第 58 卷 第 6 期 2009 年 6 月
1000-3290/2009/58(06)/3665-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.6,June,2009

纠缠态投影算符的积分*

李体俊†

(菏泽学院物理系,菏泽 274015)

(2008 年 9 月 1 日收到;2008 年 10 月 28 日收到修改稿)

借助湮没算符的本征值方程及其本征态的完备性,证明了纠缠态的完备性.在此基础上,利用纠缠态所满足的本征值方程,得到了非对称纠缠态投影算符的积分.

关键词:完备性,纠缠态,投影算符,积分
PACC:0365

1.引 言

在量子力学中,考虑到算符一般具有不可交换性,对具有连续变量的投影算符进行积分时,不能直接应用牛顿-莱布尼兹公式.算符的不可交换性给量子系统的数学处理带来了复杂性.尽管可以把投影算符中的变量与算符分离,然后对变量积分,但这样做太复杂.必须寻找另外更简单、更有效的方法.范洪义等提出了有序算符内的积分技术(IWOP)[1—5].利用此技术,不必把投影算符中的变量与算符分离,就能在有序算符内对变量直接实施积分.

在量子力学中,虽然算符与其本征值具有不同的性质,但它们之间有关联,可以通过算符的本征值方程相互转换.利用这一点,能使量子力学中的一些数学处理简单化,比如求非对称投影算符的积分[6],证明一些新表象的完备性.本文在文献[6]基础上,首先利用湮没算符的本征值方程及其本征矢的完备性,计算对称纠缠态投影算符的积分,证明纠缠态的完备性.然后利用纠缠态所满足的本征值方程及纠缠态的完备性,计算一些非对称纠缠态投影算符的积分.

2.对称纠缠态投影算符的积分

纠缠态$|\eta\rangle$为两粒子相对位置 $x_1 - x_2$ 与总动量 $p_1 + p_2$ 的共同本征态,在双模 Fock 空间中表示为[4,5](取 $\hbar = \omega = m = 1$)

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta a_1^+ - \eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+\right)|0,0\rangle, \tag{1}$$

其中 η 为一复数,$|0,0\rangle \equiv |0\rangle_1 |0\rangle_2$ 为双模真空态,$(a_i, a_i^+)(i = 1,2)$为玻色湮没和产生算符,且 $x_i = (a_i + a_i^+)/\sqrt{2}$,$p_i = (a_i - a_i^+)/\sqrt{2}\mathrm{i}$.

考虑到单模相干态$|z\rangle_1$ 表示为[7]

$$|z\rangle_1 = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + z a_1^+\right)|0\rangle_1, \tag{2}$$

纠缠态$|\eta\rangle$又可表示为

$$\begin{aligned}|\eta\rangle &= \exp(-\eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+)|z = \eta\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &= \exp(a_1^+ a_2^+)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a_2^+)^m}{m!} \\ &\quad \times \eta^{*m}|z = \eta\rangle_1|0\rangle_2,\end{aligned} \tag{3}$$

对称的纠缠态投影算符为

$$\begin{aligned}|\eta\rangle\langle\eta| &= \exp(a_1^+ a_2^+)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a_2^+)^m}{m!} \\ &\quad \times \eta^n |z = \eta\rangle_1 |0\rangle_2\, {}_2\langle 0|\, {}_1\langle z = \eta|\eta^{*m} \\ &\quad \times \frac{(-a_2)^n}{n!}\exp(a_1 a_2).\end{aligned} \tag{4}$$

利用本征值方程

$$\eta^n |z = \eta\rangle_1 = a_1^n |z = \eta\rangle_1, \tag{5}$$

(4)式化为

$$|\eta\rangle\langle\eta| = \exp(a_1^+ a_2^+)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a_2^+)^m}{m!}$$

* 菏泽学院自然科学基金(批准号:XY08WL02)资助的课题.

† E-mail:hz-ltj@163.com

$$\times a_1^n | z = \eta\rangle_1 |0\rangle_{2\,2}\langle 0|_1\langle z = \eta| a_1^{+m} \times \frac{(-a_2)^n}{n!}\exp(a_1 a_2). \tag{6}$$

借助于相干态的超完备性

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} | z = \eta\rangle_{1\,1}\langle z = \eta| = 1, \tag{7}$$

得到对称纠缠态投影算符的积分

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = \exp(a_1^+ a_2^+)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a_2^+)^m}{m!} \times a_1^n |0\rangle_{2\,2}\langle 0| a_1^{+m} \times \frac{(-a_2)^n}{n!}\exp(a_1 a_2). \tag{8}$$

为了化简(8)式,用符号: :表示算符的正规乘积[8],:W_2 :表示第二模真空投影算符$|0\rangle_{2\,2}\langle 0|$的正规乘积,即

$$|0\rangle_{2\,2}\langle 0| = :W_2:; \tag{9}$$

把(9)式代入(8)式,整理得

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = \exp(a_1^+ a_2^+)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a_2^+)^m}{m!} :W_2: \times \exp(-a_1 a_2) a_1^{+m}\exp(a_1 a_2). \tag{10}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式,(10)式整理为

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = :\exp(a_2 a_2^+) W_2: = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_2^{+m}}{\sqrt{m!}}|0\rangle_{2\,2}\langle 0|\frac{a_2^m}{\sqrt{m!}} = \sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle_{2\,2}\langle m| = 1. \tag{11}$$

由此可见,对称纠缠态投影算符的积分值为单位算符,说明纠缠态具有完备性.

3. 非对称纠缠态投影算符的积分

纠缠态$|\eta\rangle$也是算符$(a_1^+ - a_2)$与算符$(a_1 - a_2^+)$的共同本征态,即

$$(a_1 - a_2^+)|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle, \quad (a_1^+ - a_2)|\eta\rangle = \eta^*|\eta\rangle. \tag{12}$$

根据(12)式,把非对称的纠缠态投影算符转化为对称的,然后利用纠缠态的完备性,就能得到非对称纠缠态投影算符的积分值.举例如下.

举例 1 积分$\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\mu\eta|$($\mu$为一复数)

由(1)式得

$$\langle\mu\eta| = \exp\left(-\frac{|\mu\eta|^2}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n,m|(\mu^*)^m\mu^n \times \frac{(\eta^*)^m}{\sqrt{m!}}\frac{(-\eta)^n}{\sqrt{n!}}\exp(a_1 a_2), \tag{13}$$

其中$\langle n,m| = {}_2\langle n|_1\langle m| = \langle 0,0|\frac{a_2^n}{\sqrt{n!}}\frac{a_1^m}{\sqrt{m!}}$,是粒子数算符$N_i$的本征态.

利用本征值方程

$$\langle n,m|(\mu^*)^m\mu^n = \langle n,m|(\mu^*)^{N_1}\mu^{N_2}, \tag{14}$$

(13)式写为

$$\langle\mu\eta|\exp\left[\frac{1}{2}(\mu\eta)(\mu\eta)^*\right] = \langle\eta|\exp\left(\frac{1}{2}\eta\eta^*\right)e^{-a_1 a_2}(\mu^*)^{N_1}\mu^{N_2}e^{a_1 a_2}. \tag{15}$$

利用(12)式,(15)式可写为

$$\langle\mu\eta| = \langle\eta|\exp\left[\frac{1}{2}(a_1 - a_2^+)(a_1^+ - a_2)\right] \times e^{-a_1 a_2}(\mu^*)^{N_1}\mu^{N_2}e^{a_1 a_2} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(a_1 - a_2^+)(a_1^+ - a_2)\right]. \tag{16}$$

设$\mu = \mu_0 e^{i\theta}$ ($\mu_0 > 0$),利用 Baker-Hausdorff 公式,(16)式化为

$$\langle\mu\eta| = \langle\eta|\exp[(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2 - 1)\ln\mu_0 + i\theta(N_2 - N_1)]. \tag{17}$$

考虑到纠缠态的完备性,积分

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\mu\eta| = \int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|\exp[(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2 - 1)\ln\mu_0 + i\theta(N_2 - N_1)] = \exp[(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2 - 1)\ln\mu_0 + i\theta(N_2 - N_1)]. \tag{18}$$

当$\mu_0 = 1$时,

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle e^{i\theta}\eta| = \exp[i\theta(N_2 - N_1)]. \tag{19}$$

当$\mu_0 e^{i\theta} = -1$,

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle -\eta| = (-1)^{N_1}(-1)^{N_2} \equiv P_{12}, \tag{20}$$

P_{12}为双模宇称算符.当$\theta = 0$时,

$$\mu_0\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\mu_0\eta| = \exp[(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2)\ln\mu_0] \equiv S_2, \tag{21}$$

S_2为双模压缩算符[9],它的表达式是简洁而自

然的.

举例 2　积分 $\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta+\nu|$ (ν 为复数)

根据(1)式,得

$$\langle\eta+\nu| = \langle 0,0|\exp\left[-\frac{|\eta+\nu|^2}{2} + (\eta+\nu)^* a_1 - (\eta+\nu)a_2 + a_1 a_2\right]$$
$$= \langle\eta|\exp\left[-\frac{\nu\nu^* + \nu^*\eta + \nu\eta^*}{2} + \nu^* a_1 - \nu a_2\right], \tag{22}$$

利用(12)式及 Glauber 公式,(22)式为

$$\langle\eta+\nu| = \langle\eta|\exp\left[\frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2)\right], \tag{23}$$

由此得

$$\int\frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta+\nu|$$
$$= \exp\left[\frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2)\right]$$
$$= D_1\left(-\frac{1}{2}\nu\right)D_2\left(\frac{1}{2}\nu^*\right), \tag{24}$$

其中 $D_i(z) = \exp(za_i^+ - z^* a_i)$ ($i=1,2$) **为单模平移算符**.

举例 3　积分 $\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}|\nu-\eta\rangle\langle\nu+\eta|\exp(\eta\gamma^* - \eta^*\gamma) \equiv \Delta_{12}$

利用(12),(20),(23)式及 Glauber 公式,得

$$\Delta_{12} = \int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp\left[\frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2) - \frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+)\right]|-\eta\rangle\langle\eta|$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2)\right]\exp(\eta\gamma^* - \eta^*\gamma)$$
$$= \int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp\left[\frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2) - \frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+)\right]|-\eta\rangle\langle\eta|$$
$$\times\exp[(a_1 - a_2^+)\gamma^* - (a_1^+ - a_2)\gamma]$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2)\right]$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\exp\left[\frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2) - \frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+)\right](-)^{N_1}(-)^{N_2}$$
$$\times\exp\left[(a_1 - a_2^+)\gamma^* - (a_1^+ - a_2)\gamma\right]$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\nu^*(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}\nu(a_1^+ + a_2)\right]$$
$$= \frac{1}{\pi^2}D_1(\nu+\gamma)(-)^{N_1}$$
$$\times D_2(-\nu^* + \gamma^*)(-)^{N_2}, \tag{25}$$

令

$$\gamma = \sigma + \beta^*,\quad \nu = \sigma - \beta^*, \tag{26}$$

则

$$\Delta_{12}(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi^2}D_1(2\sigma)(-)^{N_1}D_2(2\beta)(-)^{N_2}$$
$$= \Delta_1(\sigma,\sigma^*)\Delta_2(\beta,\beta^*), \tag{27}$$

其中, $\Delta_i(z,z^*) = \frac{1}{\pi}D_i(2z)(-)^{N_i}$ ($i=1,2$) **为单模** Wigner **算符,** $\Delta_{12}(\sigma,\gamma)$ **为双模** Wigner **算符**[2].

举例 4　积分 $\int\frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle f(\eta)|$

为了得到更一般的非对称纠缠态投影算符的积分,令

$$\nu = f(\eta) - \eta,\ f^*(\eta) \equiv \tilde{f}(\eta^*), \tag{28}$$

并代入(23)式得

$$\langle f(\eta)| = \langle\eta|\exp\left[\frac{1}{2}(\tilde{f}(\eta^*) - \eta^*)(a_1+a_2^+) - \frac{1}{2}(f(\eta)-\eta)(a_1^+ + a_2)\right]$$
$$= \langle\eta|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\tilde{f}(\eta^*) - \eta^*]^m}{m!}\times\left(\frac{a_1+a_2^+}{2}\right)^m\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f(\eta)-\eta]^n}{n!}\left(-\frac{a_1^+ + a_2}{2}\right)^n$$
$$= \langle\eta|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\tilde{f}(a_1^+ - a_2) - (a_1^+ - a_2)]^m}{m!}$$

$$\times\left(\frac{a_1+a_2^+}{2}\right)^m$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f(a_1-a_2^+)-(a_1-a_2^+)]^n}{n!}$$
$$\times\left(-\frac{a_1^++a_2}{2}\right)^n, \tag{29}$$

由此得

$$\int\frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle f(\eta)|$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\tilde{f}(a_1^+-a_2)-(a_1^+-a_2)]^m}{m!}$$
$$\times\left(\frac{a_1+a_2^+}{2}\right)^m$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f(a_1-a_2^+)-(a_1-a_2^+)]^n}{n!}$$
$$\times\left(-\frac{a_1^++a_2}{2}\right)^n. \tag{30}$$

例如,让

$$f(\eta)=\mu_0\eta, f^*(\eta)\equiv\tilde{f}(\eta^*)=\mu_0\eta^*, \tag{31}$$

借助公式

$$[A,B]=C,[A,B^n]=nCB^{n-1}, \tag{32}$$

也可以从(30)式,得到(21)式.到此,得到了所有非对称纠缠态投影算符的积分值.

由此可见,利用算符的本征值方程及本征矢的完备性,原则上可得到由本征矢构成的非对称投影算符的积分值.但是,利用这种方法,不便于计算由非本征矢(或不具有完备性的本征矢)构成的投影算符的积分值,积分结果也不是正规乘积的形式.

4. 结 论

在量子力学中,算符的本征值方程是本征值与算符之间的'桥'.借助于此,从相干态的完备性,导出了纠缠态的完备性.把非对称的纠缠态投影算符转变为对称的,不实施积分,也得到了非对称纠缠态投影算符的积分值.

[1] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480

[2] Fan H Y 2003 *J. Opt.* B: *Quantum Semiclass. Opt.* **5** R147

[3] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev.* D **35** 1831

[4] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev.* A **49** 704

[5] Fan H Y, Ye X 1995 *Phys. Rev.* A **51** 3343

[6] Li T J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3969 (in Chinese) [李体俊 2008 物理学报 **57** 3969]

[7] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529

[8] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)

[9] Xu X F 2006 *Chin. Phys.* **15** 235

Integration over entangled state projective operators *

Li Ti-Jun†

(*Department of Physics, Heze University, Heze 274015, China*)

(Received 1 September 2008; revised manuscript received 28 October 2008)

Abstract

In virture of the eigenvalue equations of operators, the entangled states' completeness relation is proved from that of the coherent states, and the integral values of non-symmetric projective operators of entangled states are obtained.

Keywords: completeness relation, entangled state, projective operator, integral

PACC: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Heze University, China (Grant No. XY08WL02).

† E-mail: hz-ltj@163.com