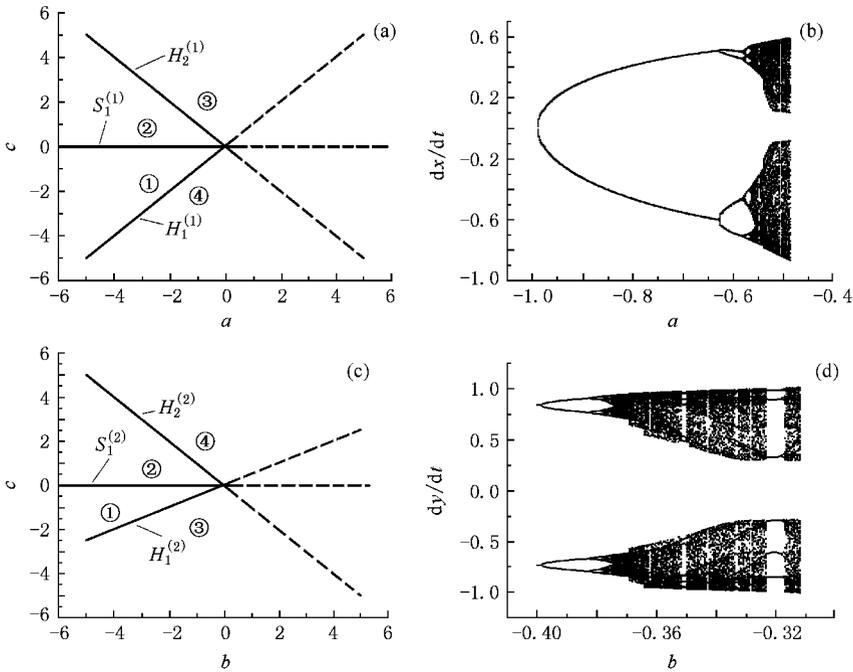


图 2 子系统的分岔集和分岔图 (a)子系统(1a)的分岔集 (b)子系统(1a)的分岔图 (c)子系统(1b)的分岔集 (d)子系统(1b)的分岔图

2.2. 耦合系统的分岔分析

现在我们考虑(1)式中子系统之间的耦合效应，即  $\epsilon \neq 0$  的情况. 此耦合的电路振荡器可用如下六维向量场

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= ax_3 - x_2 + \alpha(x_1 - x_1^2) \\
 &\quad + \epsilon(x_1 - x_4), \\
 \dot{x}_4 &= x_5, \\
 \dot{x}_5 &= x_6, \\
 \dot{x}_6 &= bx_6 - x_5 - \alpha(x_4 - x_4^3) \\
 &\quad + \epsilon(x_4 - x_1)
 \end{aligned} \tag{3}$$

来表示,其平衡点可以表示为  $(x_{10}, 0, 0, x_{40}, 0, 0)$ ,

其中  $x_{40} = x_{10} + \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2)$ , 而  $x_{10}$  满足如下方程:

$$\frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2) - \left(x_{10} + \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2)\right)^3 + x_{10}^2 = 0. \tag{4}$$

其稳定性由相应的特征方程决定，

$$\begin{aligned}
 \lambda^6 + F_5\lambda^5 + F_4\lambda^4 + F_3\lambda^3 \\
 + F_2\lambda^2 + F_1\lambda + F_0 = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_5 &= -b - a, F_4 = 2 + ba, \\
 F_3 &= -2\epsilon - 3cx_{40}^2 - a - b + 2cx_{10}, \\
 F_2 &= 1 - ac + a\epsilon + 3acx_{40}^2 \\
 &\quad + bc + b\epsilon - 2bcx_{10}, \\
 F_1 &= -2\epsilon - 3cx_{40}^2 + 2cx_{10}, \\
 F_0 &= -c^2 + 2c^2x_{10} - 2\epsilon cx_{10} + 3c^2x_{40}^2 \\
 &\quad + 3cx_{40}^2\epsilon - 6c^2x_{40}^2x_{10}.
 \end{aligned}$$

显然,当(5)式中所有的特征值均具有负实部时,平衡点稳定.平衡点失稳存在两种可能方式.随着参数变化,一种是由于其某一实数的特征值由负数变为正数,另一种是某一对复数特征值的负实部变为正实部.其相应的临界条件分别被称为简单分岔集和Hopf分岔集.这样我们可以定义两种形式的分岔集.令(5)式中  $\lambda = 0$  可得其简单分岔集

$$S: \begin{cases} \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2) - \left(x_{10} + \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2)\right)^3 + x_{10}^2 = 0, \\ -c^2 + 2c^2x_{10} - 2\epsilon cx_{10} + 3c^2x_{40}^2 + 3cx_{40}^2\epsilon - 6c^2x_{40}^2x_{10} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

而将  $\lambda = R( I = \sqrt{-1} )$  代入 (5) 式可得到 Hopf 分岔集

$$H : \begin{cases} \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2) - \left(x_{10} + \frac{c}{\epsilon}(x_{10} - x_{10}^2)\right)^3 + x_{10}^2 = 0, \\ -R^6 + (2 + ab)R^4 - (1 - ac + a\epsilon + 3acx_{40}^2 + bc + b\epsilon - 2bcx_{10})R^2 \\ - c^2 + 2c^2x_{10} - 2\epsilon cx_{10} + 3c^2x_{40}^2 + 3cx_{40}^2\epsilon - 6c^2x_{40}^2x_{10} = 0, \\ (-b - a)R^4 - (-2\epsilon - 3cx_{40}^2 - a - b + 2cx_{10})R^2 - 2\epsilon - 3cx_{40}^2 + 2cx_{10} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

由 (6) 式消去  $x_{10}$  (7) 式消去  $x_{10}$  和  $R$ , 即可得到参数空间上的分岔集, 这些分岔集将参数空间分割成不同的区域, 对应着不同形式的动力学行为.

由于很难给出解析的平衡点及分岔集, 下面我们

们采用数值计算的方法. 首先设定参数  $b = -2.0, c = 1.0$ , 图 3 给出了  $a = -1.1$  时耦合系统的平衡点, 其中粗线和细线分别表示稳定和不稳定的平衡点. 图 4 为  $(a-\epsilon)$  平面上的分岔集.

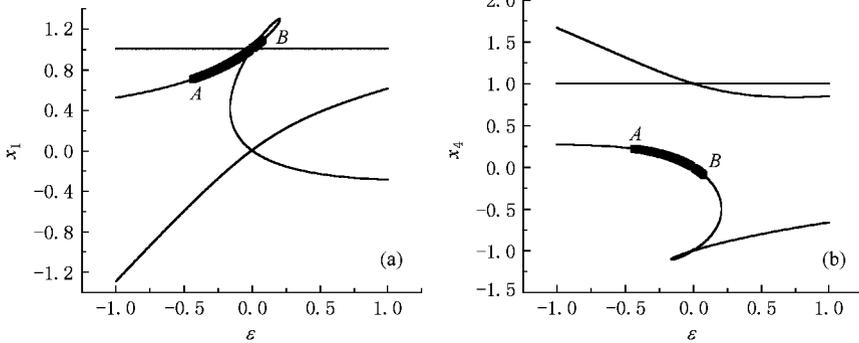


图 3  $a = -1.1, b = -2.0, c = 1.0$  时耦合电路系统的平衡点  $(x_{10} \ 0 \ 0, x_{40} \ 0 \ 0)$

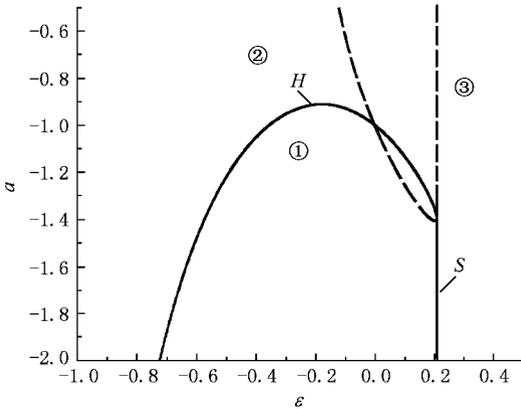


图 4  $b = -2.0, c = 1.0$  时  $(a-\epsilon)$  平面上的分岔集

从图 3 可以发现, 耦合系统在不同的参数条件下可能存在 3 到 5 个平衡点, 但只有当  $\epsilon \in [-0.4503 \ 0.0840]$  时有唯一的稳定平衡点, 此稳定的平衡点在 A 和 B 点失稳, 均由 Hopf 分岔进入周期振荡. 这一现象显然和图 4 中所给出的分岔集是一致的. 在图 4 分岔集中, 实线表示真实的分岔集, 而虚线表示满足 (6) 式和 (7) 式而实际并不存在的分岔

集. 它们将参数空间  $(a-\epsilon)$  划分成三个区域. 可以观察到, 在区域①中, 有一个稳定的平衡点. 而当参数穿越分岔集 H 进入区域②时, 平衡点失稳由 Hopf 分岔导致周期解. 在区域③中, 无有界解存在. 这不仅与图 3 的结果, 也于数值结果均相符合. 在此, 需要指出的是, 在区域②中, 当参数接近于 H 分岔集时, 有围绕平衡点的小幅振荡周期行为, 而当参数偏离 H 集时, 可以发现有许多丰富的动力学行为.

由于两个子系统可以分别呈现出平衡态, 周期振荡以及混沌振荡等不同的动力学特性, 下面我们考察两子系统不同运动模式相互作用时耦合系统的复杂动力学特性.

### 3. 周期运动之间的相互作用

当  $a = -0.8, b = -0.4, c = 1.0$  时, 耦合前两个子系统均为周期解, 进一步计算发现, 此时两个周期解的频率非常接近, 耦合后的系统相当于 1:1 内共振情形, 图 5 给出了其随耦合强度  $\epsilon$  变化的分岔图.

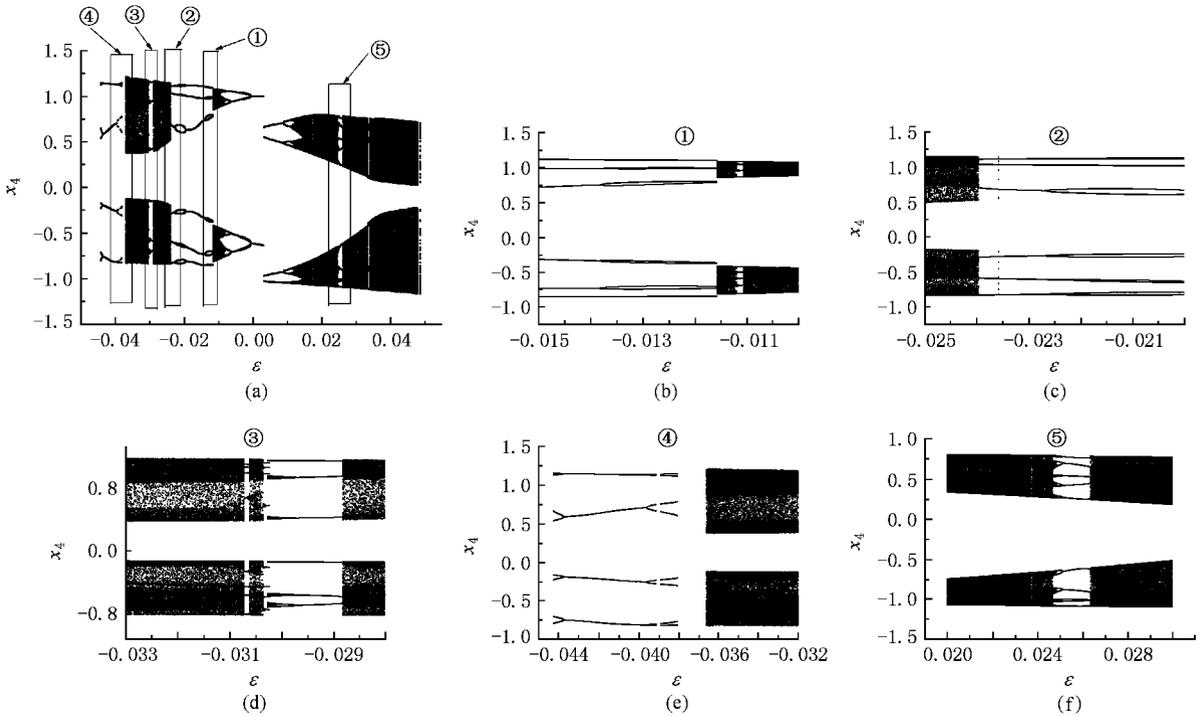


图5  $a = -0.8, b = -0.4, c = 1.0$  时耦合电路的分岔图

显然,当  $\epsilon = 0$  即不耦合时,两子系统均表现为周期运动,随着  $\epsilon$  的反向增加,耦合系统由倍周期分岔进入混沌(见图 5(a)),在混沌区域中存在着周期窗口(见图 5(b)).混沌结构在  $\epsilon = -0.01161$  时失稳,耦合系统经由周期 6 $\rightarrow$ 周期 3 $\rightarrow$ 周期 6 $\rightarrow$ 周期 3,最终导致另一混沌运动(参见图 5(c)和图 5(b)).值得注意的是,在  $\epsilon = -0.02357$  附近产生了周期急剧增加的现象(见图 5(c)).该混沌吸引子在  $\epsilon = -0.02885$  时结构失稳,导致另一周期 3 窗口.有趣的是,该窗口不再经历倍化过程,而是由周期增加分岔(period-adding bifurcation)进入混沌(见图 5(d)),

这种周期增加分岔主要是由于不稳定平衡点与周期窗口相互作用引起的.在  $\epsilon = -0.03658$  时混沌的轨迹逐渐趋于无穷,并在  $\epsilon = -0.03806$  时耦合系统再次稳定到周期解上(见图 5(e)).而正向增加  $\epsilon$ ,耦合系统由倍周期分岔进入类似于图 5(b)中的混沌吸引子,在  $\epsilon \in [0.02468, 0.02636]$  存在着倒倍周期过程的周期窗口(见图 5(f)).值得指出的是,随着  $\epsilon$  正向继续增大,两吸引子之间的相互作用增强,导致混沌吸引子结构在相空间中的不断扩大,这一点可以从分岔图中直接看出.

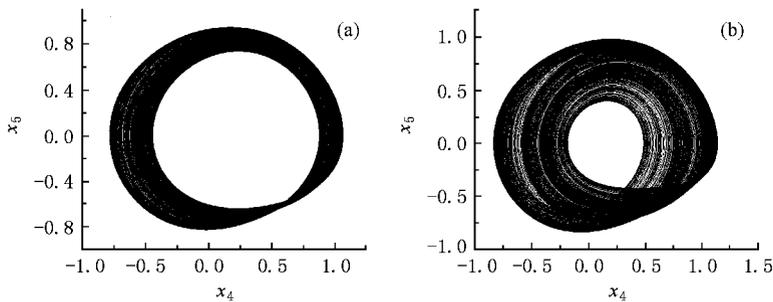


图6 不同参数条件下的混沌吸引子 (a)  $\epsilon = -0.01$  (b)  $\epsilon = -0.025$

### 4. 周期运动和混沌振荡的相互作用

当  $a = -0.8, b = -0.36, c = 1.0$  时, 耦合前两个子系统分别为周期运动和混沌. 为了进一步揭示其相互作用的演化过程, 引入基于 Poincare 映射的混沌运动的平均频率的概念<sup>[19]</sup>. 混沌运动的平均频率为

$$\bar{\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi N}{t(N)}, \quad (8)$$

其中  $t(N)$  表示相点第  $N$  次相交到 Poincare 截面时所需要的时间. 数值上发现当  $N$  为  $10^6$  时,  $\bar{\omega}$  能计算到小数点后 4—5 位有效数字, 本文取  $N = 10^7$ . 此时在  $\epsilon = 0$  时其混沌子系统的平均频率为  $\bar{\omega} =$

6.4613, 而周期子系统的频率为  $\omega = 6.3127$ . 显然, 在  $\epsilon = 0$  时周期子系统运动的频率接近于混沌子系统的平均频率. 我们首先给出耦合系统随  $\epsilon$  变化的分岔图(见图 7).

当  $\epsilon$  从 0 反向增加, 在耦合强度非常小时, 第二个子系统的混沌运动对第一个原先呈现为周期振荡的子系统影响很小, 虽然在相平面上, 第一个子系统的运动好像是周期行为(见图 8(a)), 但是必须指出的是, 经放大后其实是混沌状态, 只不过此时由于原周期运动的频率接近于混沌运动的平均频率, 两子系统的节律从整体上看是一致的, 因而第一个子系统混沌运动的轨迹集中在原先周期轨道的微小邻域内, 即围绕原周期轨道的微幅混沌振荡.

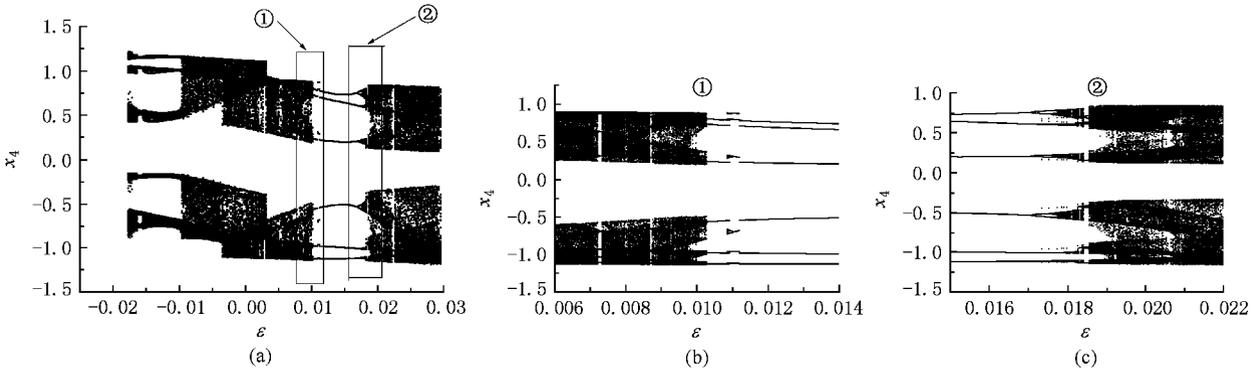


图 7  $a = -0.8, b = -0.36, c = 1.0$  耦合电路的分岔图

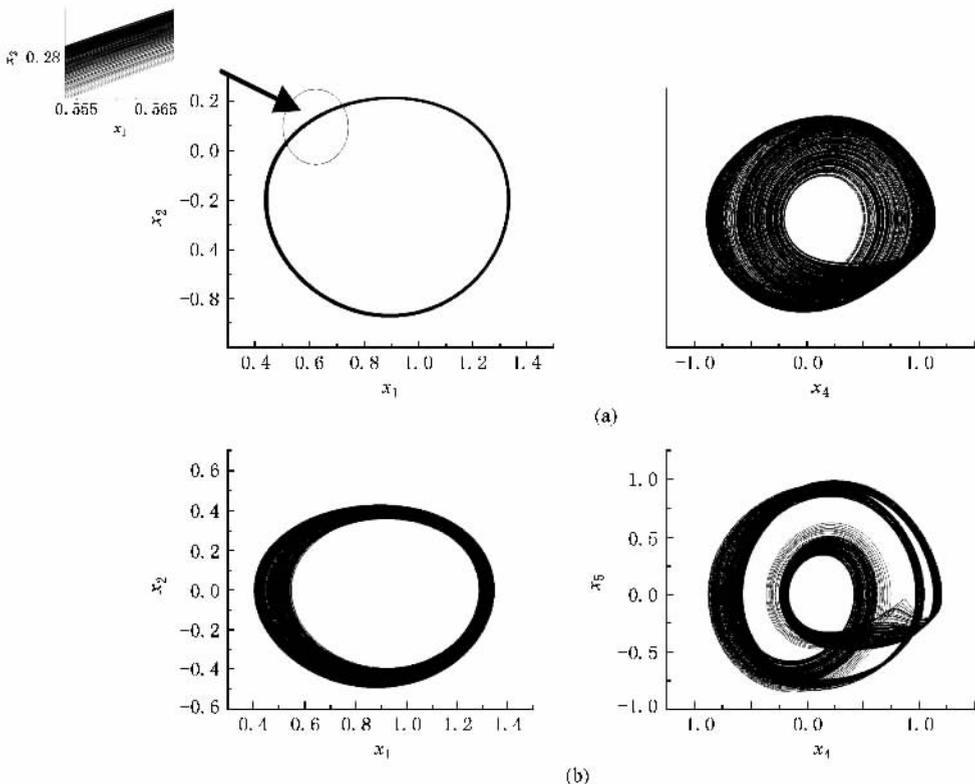


图 8 不同参数条件下的相轨迹 (a)  $\epsilon = -0.008$  (b)  $\epsilon = -0.0175$

随着  $\epsilon$  的进一步反向增加,两个子系统之间的相互作用增强,第二个子系统的混沌振荡对第一个子系统的影响加剧,从而导致第一个子系统围绕原先周期轨道振荡的振幅加大,混沌运动的特征越加明显,同时第二个子系统的混沌吸引子结构也会受第一个子系统的影响发生明显的变化(见图 8(b)).

而随着  $\epsilon$  从 0 逐渐向正向增加,当  $\epsilon$  很小时,两子系统之间的相互作用的效应依然非常弱(见图 9

(a)).随着  $\epsilon$  的进一步增大,两个子系统之间的相互作用增强,可以观察到各种形式的周期窗口(见图 7(b)(c)),而连接这些周期窗口的混沌吸引子表现为不同的结构形式(见图 9(b)(c)).对于混沌状态,在不同的耦合强度下,第二个子系统会使得第一个子系统围绕原先的周期轨道作混沌振荡,但是其振荡的幅值在不同的  $\epsilon$  下可以呈现出不同的形式,表现在其相应的相轨迹落在其周期轨道不同大小的

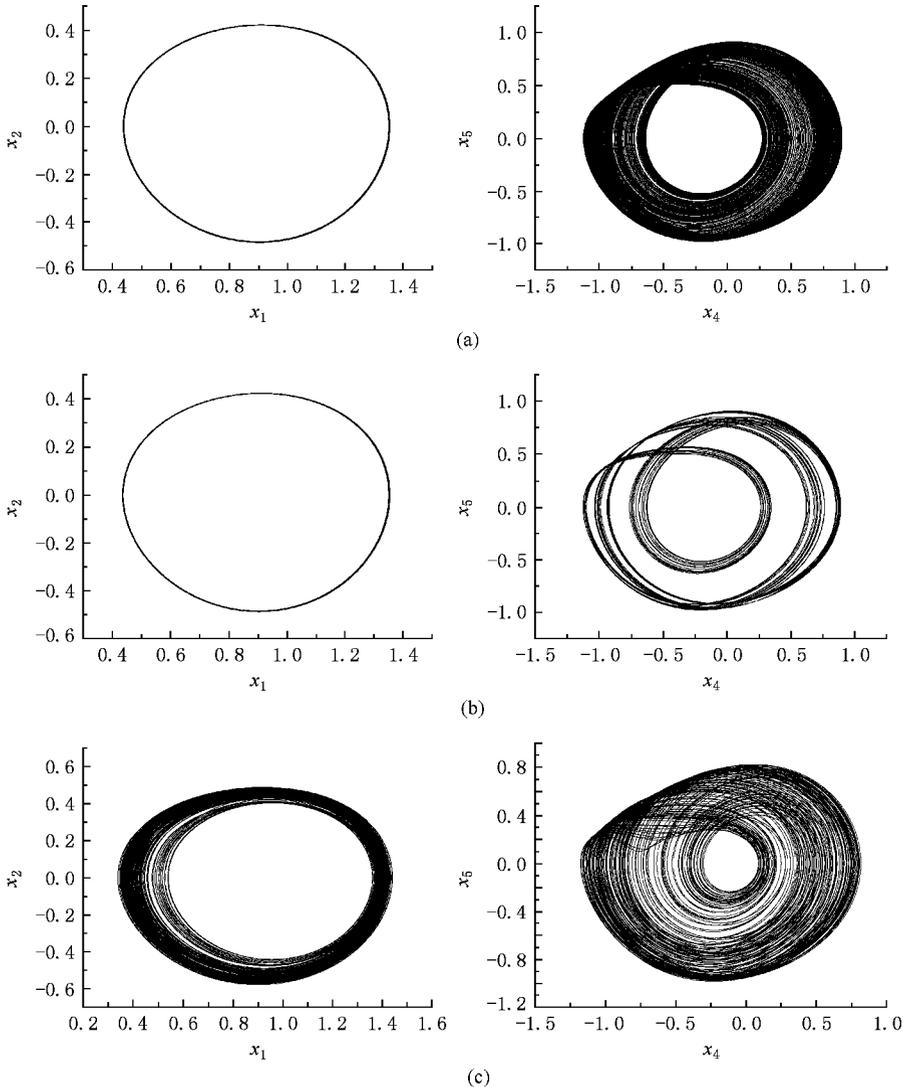


图 9 各种参数条件下的相轨迹 (a)  $\epsilon = 0.005$  (b)  $\epsilon = 0.0055$  (c)  $\epsilon = 0.029$

邻域内.

值得指出的是不同于周期振荡耦合条件下的动力学演化行为,混沌运动和周期振荡的耦合,随着  $\epsilon$  绝对值的增强,其耦合效应逐渐明显,混沌子结构使得周期子结构在其原先轨道上微幅振荡,而耦合强度直接影响到这一微幅振荡的激烈程度.相反地,周

期子结构会影响混沌子结构的形式,在一定的耦合强度下导致混沌子结构的失稳现象.

## 5. 结 论

在不同的参数条件下,非线性电路可以表现为不同形式的动力学特性,其不同运动之间的耦合不

仅增加了整个系统的向量场维数,同时,也会引起更为丰富的动力学现象.当两个周期运动子结构相互作用时,不同强度的耦合使得整个系统呈现出不同的混沌特点,在连接不同混沌之间的周期窗口中,存在典型的诸如周期3,周期倍化等运动特点,同时也可以观察到周期急剧增加,周期增加分岔等现象.当周期与混沌子结构相互作用时,随耦合强度的不同,

受混沌子结构的影响,周期子结构会在其原先轨道的邻域内作微幅振荡,其振荡的幅值随耦合强度的增加而增大,即其相互作用增强后,混沌的特征越加明显.相反,周期子结构在一定条件下可以导致混沌子结构的失稳,也可以引起混沌子结构的形式发生变化.因此,利用耦合强度参数可以调控整个耦合系统的动力学行为.

- [ 1 ] Rand R H , Holmes P J 1980 *Int. J. Nonlin. Mech.* **15** 387
- [ 2 ] Maccari A 2001 *Int. J. Nonlin. Mech.* **36** 335
- [ 3 ] Rogister F , Pieroux D , Sciamanna M , Mégret P , Blondel M 2002 *Optics Commu.* **207** 295
- [ 4 ] Wen G L , Xu D L 2004 *Phys. Lett. A* **321** 24
- [ 5 ] Yu H J , Liu Y Z 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3029 ( in Chinese ) [ 于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029 ]
- [ 6 ] Bi Q S 2004 *Int. J. Nonlin. Mech.* **39** 33
- [ 7 ] Bi Q S 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 337
- [ 8 ] Dong E Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4578 ( in Chinese ) [ 董恩增、陈增强、袁著祉 2005 物理学报 **54** 4578 ]
- [ 9 ] Roman A F , Alexander E H , Alexey A K 2006 *Phys. Lett. A* **358** 301
- [ 10 ] Mo X H , Tang G N , 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 2080 ( in Chinese ) [ 莫晓华、唐国宁 2004 物理学报 **54** 2080 ]
- [ 11 ] Soto M S , Tischendorf C 2005 *Appl. Numer. Math.* **53** 471
- [ 12 ] Rasmussen J , Mosekilde E , Reick C 1996 *Math. Comput. Simu.* **40** 247
- [ 13 ] Li S H , Cai H X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1687 ( in Chinese ) [ 李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687 ]
- [ 14 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 ( in Chinese ) [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055 ]
- [ 15 ] Kyprianidis I M , Stouboulos I N 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **17** 327
- [ 16 ] Chua L O , Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 885
- [ 17 ] Chen Z Y , Zhang X F , Bi Q S 2008 *Nonlin. Analysis: Real World Appl.* **9** 1158
- [ 18 ] Chen G R , Ueta T 2002 *Chaos in Circuits and Systems* ( Singapore : World scientific Publishing Company ) p156
- [ 19 ] Bi Q S , Shou Y , Liu Z R , Chen G R 2004 *Control Theory and Applications* **21** 932 ( in Chinese ) [ 毕勤胜、邹勇、刘曾荣、陈关荣 2004 控制理论与应用 **21** 932 ]

## Complicated oscillations in coupled electrical circuits<sup>\*</sup>

Zhang Xiao-Fang Chen Zhang-Yao Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

( Faculty of Science , Jiangsu University , Zhenjiang 212013 , China )

( Received 24 April 2008 ; revised manuscript received 2 July 2008 )

### Abstract

The dynamical evolution process of the coupled system connecting two nonlinear electrical circuits with suitable circuit is investigated. The bifurcation behavior as well as the ways to chaos of the two subsystems is presented. It is pointed out when both of the two subsystems behave as periodic, the coupled system may also be led to chaos via cascading of period-doubling bifurcations. Meanwhile, in the chaotic region, critical increase of period as well as period-adding bifurcation can be observed. As to the interaction between periodic movement and the chaotic oscillation, the original periodic subsystem may chaotically oscillate around the original orbit. The amplitude associated with the oscillation increases rapidly, resulting in the obvious chaotic characteristics. On the contrary, the periodic subsystem may not only cause the instability of the chaotic subsystem, but also lead to change of the chaotic structures.

**Keywords** : nonlinear electrical circuit , coupling strength , bifurcation , chaos

**PACC** : 0545 , 0547

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 20476041 ).

<sup>†</sup> E-mail : qbi@ujs.edu.cn