

在不同扩散系数下反应扩散平面波的折射^{*}

吕耀平 顾国锋 陆华春 戴 瑜 唐国宁

(广西师范大学物理与电子工程学院, 桂林 541004)

(2008 年 9 月 12 日收到, 2008 年 9 月 26 日收到修改稿)

在二维复金兹堡-朗道方程描述的反应扩散振荡系统中,就扩散对平面波折射率的影响进行了数值研究,从 Snell 定律出发导出了折射率的解析表达式.数值和理论结果表明:在纯扩散情况下,平面波的折射满足 Snell 折射定律.扩散只影响着平面波折射率的大小.在同时存在反应扩散情况下,只有在适当的扩散系数和系统参数下,平面波的折射才满足 Snell 折射定律.这些结果表明扩散系数对折射规律和折射率都有影响.

关键词:复金兹堡-朗道方程,扩散,折射率

PACC: 0547, 4225G

1. 引 言

在过去的几十年里对反应扩散波的研究取得了很大的进展^[1-6],特别是人们对空间均匀系统中的反应扩散波的最基本性质有了清楚的认识^[7,8].反应扩散波广泛存在于生物系统^[9]、化学系统^[3]和物理系统^[10].由于在生物激发系统、生态系统等自然系统内,普遍存在反应物质的浓度不均匀和流体的流动,不同的膜和凝胶体被嵌入到结构中,所以许多自然系统一般都是非均匀的.对于一个非均匀系统,不同区域的反应和扩散性质是不同的,而且会导致波速的变化,因此有必要弄清楚反应扩散波是如何越过两种不同介质的分界面的.

实验和数值模拟结果表明^[11,12]:反应扩散系统中波的折射满足光学中 Snell 定律.特别是文献^[13]用实验研究了在纯扩散系统(即系统内只有氢气)中边界对粒子扩散的影响,系统由两层氢气组成,这两层氢气的扩散系数相差非常大,他们发现氢气扩散锋从小扩散系数区达到扩散系数很大的区域表面时发生折射,在小角度下的折射满足 Snell 定律.但是对于反应扩散系统中的化学波,实验表明^[8]:当化学波从扩散系数小的区域入射到扩散系数很大的区域表面时不发生折射,只发生反射.这些结果表明扩散对波的折射有影响,但是还存在哪些影响目前仍不

清楚.

本文以二维复金兹堡-朗道方程为模型,研究了扩散对波折射率的影响.首先假设折射满足 Snell 定律,从理论导出折射率的表达式,该折射率的表达式与扩散系数和系统参数有关,然后用数值模拟方法从介质参数相同和不同两个方面研究了不同的扩散系数对折射率的影响.在折射满足 Snell 定律的情况下,数值结果与理论结果一致,表明扩散对折射率有影响.研究还发现:在适当的系统参数和扩散系数下,扩散对折射规律也有影响,导致 Snell 定律不适用.

2. 模 型

复金兹堡-朗道方程描述的系统是一个典型的反应扩散振荡系统,其方程表示为^[14]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - (1 + i\alpha)|A|^2 A + D(1 + i\beta)\nabla^2 A, \quad (1)$$

其中 A 是复数, i 是单位虚数, α 和 β 分别为两个参数, D 为扩散系数.在数值解二维方程(1)中,对时间离散采用二阶龙格库塔法,对空间离散采用二阶差分法,采用无流边界条件,并固定取空间步长为 $\Delta x = \Delta y = 1.0$,时间步长取为 $\Delta t = 0.05$,计算区域被划分成 $N_x \times N_y = 400 \times 300$ 个格点.

为了在系统中产生平面波,在方程(1)的右边加

* 国家自然科学基金(批准号:10765002),广西师范大学博士启动基金和引进人才基金资助的课题.

上驱动项:

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\omega_{in} t}, & (x, y) \in \Omega_1, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 ω_{in} 为驱动的频率, Ω_1 为驱动力作用的区域, 该区域位于系统左边界上, 其形状为 2×300 格点的长条.

3. 折射率的理论推导

在平面波的情况下, 方程 (1) 可以简化为一维情况, 且存在稳定的平面波解

$$A(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (1) 式并利用分离变量法得到

$$k = \sqrt{\frac{\omega - \alpha}{D(\beta - \alpha)}}, \quad (4)$$

$$A_0 = \sqrt{1 - Dk^2}. \quad (5)$$

由于 k 为波数, 它与波速 c 和角频率 ω 的关系为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad (6)$$

考虑 Snell 定律^[11],

$$\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i} = \frac{c_r}{c_i}, \quad (7)$$

其中角标 r, i 分别代表折射和入射, θ 为角度, 采用

光学折射率定义 $n = \frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i}$ 得到平面波的折射率为

$$n = \pm \frac{\omega_r}{\omega_i} \sqrt{\frac{D_r(\beta_r - \alpha_r)(\omega_i - \alpha_i)}{D_i(\beta_i - \alpha_i)(\omega_r - \alpha_r)}}. \quad (8)$$

当入射与折射线分布在法线的两侧时, 发生正常折射, θ_r, n 取正值. 当入射与折射线分布在法线的同侧时, 发生反常折射, θ_r, n 取负值.

4. 折射率的数值模拟结果

假设两介质的分界面为平面, 分界面左边介质为入射介质, 其扩散系数为 D_i , 分界面右边介质为折射介质, 其扩散系数为 D_r . 边界驱动力在入射介质中产生的平面波既可以是正向平面波(传播方向是背离波源方向), 也可以是反向平面波(传播方向是朝着波源方向), 依赖于介质参数和驱动频率的选取. 为便于讨论扩散对折射的影响, 固定取入射角为 30° .

首先研究纯扩散情况下扩散对波折射的影响, 这时分界面两边的物质相同, 但是扩散系数不同. 因

此在数值研究中我们选取参数 $\alpha_i = \alpha_r = 0.5$, $\beta_i = \beta_r = -1.4$, 边界驱动频率 $\omega_{in} = 0.3$. 在此系统参数下, 边界驱动力在入射介质(实质是同一物质的不同相)中产生一个反向平面波.

从数值模拟结果得到: 平面波传到两种介质分界面时产生正常折射, 入射波的频率与折射波的频率相同, 所以折射率公式 (8) 简化为

$$n = \sqrt{\frac{D_r}{D_i}}. \quad (9)$$

可见当固定 D_i 时, $n \propto \sqrt{D_r}$. 图 1 给出了固定入射介质的扩散系数 $D_i = 1.0$, 折射介质的扩散系数 D_r 在 $[0.4, 3.0]$ 范围内取值时折射率 n 随 D_r 的变化. 这里不取很大的扩散系数 D_r , 是考虑了 D_r 过大会导致折射角接近 90° , 折射线容易受边界影响而弯曲, 影响测量精度. 图 1 的数值模拟结果是通过测量入射角与折射角后根据折射率定义求得, 测量角度的误差小于 $\pm 1^\circ$, 而理论结果是根据 (9) 式计算得到. 图 1 结果表明数值模拟结果与理论结果一致, 这些结果也与扩散峰折射实验结果^[13]符合, 一般的折射行为如图 2 所示, 从图 2 可以看出: 折射为正常折射.

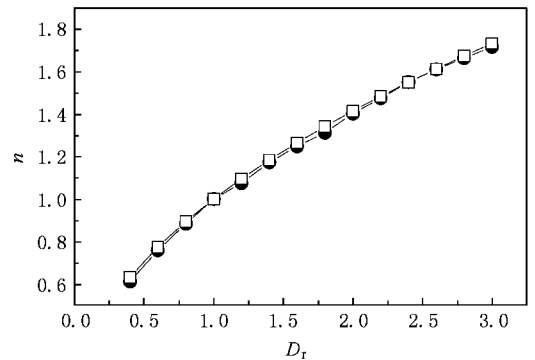


图 1 折射率 n 随折射介质的扩散系数 D_r 的变化(图中方块代表 (9) 式得到的理论结果, 黑圆圈代表数值计算结果. 系统参数为 $\alpha_i = \alpha_r = 0.5$, $\beta_i = \beta_r = -1.4$, 驱动频率 $\omega_{in} = 0.3$, 固定 $\theta_i = 30^\circ$, $D_i = 1.0$. 在实际测量中, 所有折射角误差小于 $\pm 1^\circ$, 在误差范围内折射率的模拟结果与理论结果一致)

为了了解折射率 n 随入射介质的扩散系数 D_i 的变化, 图 3 给出了固定折射介质的扩散系数 $D_r = 1.0$, 入射介质的扩散系数 D_i 在 $[0.4, 3.0]$ 范围内取值时折射率 n 随入射介质的扩散系数 D_i 的变化. 图 3 结果表明数值模拟与理论结果一致. 从图 1 和图 3 可以看出: 在扩散系数相差不太大的情况下, 当 D_r

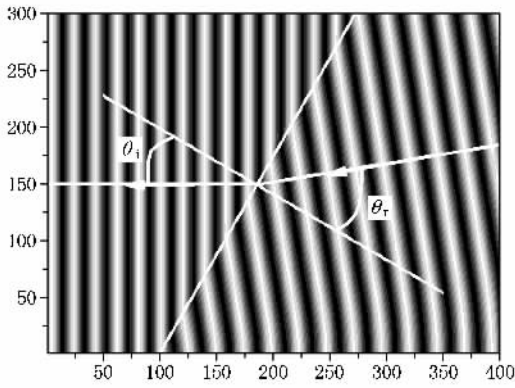


图2 在纯扩散系统中一般波折射斑图(A 的实部斑图). 入射区扩散系数 $D_i = 1.0$, 折射区扩散系数 $D_r = 1.6$, 其他参数 α, β 同图1. 箭头代表波的传播方向, 入射角 $\theta_i = 30^\circ$, 测得折射角 $\theta_r = 39^\circ$ (折射率 $n = 1.2586$), 理论上折射角应为 39.23° (折射率应为 1.2649)

$< D_i$ 时, 折射率小于 1; 当 $D_r > D_i$ 时, 折射率大于 1. 扩散对折射率有影响, 但折射仍然满足 Snell 定律. 应当指出, 取不同的入射角, 我们也得到折射是服从 Snell 定律的结论.

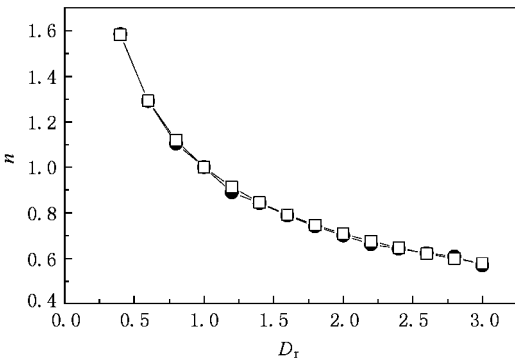


图3 在纯扩散系统中折射介质取不同扩散系数情况下折射率 n 随入射介质的扩散系数 D_r 的变化. 固定 $\theta_i = 30^\circ, D_i = 1.0$, 其他参数与图1 相同. 图中方块代表理论结果, 黑圆圈代表数值计算结果

现在我们来研究同时存在反应扩散情况下扩散对波折射的影响, 这时分界面两侧的介质除扩散系数不同外, 其他参数也不同. 因此我们选择入射介质参数 $\alpha_i = -0.5, \beta_i = 1.4$; 折射介质 $\alpha_r = 0.5, \beta_r = -1.4$; 驱动频率 $\omega_{in} = 0.02$; 入射角固定为 30° . 数值研究表明, 在这种情况下, 入射波是正向平面波, 折射波是反向平面波, 如果入射波频率与折射波频率相同, 平面波在折射介质中产生反常折射. 如果入射波频率与折射波频率不相同, 则得不出折射规律.

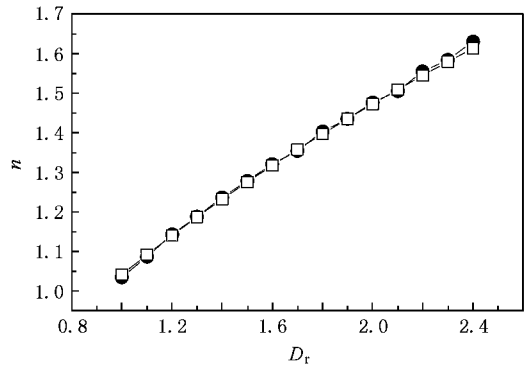


图4 在反应扩散系统中折射介质取不同扩散系数情况下折射率 n 随折射介质的扩散系数 D_r 的变化. 图中方块代表理论结果, 黑圆圈代表数值计算结果. 系统参数 $\alpha_i = -0.5, \beta_i = 1.4, \alpha_r = 0.5, \beta_r = -1.4, \omega_{in} = 0.02$, 固定 $\theta_i = 30^\circ, D_i = 1.0$

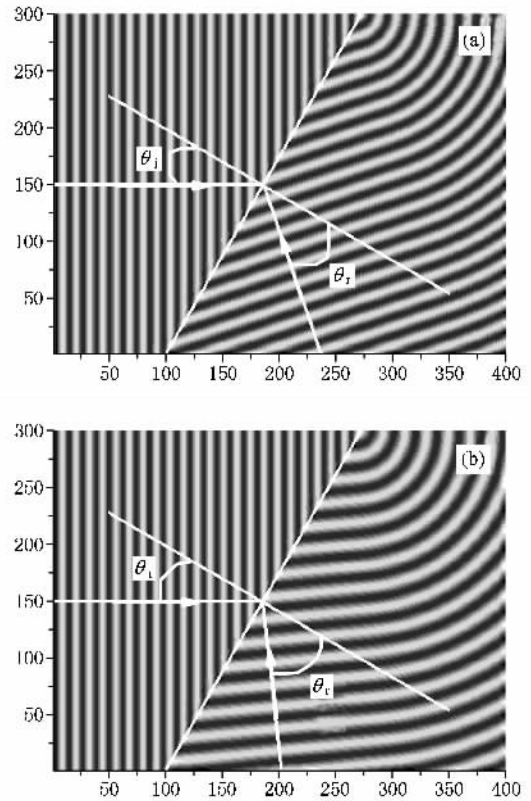


图5 在反应扩散系统中折射介质取不同扩散系数情况下的一般波折射斑图(参数 α, β 同图4, 箭头代表波的传播方向, 入射区 $D_i = 1.0$, 入射角 $\theta_i = 30^\circ$). (a) 中折射区 $D_r = 1.6$, 测得折射角 $\theta_r = 41^\circ$ (理论上折射角约等于 41.17°). (b) 中折射区 $D_r = 2.4$, 测得折射角 $\theta_r = 53^\circ$ (理论上折射角约等于 53.73°). 图(b) 的测量误差比(a) 次)

如图4 给出在固定入射介质的扩散系数 $D_i = 1.0$, 折射率 n 随折射介质的扩散系数 D_r 的变化(为了与图1 和图3 对应, 折射角和折射率都取正值), 考虑

到大的 D_r 值,折射波列受边界影响而弯曲,导致测量误差较大,所以 D_r 在 [1.0—2.4] 范围内取值,这时入射波频率与折射波频率相同.从图 4 可以看出:数值模拟结果与理论结果几乎重合,表明当入射波频率与折射波频率相同时,反应扩散波的折射是服从 Snell 定律的,一般的反常折射行为如图 5 所示.

应当指出:对于反应扩散系统,在图 4 的系统参

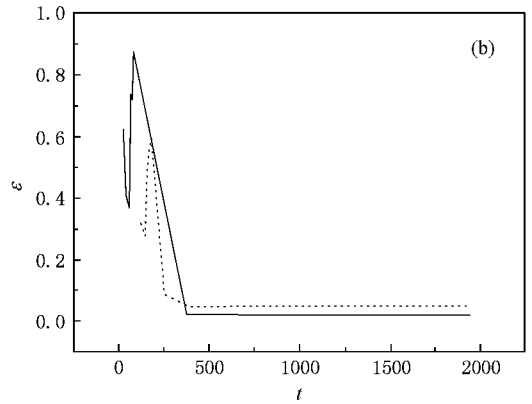
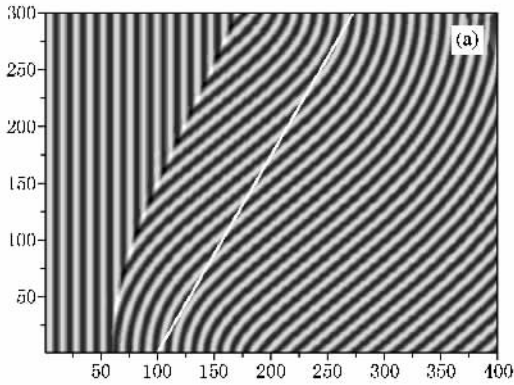


图 6 在反应扩散系统中不稳定的折射斑图及响应频率.参数 α, β 选取同图 4,入射介质的扩散系数 $D_i = 1.0$,折射介质的扩散系数 $D_r = 0.8$.(a)图中中间的直线代表两介质的分界面.(b)图中的实线代表入射平面波的响应频率(数值计算中取格点(50,200)进行观测),虚线代表折射平面波的响应频率(数值计算中取格点(300,200)进行观测).稳定时折射平面波响应频率大于入射平面波响应频率($\omega_r = 0.04, \omega_i = 0.02$)

5. 结 论

本文采用复金兹堡-朗道方程研究了扩散对波折射的影响,在假设波折射服从 Snell 定律的情况下,从理论上给出了波折射率与扩散系数和系统参数的关系,将数值计算得到的波折射率与理论结果比较得到:在纯扩散情况下,当两介质的扩散系数相

数下,当折射介质的扩散系数 $D_r < 1.0$ 时,入射波频率与折射波频率不相同,形成不了折射平面波形,一般的平面波传播行为如图 6 所示.显然在此情况下折射是不服从 Snell 定律,这表明在入射波是正向平面波,而折射波是反向平面波时,不适当的扩散系数导致折射波频率高于入射波频率(见图 6(b)),入射波被折射波驱离分界面而不能形成折射.

差不是太大时,折射满足 Snell 折射定律,扩散系数的大小只是改变折射率的大小.在反应扩散系统中,当入射波与折射波频率相同时,折射满足 Snell 折射定律,折射率与扩散系数有关.不适当的扩散系数和系统参数将导致折射波频率高于入射波频率,不存在折射规律.可见扩散对反应扩散平面波的折射率和折射规律都有影响,这些规律让我们对反应扩散波的动力学行为有更进一步的认识.

- [1] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [2] Winfree A T 1972 *Science* **175** 634
- [3] Ross J, Müller S C, Vidal C 1988 *Science* **240** 460
- [4] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 852
- [5] Cavalleri G, Tonni E 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3478
- [6] Alonso S, Sendiña-Nadal I, Pérez-Muñuzuri V, Sancho J M, Sagués F 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 078302
- [7] Ouyang Q 2001 *Physics* **30** 30 (in Chinese) [欧阳颀 2001 物理 **30** 30]

- [8] Miyazaki J, Kinoshita S 2007 *Phys. Rev. E* **76** 066201
- [9] Glass L 1996 *Physics Today* **8** 40
- [10] Ecke R E, Hu Y, Mainieri R, Ahlers G 1995 *Science* **269** 1704
- [11] Zhabotinsky A M, Eager M D, Epstein I R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1526
- [12] Sainhas J, Dilão R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5216
- [13] Remhof A, Wijngaarden R J, Griessen R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 145502
- [14] Aranson I S, Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99

Refraction of reaction-diffusion plane wave for different diffusion coefficients^{*}

Lü Yao-Ping Gu Guo-Feng Lu Hua-Chun Dai Yu Tang Guo-Ning

(College of Physics and Electronic Engineering , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

(Received 12 September 2008 ; revised manuscript received 26 September 2008)

Abstract

The effect of diffusion on the refraction of plane wave in two-dimensional reaction-diffusion system described by complex Ginzburg-Landau equation are numerically investigated. We derive the refractive index of plane wave from Snell's law. The numerical and theoretic results show that the refraction of plane wave in a simple purely diffusive system obeys Snell's law, i.e., diffusion only impacts the refractive index of plane wave. However, the refraction of plane wave in reaction-diffusion system obeys Snell's law only for proper diffusion coefficients and system parameters. These results show that diffusion impacts the refraction law and refractive index.

Keywords : complex Ginzburg-Landau equation , diffusion , refraction rate

PACC : 0547 , 4225G

^{*} Supported by National Natural Science Foundation of China(10765002) and a Internal Grant of Guangxi Normal University.