

# 树状分形结构形成过程的实验研究<sup>\*</sup>

苏亚凤<sup>†</sup> 李普选 陈 鹏 徐忠锋 张孝林

(西安交通大学理学院, 西安 710049)

(2008 年 11 月 20 日收到 2008 年 12 月 9 日收到修改稿)

对大量金属小球在强电场作用下运动形态的演化全过程用联机摄像装置进行了实时拍摄, 通过用 Sandbox 方法计算其稳定状态的分维数, 系统地研究了分维数随电压的变化关系. 结果表明, 在一定电压范围内金属小球聚集体通过自组织过程形成稳定的树状分形结构, 其分维数随外加电压的增加而减小. 该结果对研究耗散结构的形成机理和外界动力对耗散结构的形貌影响具有参考价值.

关键词: 分形生长, 自组织过程, 树状结构, 分维数

PACC: 0555, 0565, 0547

## 1. 引 言

分形广泛存在于自然界中, 例如分岔的树木、高低不平的山脉、弯弯曲曲的河流与海岸线、棉絮团似的云烟和美丽的雪花以及大脑皮层、人体的血管、岩石的断裂口等等; 这些物体中都具有分形的特征——部分与整体以某种方式相似, 即自相似性. 观察分形的形成过程, 研究分形的动力学机理, 是研究分形的一个方向. 但一般由于时间问题(如闪电、岩石断裂过程太快, 大脑皮层、弯曲的海岸线等形成时间过长)或形成微粒极小(如晶体的沉积)等原因, 要在实验上直接观察到分形结构的形成过程是十分困难的. 通常人们采用计算机模拟方法来研究其机理问题<sup>[1-4]</sup>. 10 多年来, Hübler 等人<sup>[5, 6]</sup>研究了大量金属小球处于电场中的运动行为和形成的树状分形结构的性质, 研究指出<sup>[6]</sup>, 从中心向四周生长的树形结构形成过程分为单小球链生成、边界形成、几何扩张三步. 但未对树形结构形貌随电压的变化情况研究, 而且分形结构的形成时间长达一个多小时.

本文正是针对以上问题, 通过对实验装置的改进, 采用摄像装置实时记录了分形形成的整个过程, 实现了可以在 1—3 min 时间内非常直观地观察到分形结构形成的整个生动的过程. 实验中发现了不同于以往文献报道<sup>[6]</sup>的分形形成过程, 而且形成时间也远小于此文献所报道的时间. 采用 Sandbox 方

法计算了一定参数条件下形成的树状分形结构的维数, 研究了分维数随电压的变化关系. 本实验将复杂的耗散结构的形成过程徐徐展现在人们的面前, 对研究耗散结构的形成机理和外界动力对耗散结构的形貌影响具有重要的参考价值.

## 2. 实 验

### 2.1. 实验装置

实验装置如图 1 所示, 其中, 阳极为带有尖端的金属细杆, 阴极为宽为 1 cm、围绕在直径为 15 cm 的盘状玻璃皿外围的铜带. 两极电压可以在 0—20 kV 范围内变化. 盘中金属小球是半径为 1.5 mm, 质量约为 111 mg 的钢球. 金属小球置于蓖麻油介质中, 介质高度以浸没小球为宜. 采用与计算机连接的视频摄像装置, 将记录的数据即时传入计算机.

实验中, 我们将阳极直接插入介质中. 这样不仅可以增加盘内的径向电场, 加快金属小球在电场中的运动, 而且避免了电极悬空尖端放电所形成的电风将介质和小球吹开的现象的出现, 从而使小球更易在相对较低的电压下运动形成分形结构. 更重要的是形成稳定的分形结构时间远远小于文献<sup>[6]</sup>所报道的电极悬空时树形结构形成的时间.

另外, 我们将另一电极(阴极)从文献<sup>[5]</sup>和文献<sup>[6]</sup>实验中的盘的内侧改为置于玻璃圆盘的外侧, 这

<sup>\*</sup> 非平衡物质结构及量子调控教育部重点实验室资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: yfsu@mail.xjtu.edu.cn

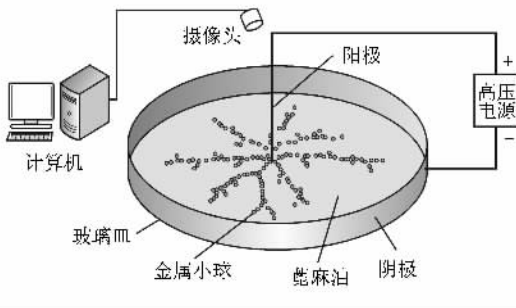


图 1 实验装置

样,不仅避免了小球运动至盘的边缘所出现的击穿现象,而且使两极电压可以在较大的范围内调节,便于进一步研究不同电压下分形形成的过程。

以上两点改进,可以在较短的时间内(数秒到两三分钟内)较低的电压下实时观察到不同的分形结构生动的形成过程。

## 2.2. 实验过程

依照图 1 连接好电路及摄像装置,将小球以聚集的状态平铺于阳极周围,形状大约为圆形。接着,打开视频记录,打开高压电源,调解电压,观察小球

运动行为,待小球达到稳定状态后,断开电源,停止视频记录。依照以上过程,拍摄不同电压大小及不同加压方式下小球聚集体的运动过程。

## 3. 实验结果及分析

### 3.1. 实验结果

通过多次实验,发现小球均呈各向异性扩散,是典型的自组织演化过程。图 2 和图 3 所示为温度在  $23.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  左右,最高电压为  $10\text{ kV}$  的条件下分形形成的整个过程。图 2 是电压由 0 逐渐增大到  $10\text{ kV}$  时小球聚集体的演化过程。接通电源后,在  $0\text{--}8\text{ s}$  (电压在  $0$  到  $5\text{ kV}$  间)小球基本不动,如图 2(a)所示。在  $9\text{--}10\text{ s}$  (电压增至  $6\text{ kV}$  左右)时,外围小球开始逐渐挪动,见图 2(b)。随着电压增加到  $10\text{ kV}$ ,小球从外到内逐渐连成链状向四周运动,同时,小球链上伴有分岔出现,在  $25\text{ s}$  时小球已经基本分开,如图 2(c), (d)所示。随着时间的推移,小球进一步分散开,在大约  $146\text{ s}$  时形成最终的稳定的分形结构,如图 2(e), (f)所示。

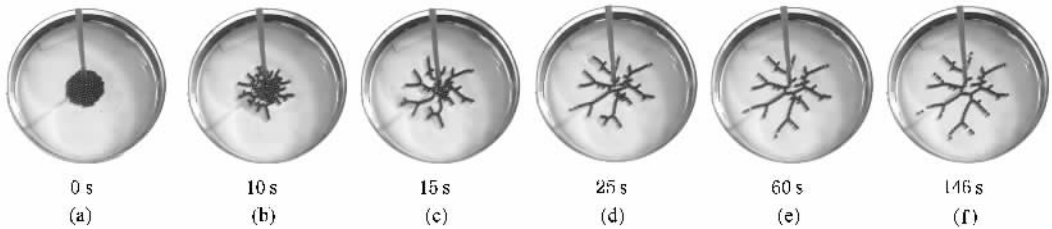
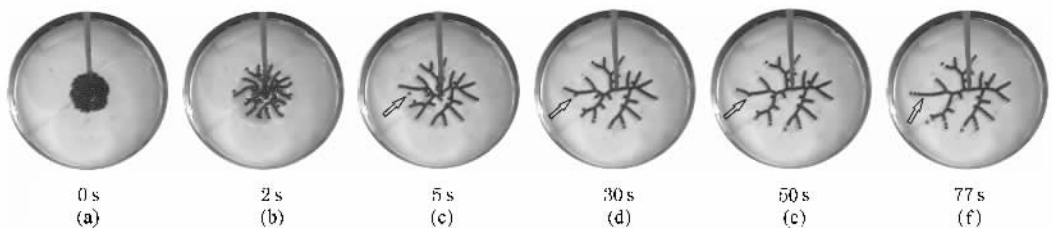
图 2 电压逐渐加到  $10\text{ kV}$  时小球随时间的分布演化过程

图 3 为电压直接加到  $10\text{ kV}$  时分形形成过程。实验发现,接通电源的瞬间,所有小球喷然向四周运动,见图 3(b)。在  $5\text{ s}$  的时间内,小球已经全部分开,并相互连接成树状结构,如图 3(c)所示。此后时间树状结构整体继续向外缓慢扩张,见图 3(d) (e)。

其间,离散的小球被吸引至邻近的分枝中,图 3(c) (f)中箭头所指即为一小球被纳入一个分枝的过程。大约在  $77\text{ s}$  时整个系统达到了一个稳定状态,小球聚集集体呈现树状分形结构,见图 3(f)所示。

另外,我们在实验中敲击盘的边缘时,分形

图 3 电压直接加至  $10\text{ kV}$  时小球随时间的分布演化过程

结构基本不发生变化,说明生成的分形结构很稳定。

### 3.2. 小球运动行为分析

小球与阳极直接接触,两极加上电压后,靠近阳极的小球带上与阳极相同性质的正电荷,迅速被阳极排斥开,向远离阳极的方向运动。同时,金属小球处于外加静电场中,会发生静电感应现象,小球靠近阳极的一边带负电荷,因此,小球又被阳极所吸引。两种作用同时存在,使小球们犹如一个个串起来的电偶极子一样被排列在两极电场之中。处于链的两边的小球则由于静电感应被链所吸引,并逐渐靠近小球链到与之连接。根据吸引力的大小不同而或被吸纳进球链,或成为链的分枝,最终形成美丽的分形结构。

两种加压方式不同,对小球施加作用力的过程不同。直接加压,小球受阳极排斥力显著,可以克服油的黏滞阻力向四周快速运动,因此扩散速度比较快。逐渐加压,受力开始较小,内部小球一方面受油的黏滞阻力,一方面受外围球的阻碍,因此很难在接通电源的开始阶段发生运动。而是外围小球在静电力的作用下先向外运动,内层小球再逐渐向四周运动,扩散速度较慢,形成分形时间相对较长。虽然两种情况分形形成过程不同,但小球的分散程度相差不多,最后均形成稳定的树状分形结构,如图 4 所示。

以上两个树形结构的生长是各部分同时进行的,与文献 [6] 报道的先单枝从中心生长至边缘、接着形成边界、再进行几何扩张的分步生长的过程完全不同。究其原因,我们实验中的金属小球集体与阳极直接接触,在运动过程中始终净带大量正电荷,是带正电的小球集体在电场中的扩散过程。而文献 [6] 中小球集体开始所带净电荷与中央电极一致,由于

电极悬空,小球未与电极直接接触,小球收集到的电荷较少,因此在小球集体扩散过程中尖端优势表现明显,生长最快的一支先到达边缘,当与另一环状电极接触后电性会突然改变,进而被环状电极所排斥,表现为边界生成,之后再进一步几何扩张,整体表现为不同的生长过程。

可以看出,本实验中形成的有序分形结构是一个典型的耗散结构。根据耗散结构理论<sup>[7]</sup>,开放系统的熵变化分为两部分:一部分是由于系统和外界的物质和能量交换过程引起的熵流项(可正可负);一部分是由系统内部的不可逆过程产生的熵产生项。若两项之和为负值,即系统从外界取得的负熵流的绝对值大于系统内部的熵增加值时,系统总熵减小,系统可能出现以耗散外界物质或能量为代价的有序结构——耗散结构。本实验中正是由于小球聚集体这一系统通过电极与外界交换物质和能量,使系统有可能从外界取得负熵流不仅抵消了系统内部的熵增加,而且使系统的总熵减小,而熵减小就意味着系统从无序趋向有序状态,即达到实验中出现的稳定的树状结构。更具体地说,树状结构的形成和保持,实际上是以小球聚集体为物质基础,以电极与外界交换所得能量为动力,以来自小球间的相互作用为指令,以空间有序为目标的自组织过程。

### 3.3. 分形维数的计算

为了定量描述小球的聚集密度,我们利用 Sandbox 法<sup>[8]</sup>计算了分形的维数。由于分形由中心向四周生长,且只有一个生长中心,因此计算维数时盒取为圆形,如图 4 所示。其中,图 4(a)为逐渐加压形成的一个典型的稳定结构,半径不等的圆环所围区域对应所取的不同圆形盒的大小;图 4(b)为直接加压到 10 kV 时形成的一个典型的稳定形貌及所取

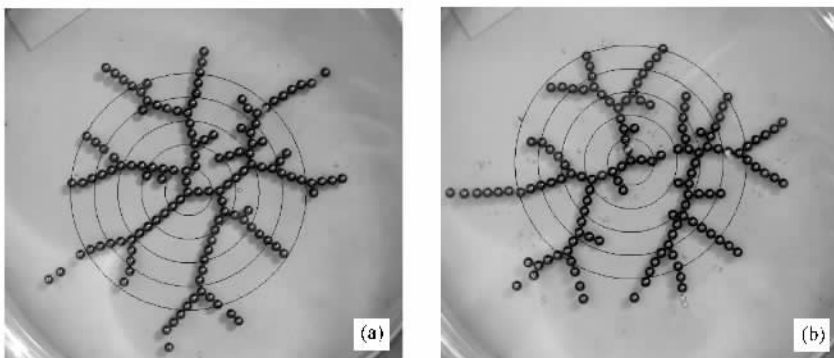


图 4 稳定的树状结构和 Sandbox 法计算其分形维数 (a)电压逐渐加到 10 kV;(b)电压直接加到 10 kV

的不同大小的盒.图 5 为像素对数与各大圆盒半径对数的关系.二者是相关性较好的直线关系,符合分形的最基本特征.直线的斜率即为分形的维数.

经计算,图 4(a)的维数为 1.67,图 4(b)的维数为 1.75.分维数直接反映了小球的聚集密度:维数越大,聚集密度越大,或者说小球分散程度越低;反之,则聚集密度越小,即小球分散程度越高.以上计算结果表明,图 4 两幅图的维数相差 0.08,说明二者的分散程度比较接近,即小球对表面的占有度比较接近.这与直观的感觉相一致.

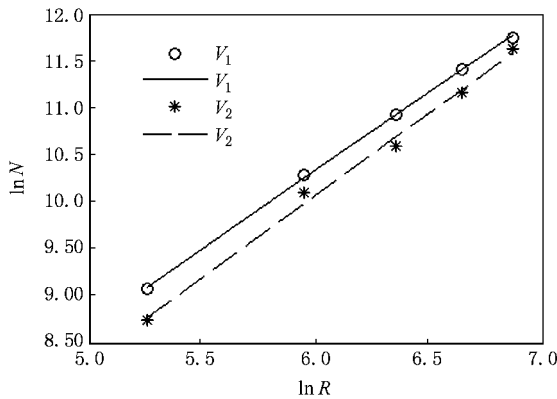


图 5 盒半径和像素数的对数图

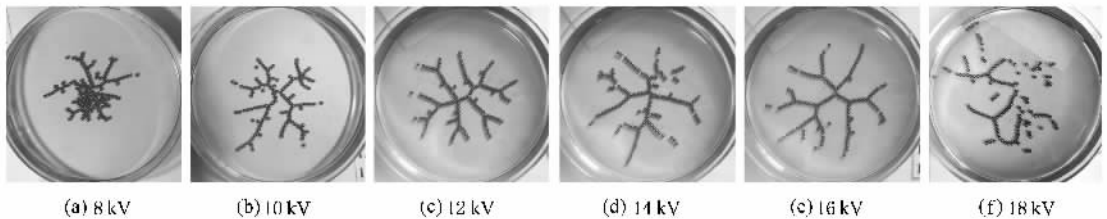


图 6 不同电压下的稳定形态

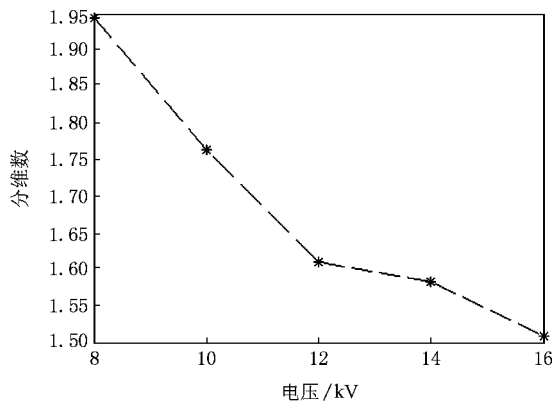


图 7 分维数随电压的变化关系

### 3.4. 电压对分维数的影响

实验中发现,所加电压不同,最终的稳定树状分形结构的分散程度明显不同.图 6 是在温度为 20 °C 左右,直接加电压至不同值时形成的典型的稳定结构.可以看出,电压为 8 kV 时,小球没有完全分开,如图 6(a)所示.在电压在 10—16 kV 区间变化时,电压越大,分散程度越高,如图 6(b)—(e)所示.若进一步加大电压,形成的树状分形结构在未达到稳定状态前会崩溃,小球聚集体由树状分形结构变为散乱分布,如图 6(f)所示.我们用 Sandbox 方法进一步计算了各种分布状态的分维数,图 7 为分维数随电压的变化关系图.可以看出,电压从 8 kV 到 16 kV 变化过程中,电压越大,形成的稳定结构的分维数越小.

分析原因:电压越大,电场越强,被介质包裹的等效于电偶极子的小球的极化强度越高,它们之间的相互作用就越大,小球扩散概率就越大,所产生的结构就越松散,因而分维数越小.当电压过高时,小球间的介质被不断击穿而使小球带正电荷而彼此排斥,并最终导致分形结构崩溃.

另外,分维数也是小球运动自由度大小的量

度.众所周知,若小球能在平面上自由地运动,其自由度为 2,若被局限在一条线上,则自由度为 1.这里,小球受径向电场的约束,其自由度必然减小,但并没有完全被约束在半径方向上,因此维数介于 1 和 2 之间,是分数.电压越大,径向约束越强,小球运动自由度越小,分维数越小.以上维数随电压的变化关系正说明了这一点.

需要说明的是,此实验对环境温度很敏感.实验发现,在其他参数不变的条件下,温度越高,小球扩散越快,对应稳定状态时的小球聚集密度越低,分形维数应越小.这从以上在电压 10 kV 下温度为 23.5 °C 对应稳定状态的分维数小于 20 °C 的分维数

可以体现出来.

## 4. 结 论

我们采用一个简捷的实验将复杂的耗散结构的形成全过程在几分钟的时间内进行了实时拍摄. 对在强静电场下处于介质中的大量金属小球的运动行为进行了分析, 并采用 Sandbox 方法计算了其稳定状态的分维数, 系统地研究了分维数随电压的变化关系. 得出如下结论:

1. 处于强电场下的金属小球可以通过自组织

过程形成稳定的树状分形结构. 原因是对于油和金属小球聚集体这样的开放系统, 通过电极使系统从外界取得负熵流的绝对值大于系统内部的熵增加, 使系统的总熵减小, 从而使系统由无序趋向有序状态, 即达到稳定的树状结构. 具体表现为系统内被介质包裹的金属小球在静电感应的作用下犹如一个个电偶极子, 彼此协同作用连接成有分岔的串状.

2. 在一定的电压变化范围内, 电压越大, 形成的稳定分形结构的分维数越小, 超过一定电压, 形成的分形结构会自行崩溃. 直接加电压和逐渐加电压两种加压方式下的树状分形结构维数相差很小.

- [ 1 ] Wei H L , Liu Z L , Yao K L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 971 ( in Chinese ) [ 魏合林、刘祖黎、姚凯伦 2000 物理学报 **49** 791 ]
- [ 2 ] Qian C J , Gao G L , Li H , Ye G X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1960 ( in chinese ) [ 钱昌吉、高国良、李洪、叶高翔 2002 物理学报 **51** 1960 ]
- [ 3 ] Zhou F F , Huang Y M 2007 *Applied Surface Science* **253** 4507
- [ 4 ] Hayakawa M , Iudin D I , Trakhtengerts V Y 2008 *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* **70** 1660
- [ 5 ] Dueweke M , Merté B , Hübler A 1997 *Technical Report CCSR 1*

- [ 6 ] Jun J , Hübler A 2005 *PNAS* **102** 536
- [ 7 ] Xu R Y 1990 *Brief Introduction to cross disciplines* ( Jinan : Shandong University Press ) p260 [ 徐孺英 1990 横断学科简论 ( 济南 : 山东大学出版社 ) 第 260 页 ]
- [ 8 ] Sun X , Wu Z L , Huang J 2003 *Fractal theory and application* ( Hefei : University of Science and Technology of China Press ) p42 [ 孙霞、吴自勤、黄 2003 分形原理及应用 ( 合肥 : 中国科学技术大学出版社 ) 第 42 页 ]

# An experimental study on the growth process of dendritic fractal<sup>\*</sup>

Su Ya-Feng<sup>†</sup> Li Pu-Xuan Chen Peng Xu Zhong-Feng Zhang Xiao-Lin

( School of Science , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China )

( Received 20 November 2008 ; revised manuscript received 9 December 2008 )

## Abstract

In this paper the temporal evolution processes of large numbers of metallic balls under high voltage were observed using a PC-camera. The fractal dimensions of the stable agglomerates of metallic balls were calculated by means of the sandbox method. Also, the relationship between the fractal dimension and the voltage were studied. The result showed that the stable agglomerates of metallic balls can have dendritic fractal structures through a self-organization evolution process and the fractal dimension decreases with the increasing of voltage. The results are of value for the growth mechanism and morphology study of dissipative structure.

**Keywords** : fractal growth , self-organization process , dendritic structure , fractal dimension

**PACC** : 0555 , 0565 , 0547

<sup>\*</sup> Project supported by the Non-equilibrium Condensed Matter and Quantum Engineering Laboratory , the Key Laboratory of Ministry of Education .

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : yfsu@mail.xjtu.edu.cn