第 58 卷 第 6 期 2009 年 6 月
1000-3290/2009/58(06)/3617-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.6, June, 2009

Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量

方建会†
(中国石油大学物理科学与技术学院,东营 257061)
(2007 年 11 月 12 日收到;2008 年 2 月 26 日收到修改稿)

研究 Lagrange 系统的 Mei 对称性直接导致的一种守恒量. 给出系统的 Mei 对称性的定义和判据方程, 得到系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量的条件和形式,并举例说明结果的应用.

关键词:Lagrange 系统, Mei 对称性, 守恒量
PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要的理论意义和实际意义,在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位. 利用对称性寻求力学系统的守恒量的近代方法主要有:Noether 对称性[1,2]、Lie 对称性[2,3]和 Mei 对称性[4—8]. Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的一种不变性. Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性. Mei 对称性是本世纪初梅凤翔[4]提出的不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性, 它是指系统运动微分方程中的动力学函数经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性. Mei 对称性能直接导致 Mei 守恒量,间接导致 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量[8,9]. 最近文献[10]给出了 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的广义 Mei 守恒量. 本文研究 Lagrange 系统的 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量,给出这种守恒量存在的条件和形式,举例说明其应用.

2. 系统的 Mei 对称性及其判据方程

设力学系统由 N 个质点组成, 系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$确定, 系统受到的约束是理想双面完整约束, 系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0, \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$)为系统的 Lagrange 函数. 由方程(1)描述的系统为 Lagrange 系统. 引入 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{2}$$

则方程(1)可简写为

$$E_s(L)=0. \tag{3}$$

引进无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{4}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元. 在无限小变换(4)式下, $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$变成 $L^*=L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)$.

定义 如果用变换后的 Lagrange 函数 L^* 代替变换前的 L 时,方程(3)的形式保持不变,即

$$E_s(L^*)=0, \tag{5}$$

则称这种不变性为 Lagrange 系统的 Mei 对称性.

展开 L^* 有

$$\begin{aligned}L^*&=L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)\\&=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{7}$$

将(6)式代入方程(5),忽略 ε^2 及以上高阶小量项, 并利用方程(3),可得

$$E_s[X^{(1)}(L)]=0. \tag{8}$$

于是有

† E-mail:fangjh@hdpu.edu.cn

判据 对 Lagrange 系统(3),若无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(8),则相应的不变性是系统的 Mei 对称性.

称方程(8)为 Lagrange 系统 Mei 对称性的判据方程.

3. 系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量

已有的研究工作表明[8],如果 Lagrange 系统 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_M = G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足条件

$$X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] + \dot{G}_M = 0, \quad (9)$$

则系统的 Mei 对称性可直接导致 Mei 守恒量

$$I_M = X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M = \text{const}. \quad (10)$$

Lagrange 系统 Mei 对称性能直接导致 Mei 守恒量,也能直接导致广义 Mei 守恒量[10].除此之外,它还能否直接导致其他形式的守恒量?下述定理给出了 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量,得到了其存在的条件和形式.

定理 如果 Lagrange 系统(3)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足条件

$$\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} + \dot{G} = 0, \quad (11)$$

则系统的 Mei 对称性直接导致如下形式的一种守恒量:

$$I = X^{(1)}(L) - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s + G = \text{const}. \quad (12)$$

证明 将 I 对 t 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X^{(1)}(L)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right]\dot{q}_s \\ &\quad - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \dot{G} \\ &= \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\dot{q}_s \\ &\quad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right]\dot{q}_s + \dot{G} \\ &= \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} - E_s[X^{(1)}(L)]\dot{q}_s + \dot{G}, \end{aligned} \quad (13)$$

将 Mei 对称性的判据方程(8)和(11)式代入(13)式,得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0. \quad (14)$$

守恒量(12)是 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的不同于 Mei 守恒量和广义 Mei 守恒量的另一种形式的守恒量.

4. 算 例

力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 q_2 + t^2, \quad (15)$$

试研究系统 Mei 对称性直接导致的守恒量(12)和 Mei 守恒量(10).

运动微分方程(3)给出

$$\ddot{q} = -q_2, \ddot{q}_2 = -q_1, \quad (16)$$

做计算有

$$\begin{aligned} X^{(1)}(L) &= (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2 \\ &\quad - \xi_1 q_2 - \xi_2 q_1 + 2\xi_0 t. \end{aligned} \quad (17)$$

取生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_2, \xi_2 = q_1, \quad (18)$$

则

$$X^{(1)}(L) = 2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2, \quad (19)$$

于是有

$$E_s[X^{(1)}(L)] = 0. \quad (20)$$

可见对生成元(18),系统具有 Mei 对称性.

对生成元(18),由(11)式可得

$$G = 0, \quad (21)$$

由(12)式得系统 Mei 对称性导致的守恒量

$$I = -2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2 = \text{const}. \quad (22)$$

对生成元(18),由(9)式可求得

$$G_M = -2q_1\dot{q}_1 - 2q_2\dot{q}_2, \quad (23)$$

由(10)式得系统 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量是平凡的.

5. 结 论

本文给出了 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量,这种守恒量不同于已找到的 Mei 守恒量和广义 Mei 守恒量.本文的结果可以推广到存在非势力的一般完整力学系统和非完整力学系统,对完善和发展力学系统的 Mei 对称性与守恒量理论具有重要价值.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **K** Ⅰ，Ⅱ 235

[2] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群李代数对约束力学系统的应用(北京：科学出版社)]

[3] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[4] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[5] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[6] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269

[7] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)]

[9] Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2980 (in Chinese)[张 毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[10] Fang J H，Ding N，Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887

A kind of conserved quantity of Mei symmetry for Lagrange system

Fang Jian-Hui†

(*College of Physics Science and Technology*，*China University of Petroleum*，*Dongying* 257061，*China*)

(Received 12 November 2007；revised manuscript received 26 February 2008)

Abstract

A kind of conserved quantity which is directly induced by Mei symmetry of Lagrange system is studied. The definition and criterion of Mei symmetry for Lagrange system are given. The condition under which Mei symmetry can lead to a conserved quantity and the form of the conserved quantity are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords：Lagrange system，Mei symmetry，conserved quantity

PACC：0320

† E-mail：fangjh@hdpu.edu.cn