

# 两个等径蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动特性<sup>\*</sup>

王海民<sup>1)†</sup> 马建敏<sup>2)</sup> 张 文<sup>2)</sup>

1) 上海理工大学动力工程学院, 上海 200093)

2) 复旦大学力学与工程科学系, 上海 200433)

(2009 年 2 月 19 日收到, 2009 年 3 月 27 日收到修改稿)

利用黏弹性膜构成的蛋白质气泡有限变形方程, 并考虑一个气泡在 Bingham 流体中振动产生的 Bjerknes 力对另一个气泡振动特性的影响, 建立了两个等径蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动的非线性方程. 利用数值计算方法求解该方程, 结果表明, 增加 Bingham 流体的塑性黏度, 蛋白质气泡振幅衰减速度加快, 振动周期增加, 频率减小; 当两个气泡间的距离减小时, 气泡振动频率会增加, 振幅衰减速度加快; 初始半径小的气泡振动频率高, 振幅衰减快, 而且振动的频率和振幅衰减的速率越大; 与单个气泡相比, 两个蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动时, 振动具有更高的振动频率, 而且振幅衰减速度更快.

关键词: 蛋白质气泡, Bjerknes 力, 非线性振动, Bingham 流体

PACC: 4630C, 4750, 6260

## 1. 引 言

蛋白质气泡在生物医学、化工、消防、油气田固井工程等领域得到了广泛的应用. 在生物医学工程的应用中, 利用蛋白质微气泡(微米级直径,  $< 10 \mu\text{m}$ ) 吸附药物或基因后定点输运到病灶, 它可以用于治疗脑部的疾病, 替代手术治疗, 极大地降低因手术造成的风险<sup>[1, 2]</sup>; 还可以利用蛋白质气泡来包裹易气化液态物质如全氟化碳(per-fluorocarbons, PFCS) 然后进行输送, 通过液体气化产生的气泡阻断病灶部位如肿瘤的氧气供给而达到治疗的目的<sup>[3, 4]</sup>. 在化工过程的应用中, 蛋白质气泡用于物质分离、提纯<sup>[5]</sup>; 蛋白质气泡甚至还可用于分离 DNA、蛋白质及液体卵磷脂等生物活性物质<sup>[6]</sup>.

蛋白质气泡在应用过程中, 首先将蛋白质形成的发泡液通过物理的方法形成连续、独立的气泡, 然后与其他流体混合, 以实现特定的功能如药物输运、物质分离等. 研究这种有膜的、独立的气泡在流体中的动力学特性, 不仅要考虑构成气泡膜材料的本构关系、气泡的变形特点等, 而且还要考虑气泡外流体的流动特性<sup>[7]</sup>. 目前对于流体中的蛋白质气泡的动力学特性的研究仍然主要针对单个气泡, Church<sup>[8]</sup>

将蛋白质膜定义为弹性的、不可压缩的连续介质, 而 Friking 和 Nico<sup>[9]</sup> 则进一步研究了将蛋白质膜定义为黏弹性介质来分析气泡在牛顿流体中受交变载荷作用下发生小变形时的振动特性; Khismatullin<sup>[10]</sup> 利用文献<sup>[9]</sup> 的模型研究了流体的黏性对超声波响应频率的影响. 钱梦 等<sup>[11]</sup> 将形成气泡的蛋白质薄膜视作液体层, 建立了蛋白质微气泡在牛顿流体中球对称振动的运动方程, 并研究了气泡的高频和低频振动特性. 本文作者研究了由黏弹性蛋白质膜构成的单个气泡在 Bingham 流体中有限变形的动力学特性<sup>[12]</sup>.

而对于流体中气泡间的相互作用的研究是从空化气泡开始的, 研究表明, 空化气泡在流体中的相互作用是通过 Bjerknes 效应来传递的<sup>[13]</sup>, Kornfeld 和 Suvorov<sup>[14]</sup> 通过实验观察了当外部压力变化时靠近固体表面的气泡形成以及随后气泡发生的径向振荡现象; Harkin<sup>[15]</sup> 利用映射的方法及 Weiss<sup>[16]</sup> 的相关理论, 建立了流体中两个振动的空化气泡间相互作用引起的流体速度势的变化, 并根据该速度势求得了流体对空化气泡作用的 Bjerknes 力; Blake<sup>[17]</sup> 和 Crum<sup>[18]</sup> 提出了主 Bjerknes 和二阶 Bjerknes 力的概念, 深入研究了驻波声场中气泡间的 Bjerknes 力; Pelekasis 和 Tsamopoulos<sup>[19, 20]</sup> 采用数值方法, 研究了

<sup>\*</sup> 上海市教委重点学科建设项目(批准号: J50501)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: hmwang@usst.edu.cn

当气泡外部流体压力发生阶跃变化和交变两种情况下两个气泡间的 Bjerknes 力. 张阿曼等人<sup>[21]</sup>将多极快速傅里叶变换方法 (FFTM) 与高阶边界元法 (HOBEM) 相结合求解了无黏、无旋、不可压缩的理想流体中空化气泡群的运动.

本文研究的是两个等径的蛋白质气泡在非牛顿流体中有限变形过程中的振动特性, 分析振动的蛋白质气泡间由于 Bjerknes 效应对其振动特性的影响. 首先利用黏弹性膜构成的蛋白质气泡有限变形方程, 并考虑其中一个气泡在 Bingham 流体中振动产生的 Bjerknes 力对另一个气泡振动特性的影响, 利用蛋白质气泡的动力学方程和气泡外流体流动的动力学方程, 建立两个等径蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动的非线性方程. 然后利用数值计算方法求解该方程, 分析 Bingham 流体的塑性黏度、两个蛋白质气泡在不同初始半径情形时的振动特性以及气泡间距离对气泡膜振动特性的影响. 最后对比分析初始条件和边界条件相同的两个与单个蛋白质气泡在 Bingham 流体中的振动特性.

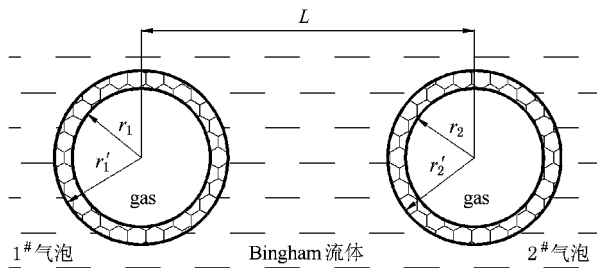


图 1 Bingham 流体中蛋白质气泡的几何及位置

## 2. 蛋白质气泡有限变形应力方程

如图 1 所示, 为了导出蛋白质气泡有限变形应力方程, 作如下假设:

1) 以气泡 1# 为例, 假定在变形前位于蛋白质球形气泡内外壁面之间任意一点  $D_0 = \{ (r_0, \theta, \varphi) \mid r_{0i} \leq r_0 \leq r'_{0i}, \theta \leq \theta \leq 2\pi, \theta \leq \varphi \leq \pi \}$  在变形后位于  $d_0 = \{ (r_0, \theta, \varphi) \mid r_1 \leq r \leq r'_1, \theta \leq \theta \leq 2\pi, \theta \leq \varphi \leq \pi \}$  处, 其中  $r_{0i}$  和  $r'_{0i}$  分别为未变形前球形气泡内壁和外壁半径, 变形后分别用  $r_i(t), r'_i(t)$  表示;

2) 假定气泡的蛋白质薄膜是各向同性、不可压缩的;

3) 只考察气泡在表面受到径向均布载荷作用下的应变特性, 且只有径向位移发生;

4) 气泡 1# 和 2# 的几何条件相同, 材料特性相同;

5) 气泡在有限变形过程中, 能量密度函数与右 Cauchy-Green 应变张量  $C(t)$  的主不变量之间关系满足 Mooney-Rivlin 关系, 即

$$\hat{W}[C(t)] = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (1)$$

其中  $C_1, C_2$  为材料常数,  $I_1, I_2$  为应变张量主伸长的第一和第二不变量.

根据黏弹性基本理论<sup>[22]</sup>, 对于黏弹性材料, 其应变能密度函数不仅与当前时刻  $t$  的应变  $C(t)$  有关, 而且与当前时刻  $t$  之前的所有历史时间  $s$  有关, 因此其能量密度函数可以表示为<sup>[23]</sup>

$$W(t) = \hat{W}[C(t)] + \int_0^t \mu^*(t-s) \hat{W}[C(s)] ds, \quad (2)$$

式中  $\mu^*(t-s)$  为无量纲的松弛函数. 文献<sup>[24]</sup>中利用 Maxwell 的两参数模型来表示构成气泡的黏弹性蛋白质薄膜的松弛特性, 并根据黏弹性基本理论及气泡有限变形梯度张量, 得到蛋白质气泡内外壁间距气泡中心为  $r$  ( $r_1 \leq r \leq r'_1$ ) 处的一点在  $r, \theta$  和  $\varphi$  方向的主应力为(以气泡 1# 为例)

$$\begin{aligned} \tau_{M,rr}(r, t) &= 2 \left( C_1 \frac{r_{01}^4}{r^4} + 2C_2 \frac{r_{01}^2}{r^2} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\tau_0} \int_0^t e^{-C(t-s)/\tau_0} \\ &\quad \times \left( C_1 \frac{r_{01}^4}{r^4} + 2C_2 \frac{r_{01}^2}{r^2} \right) ds, \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{M,\varphi\varphi}(r, t) &= \tau_{M,\theta\theta}(r, t) \\ &= 2 \left( C_1 \frac{r^2}{r_{01}^2} + C_2 \left( \frac{r^4}{r_{01}^4} + \frac{r_{01}^2}{r^2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{2}{\tau_0} \int_0^t e^{-C(t-s)/\tau_0} \\ &\quad \times \left( C_1 \frac{r^2}{r_{01}^2} + C_2 \left( \frac{r^4}{r_{01}^4} + \frac{r_{01}^2}{r^2} \right) \right) ds. \quad (3b) \end{aligned}$$

上两式中,  $\tau_0$  为反映蛋白质薄膜黏弹性的松弛时间. (3a) 和 (3b) 式即为在考虑蛋白质气泡膜黏弹性特性情况下的应力和变形之间的关系式.

## 3. 流体作用在气泡上的应力

Bingham 流体是有屈服应力的黏塑性流体, 其本构关系中有一屈服应力  $\tau_y$ , 仅当其所受应力超出屈服应力  $\tau_y$  时, 流体才会流动<sup>[25]</sup>. 流体运动产生的应力满足下列关系式<sup>[26]</sup>:

$$\tau = - \left( \eta_p + \frac{\tau_y}{\sqrt{0.5 \Pi_D}} \right) \mathbf{D} \sqrt{0.5 \Pi_D} > \tau_y, \\ \mathbf{D} = 0 \sqrt{0.5 \Pi_D} < \tau_y, \quad (4)$$

式中,  $\eta_p$  为流体的塑性黏度,  $\mathbf{D}$  为变形率张量 (the rate of deformation tensor), 它与速度  $v$  的关系是  $\mathbf{D} = \nabla v + (\nabla v)^T$ , 而二阶矩的不变量  $\Pi_D = \mathbf{D} : \mathbf{D}$ ,  $\Pi_\tau = \tau : \tau$ .

假定当气泡变形前, 周围的流体处于静止状态, 由于气泡变形时只有径向位移发生, 因此当气泡发生变形时, 如果流体产生的应力超出屈服应力  $\tau_y$  时, 流体就会产生以气泡为中心的径向流动, 在此过程中, 气泡周围的流体变形率张量定义为<sup>[27]</sup>

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\partial v_r / \partial r & 0 & 0 \\ 0 & 2v_r / r & 0 \\ 0 & 0 & 2v_r / r \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由于  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ , 所以  $\mathbf{D} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T)$ , 可以得到二阶矩的不变量为<sup>[28]</sup>

$$\Pi_D = \mathbf{D} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \\ = 4 \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 \right], \quad (6)$$

式中的径向速度  $v_r$  可以利用不可压缩流体的连续性方程来求得, 以气泡 1# 为例, 若气泡 1# 与流体间的界面  $r'_1$  处的流体运动速度为  $\dot{r}'_1$ , 气泡 #2 与流体间的界面  $r'_2$  处的流体运动速度为  $\dot{r}'_2$ , 则流体沿气泡径向距离中心  $r$  ( $r \geq r'_1$ ) 处位移的变化速度满足<sup>[17]</sup>

$$v_r = \left( \frac{r'_1}{r} \right)^2 \dot{r}'_1 \quad (r \geq r'_1). \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (5) 和 (6) 式后再利用 (4) 式, 得到流体在  $r, \theta, \varphi$  三个方向的正应力分别为

$$\tau_{L,rr} = 4\eta_p \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1}{r^3} + \frac{2\tau_y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|}, \quad (8a)$$

$$\tau_{L,\theta\theta} = \tau_{L,\varphi\varphi} = -2\eta_p \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1}{r^3} - \frac{\tau_y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|}. \quad (8b)$$

若流体中距离气泡中心距离为  $r$  ( $r \geq r'_1$ ) 处流体的压力为  $p_L(r)$ , 由此可以得到流体在径向流动时在  $r, \theta, \varphi$  三个方向作用在气泡外壁总的应力分别为

$$\sigma_{L,rr} = -p_L(r) - \tau_{L,rr}, \quad (9a)$$

$$\sigma_{L,\theta\theta} = -p_L(r) - \tau_{L,\theta\theta}, \quad (9b)$$

$$\sigma_{L,\varphi\varphi} = -p_L(r) - \tau_{L,\varphi\varphi}. \quad (9c)$$

将 (8a) 和 (8b) 式分别代入以上三式后得到

$$\sigma_{L,rr} = -p_L(r) - 4\eta_p \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1}{r^3} - \frac{2\tau_y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|}, \quad (10a)$$

$$\sigma_{L,\theta\theta} = \sigma_{L,\varphi\varphi} = -p_L(r) + 2\eta_p \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1}{r^3} + \frac{\tau_y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|}. \quad (10b)$$

上式表明了蛋白质气泡在变形过程中 Bingham 流体作用在气泡外壁的总应力在  $r, \theta, \varphi$  三个方向的分量与气泡变形之间的关系。

#### 4. 气泡间相互作用的 Bjerknes 力

Harkin<sup>[15]</sup> 利用映射的方法及 Weiss<sup>[16]</sup> 的相关理论, 建立了流体中两个振动的空化气泡间相互作用引起的流体速度势的变化, 并根据该速度势求得了流体对空化气泡作用的 Bjerknes 力, 气泡 2# 的振动作用在气泡 1# 上的 Bjerknes 力  $p_B^{21}(r)$  为<sup>[15]</sup>

$$p_B^{21}(r) = \rho_L \int_0^\pi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \sin(2\theta_1) d\theta_1. \quad (11)$$

对于两个大小相等, 气泡内部压力及外部流场相同的两个气泡, 在仅考虑气泡在固定球心处的壁面振动, 气泡间相互作用的速度势为

$$\Phi^R(r, \theta_1) = \Phi_1^R(r, \theta_1) + \Phi_2^R(r, \theta_1) \\ + \Phi_{12}^R(r, \theta_1) + \Phi_{21}^R(r, \theta_1) + \text{h.o.t} \\ = -\frac{r_1'^2 \dot{r}'_1}{r} - \frac{r_2'^2 \dot{r}'_2}{L} \\ - \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1 P_1(\cos\theta_1)}{L^2} \left( r + \frac{r}{2r^2} \right) \\ - \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1 P_2(\cos\theta_1)}{L^3} \left( r^2 + \frac{2r_1'^5}{3r^3} \right) \\ - \frac{r_1'^2 \dot{r}'_1 P_3(\cos\theta_1)}{L^4} \left( r^3 + \frac{3r_1'^7}{4r^4} \right) \\ - \frac{r_1'^3 r_1'^2 \dot{r}'_1}{2L^4} + O\left(\frac{1}{L^5}\right), \quad (12)$$

$P_1(\cos\theta_1)$ ,  $P_2(\cos\theta_1)$  和  $P_3(\cos\theta_1)$  为三阶 Legendre 多项式, 将以上 Legendre 多项式分别代入 (11) 式, 积分后可以计算作用力  $p_B^{21}(r)$ .

$$p_B^{21}(r) = \rho_L \int_0^\pi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \sin(2\theta_1) d\theta_1 \\ = \rho_L \left( \frac{4}{3} \frac{r_1'^2}{L^2} \left( r + \frac{r_1'^3}{2r^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2r_1'^2}{L^4} \left( r^3 + \frac{3r_1'^7}{4r^4} \right) \right) \ddot{r}'_1$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_L \left( \frac{8r_1' r}{3L^2} + \frac{10r_1'^4}{3L^2 r^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4r_1' r^3}{L^4} + \frac{27r_1'^8}{2r^4 L^4} \right) \dot{r}_1'^2. \quad (13)
 \end{aligned}$$

令上式中  $r = r_1'$  就可以求得气泡 2# 作用在气泡 1# 外壁上的 Bjerknes 力为

$$\begin{aligned}
 p_B^{21}(r_1') & = \rho_L \left( \frac{2r_1'^3}{L^2} + \frac{7r_1'^5}{4L^4} \right) \ddot{r}_1' \\
 & + \rho_L \left( \frac{6r_1'^2}{L^2} + \frac{35r_1'^4}{2L^4} \right) \dot{r}_1'^2. \quad (14)
 \end{aligned}$$

上式表明, 气泡 2# 作用在气泡 1# 外壁上的 Bjerknes 力是流体的速度  $\dot{r}_1'(t)$  及加速度  $\ddot{r}_1'(t)$  的函数, 而且受气泡与流体边界的大小  $r_1'$  及气泡间距离  $L$  的影响.

## 5. 气泡有限变形动力学方程及求解

由于研究的是两个等径的气泡, 且边界条件和初始条件相同, 在研究过程中, 认为两个气泡的相互作用的 Bjerknes 力是相等的, 两个气泡具有相同的振动特性. 因此, 本文以气泡 1# 为例, 根据上述蛋白质气泡有限变形时的应力以及气泡周围流体作用在气泡外壁的应力与气泡变形之间的关系, 可以求解气泡有限变形动力学方程.

在忽略气泡重力、气体透过蛋白质膜的扩散性以及气体与周围流体的热交换的情况下, 蛋白质气泡有限变形满足下列动力学方程<sup>[8]</sup>:

$$\rho_M \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (15)$$

式中,  $\rho_M$  为蛋白质膜的密度, 在求解上述方程时, 如图 1 所示, 根据连续性方程, 在蛋白质气泡膜内距气泡中心距离为  $r$  ( $r_1' < r < r_1$ ) 处的速度满足

$$v_r = \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \dot{r}_1. \quad (16)$$

利用上式, 对方程(15)在区间  $[r_1, r_1']$  内进行积分, 令

$$\begin{aligned}
 J_1 & = \rho_M \int_{r_1}^{r_1'} \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) dr \\
 & = \rho_M r_1 \ddot{r}_1 \left( 1 - \frac{r_1}{r_1'} \right) \\
 & + \rho_M \dot{r}_1^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{2r_1}{r_1'} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r_1'} \right)^4 \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 & = \int_{r_1}^{r_1'} \left( \frac{\partial \tau_{M,rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\tau_{M,rr}(r, t) - \tau_{M,\theta\theta}(r, t)) \right) dr \\
 & = \tau_{M,rr}(r_1) - \tau_{M,rr}(r_1') \\
 & + \int_{r_1}^{r_1'} \frac{2}{r} (\tau_{M,rr}(r, t) - \tau_{M,\theta\theta}(r, t)) dr. \quad (18)
 \end{aligned}$$

为了研究方便, 引入下列无量纲参数, 研究气泡内壁  $r_1(t)$  对初始半径  $r_{01}$  的相对变形率  $x(t)$  的变化规律:

$$\begin{aligned}
 x(t) & = \frac{r_1(t)}{r_{01}}, \\
 \delta & = \frac{r_{01}'^3}{r_1^3} - 1, \\
 \frac{r_1'^3}{r_{01}'^3} & = \frac{\delta + x^3}{1 + \delta}, \\
 \frac{r_1'^3}{r_1^3} & = 1 + \frac{\delta}{x^3}, \quad (19a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(x) & = \left( \frac{\delta + x^3}{\delta + 1} \right)^{1/3}, \\
 \xi & = r/r_{01}. \quad (19b)
 \end{aligned}$$

利用上式中的无量纲参数, 以及(3a)和(3b)式, (18)式中右端的积分项可以表示成

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_1}^{r_1'} \frac{2}{r} (\tau_{M,rr}(r, t) - \tau_{M,\theta\theta}(r, t)) dr \\
 & = \int_{r_1}^{r_1'} \frac{4}{r} (C_1(x^{-4} - x^2) - C_2(x^4 - x^{-2})) dr \\
 & - \frac{4}{\tau_0} \times \int_{r_1}^{r_1'} \frac{1}{r} \left( \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_0} (C_1(x^{-4} - x^2) \right. \\
 & \left. - C_2(x^4 - x^{-2})) ds \right) dr. \quad (20)
 \end{aligned}$$

为了简化(20)式引入下列函数:

$$\begin{aligned}
 M(x) & = \int_{r_1}^{r_1'} \frac{1}{r} (C_1(x^{-4} - x^2) - C_2(x^4 - x^{-2})) dr \\
 & = \int_{x_1}^{x_1'} \frac{1}{1-x^3} [C_1(x^{-4} - x^2) \\
 & - C_2(x^4 - x^{-2})] \frac{dx}{x} \\
 & = \frac{C_1 + 2C_2 x_1^2 + 4C_1 x_1^3 - 4C_2 x_1^5}{4x_1^4} \\
 & - \frac{C_1 + 2C_2 A^2(x_1) + 4C_1 A^3(x_1) - 4C_2 A^5(x_1)}{4A^4(x_1)}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

将上式代入(20)式后得到

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_1}^{r_1'} \frac{2}{r} (\tau_{M,rr}(r, t) - \tau_{M,\theta\theta}(r, t)) dr \\
 & = 4 \left( M(x) - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_0} M(x) ds \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

将上式代入(18)式,可以得到  $J_2$  的表达式为

$$J_2 = \tau_{M,rr}(r_1) - \tau_{M,rr}(r'_1) + 4 \left( M(x) - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t e^{-\zeta(t-s)/\tau_0} M(x) ds \right) \quad (23)$$

当气泡发生变形时,根据 Bingham 流体和蛋白质气泡以及蛋白质气泡和内部气体接触边界处的耦合作用下力的平衡条件,气泡内外两个界面处的应力变化满足下列边界条件,其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  为界面 1 和 2 处的表面张力系数.

$$p_G(r_1) = \tau_{M,rr}(r_1) + \frac{2\sigma_1}{r_1}, \quad (24)$$

$$p_L(r'_1) + p_B^{21}(r'_1) + \tau_{L,rr}(r'_1) = \tau_{M,rr}(r'_1) - \frac{2\sigma_2}{r'_1}. \quad (25)$$

由上两式可以得到蛋白质气泡外壁与流体界面处流体压力满足

$$p_L(r'_1) = p_G(r_1) - p_B^{21}(r'_1) - (\tau_{M,rr}(r_1) - \tau_{M,rr}(r'_1)) - \tau_{L,rr}(r'_1) - \frac{2\sigma_2}{r_2} - \frac{2\sigma_1}{r_1}. \quad (26)$$

再根据(8a)式可以得到在该界面处的正应力为

$$\tau_{L,rr}(r'_1) = 4\eta_p \frac{\dot{r}'_1}{r'_1} + \frac{2\tau_y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|}. \quad (27)$$

另外,假定  $t=0$  时刻气泡内气体的初始压力为  $p_0$ ,此时气泡内径的变化率  $\dot{x}(0)=1$ ,当气泡在载荷作用下体积发生改变时内部气体压力的变化为等温的热力学过程,即内部气体压力  $p_G(r_1)$  的表达式为

$$p_G(r_1) = p_0 (r_{01}/r_1)^3 = p_0 x^{-3}. \quad (28)$$

由(26)式可知,为了得到外壁与流体界面处的压力  $p_L(r'_1)$ ,必须结合气泡变形过程中流体流动的动力学方程,其动力学方程为

$$\rho_L \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}. \quad (29)$$

在求解该方程的过程中,流体的密度为  $\rho_L$ ,对方程(29)在区间  $[r'_1, r_3]$  内进行积分,  $r_3$  为流体中任一点到气泡中心的距离,令

$$J_3 = \rho_L \int_{r'_1}^{r_3} \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) dr$$

$$= \rho_L r_1 \ddot{r}_1 \left( \frac{r_1}{r'_1} - \frac{r_1}{r_3} \right) + \rho_L \dot{r}_1^2 \left( \frac{2r_1}{r'_1} - \frac{2r_1}{r_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r_3} \right)^4 - \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r'_1} \right)^4 \right), \quad (30)$$

$$J_4 = \int_{r'_1}^{r_3} \left( \frac{\partial \sigma_{L,rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{L,rr} - \sigma_{L,\theta\theta} - \sigma_{L,\varphi\varphi}}{r} \right) dr = p_L(r'_1) - p_L(r_3) + 2\sqrt{3}\tau_y \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|} \ln \left( \frac{r'_1}{r_3} \right). \quad (31)$$

由  $J_1 = J_2$ ,  $J_3 = J_4$ ,可以得到

$$J_1 + J_3 = \rho_M r_1 \ddot{r}_1 \left( 1 - \frac{r_1}{r'_1} \right) + \rho_M \dot{r}_1^2 \left( \frac{3}{2} - 2 \frac{r_1}{r'_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r'_1} \right)^4 \right) \times \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho_L - \rho_M}{\rho_M} \frac{r_1}{r'_1} \left( \frac{4r_1'^3 - r_1^3}{2r_1'^3} \right) + \frac{\rho_L}{\rho_M} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r_3} \right)^4 - 2 \frac{r_1}{r_3} \right) \right), \quad (32)$$

$$J_2 + J_4 = \tau_{M,rr}(r_1) - \tau_{M,rr}(r'_1) + 4 \left( M(x) - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t e^{-\zeta(t-s)/\tau_0} M(x) ds \right) + p_L(r'_1) - p_L(r_3) + 2\sqrt{3}\tau_y \frac{\dot{r}'_1}{|\dot{r}'_1|} \ln \left( \frac{r'_1}{r_3} \right). \quad (33)$$

将(25)式代入(33)式,根据  $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$ ,并利用(19a)和(19b)式中的无量纲参数,整理后可以得到两个等径的蛋白质气泡在 Bingham 流体中的非线性振动方程,由于两个气泡的振动特性相同,其中的一个为(以气泡 1# 为例)

$$K_1(x)\ddot{x} + K_2(x)\dot{x}^2 + K_3(x)\dot{x} = K_4(x). \quad (34)$$

由于

$$\dot{r}'_1 = \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3} r_{01} \dot{x}, \quad (35)$$

$$\ddot{r}'_1 = \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3} r_{01} \ddot{x} + 2 \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{5/3} \frac{1}{x^4} r_{01} \dot{x}^2, \quad (36)$$

将以上两式代入(14)式得到

$$p_B^{21}(r'_1) = \rho_L \left( 2 \frac{r_1'^3}{L^2} + \frac{7r_1'^5}{4L^4} \right) \ddot{r}'_1 + \rho_L \left( 6 \frac{r_1'^2}{L^2} + \frac{35r_1'^4}{2L^4} \right) \dot{r}'_1^2 = \rho_L \left( \frac{2r_{01}^4 (x^3 + \delta)}{L^2} + \frac{7r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{5/3}}{4L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3} \ddot{x}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_L \left( \left( 6 \frac{r_{01}^4 (x^3 + \delta)^{2/3}}{L^2} + \frac{35 r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{4/3}}{2L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3} \right. \\
& \left. + \left( \frac{4 r_{01}^4 (x^3 + \delta)}{L^2} + \frac{14 r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{5/3}}{4L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{5/3} \frac{1}{x^4} \right) x^2. \quad (37)
\end{aligned}$$

利用上式(34)式中  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$ ,  $K_3(x)$ ,  $K_4(x)$  分别为

$$K_1(x) = \rho_M r_{01}^2 x \left( 1 + \frac{\rho_L - \rho_M}{\rho_M} \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{1/3} - \frac{\rho_L}{\rho_M} x \frac{r_{01}}{r_3} \right) + \rho_L \left( \frac{2 r_{01}^4 (x^3 + \delta)}{L^2} + \frac{7 r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{5/3}}{4L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3}, \quad (38a)$$

$$\begin{aligned}
K_2(x) = & \rho_M r_{01}^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho_L - \rho_M}{\rho_M} \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{1/3} \left( 2 - \frac{1}{2} \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right) \right) + \rho_L r_{01}^2 \left( \frac{1}{2} \left( x \frac{r_{01}}{r_3} \right)^4 - 2 \frac{r_{01}}{r_3} x \right) \\
& + \rho_L \left( \left( 6 \frac{r_{01}^4 (x^3 + \delta)^{2/3}}{L^2} + \frac{35 r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{4/3}}{2L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{2/3} \right. \\
& \left. + \left( \frac{4 r_{01}^4 (x^3 + \delta)}{L^2} + \frac{14 r_{01}^6 (x^3 + \delta)^{5/3}}{4L^4} \right) \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{5/3} \frac{1}{x^4} \right), \quad (38b)
\end{aligned}$$

$$K_3(x) = 4\eta_p \frac{1}{x} \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right) = 4\eta_p \frac{x^2}{x^3 + \delta}, \quad (38c)$$

$$\begin{aligned}
K_4(x) = & p_0 x^{-3} - p_L(r_3) - \frac{2\sigma_1}{r_{01}x} - \frac{2\sigma_2}{r_{02}} \left( \frac{1 + \delta}{\delta + x^3} \right)^{1/3} + 4M(x) - \frac{4}{\tau_0} \int_0^t e^{-\tau_0(t-s)} / \tau_0 M(x) ds \\
& - \frac{2\tau_v}{\sqrt{3}} \beta + 2\sqrt{3} \tau_v \beta \ln \left( \frac{r_{02}}{r_3} \left( \frac{x^3 + \delta}{\delta + 1} \right)^{1/3} \right). \quad (38d)
\end{aligned}$$

在(38d)式中  $\beta = \frac{\dot{x}}{|x|}$ , 所以当  $\dot{x} > 0$  时,  $\beta = 1$ ,

当  $\dot{x} < 0$  时,  $\beta = -1$ .

(34)式是一个非线性振动方程,它反映了在考虑蛋白质膜粘弹性以及两个大小相同、振动特性相同的气泡间相互作用的 Bjerknes 力的情况下,其中一个气泡在 Bingham 流体中有限变形时内径随时间的变化关系.分析(38d)式所表达的载荷可以发现,  $p_0 x^{-3} - p_L(r_3) - \frac{2\sigma_1}{r_{01}x} - \frac{2\sigma_2}{r_{02}} \left( \frac{1 + \delta}{\delta + x^3} \right)^{1/3}$  是气泡内气体与流体压力及两个界面间表面张力之间的差值,它是随气泡内径的变化率  $\dot{x}(t)$  变化的;  $M(x)$  是由于蛋白质膜的弹性有限变形而产生的应力;剩下的3项是由于 Bingham 流体的塑性黏度及蛋白质膜黏性耗散而产生的应力.构成气泡的蛋白质膜的振动就是在以上三项应力的共同作用下发生的.由于表达式中各参量之间的关系比较复杂,很难得到其解析解,为了研究主要参量对气泡振动的影响,下面将采用数值计算的方法进行分析.

## 6. 数值模拟计算及结果分析

在数值模拟计算过程中,假定两个气泡外的空

间足够大,两个等径气泡间相互作用是等同的.利用四阶 Runge-Kutta 算法,运用 Matlab 对(34)式通过编程进行数值计算,为了保证离散化的非线性方程解的收敛,在数值计算过程中,时间步长取  $10^{-7}$  s,设定的最大允许误差为  $10^{-6}$ .

### 6.1. Bingham 流体塑性黏度对蛋白质气泡振动的影响

塑性黏度是 Bingham 流体的一个重要参数,下面模拟内径  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3}$  m,膜的厚度  $\Delta = 1.0 \times 10^{-4}$  m 的蛋白质气泡在相同的内部初始压力  $p_0 = 0.1$  MPa,周围流体静压力  $p_L = 0.3$  MPa 的情况下,塑性黏度  $\eta_p$  分别为 0.04, 0.1, 0.4 和 1.0 Pa·s 时的振动特性.对于气泡膜的厚度  $\Delta$  定义为蛋白质气泡内外壁面的半径之差,以图 1 中的气泡 1# 为例,  $\Delta = r'_1 - r_1$ .参数  $\eta_m$  为蛋白质膜的黏性系数,  $\nu'_1(0)$  为蛋白质膜的零剪切弹性模量.

从图 2 的模拟计算结果可以看出,增加 Bingham 流体的塑性黏度  $\eta_p$ ,蛋白质气泡振幅衰减速度加快,振动周期增加,频率减小.这是由于随着塑性黏度  $\eta_p$  的增加,从(38c)式可以看出,振动系统的阻尼会随之增加,从而导致了上述结果.另外,数值计算结果还表明,对应于  $\eta_p = 0.04$  Pa·s 和  $\eta_p = 1.0$  Pa·s

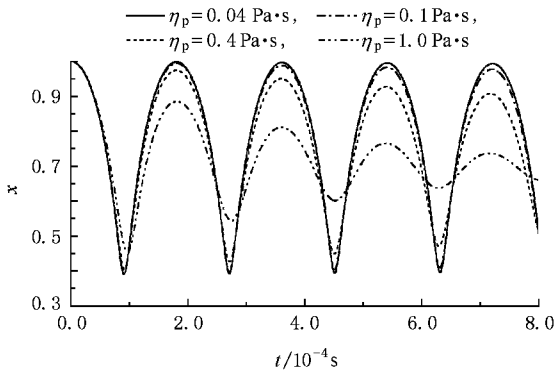


图2 不同塑性黏度对气泡振动特性的影响(参数:  $\rho_M = 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_m = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\mu(0) = 100 \text{ Pa}$ ,  $C_1 = 80 \text{ Pa}$ ,  $C_2 = 20 \text{ Pa}$ ,  $\rho_L = 1.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\tau_y = 0.86 \text{ Pa}$ ,  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $p_L = 0.3 \text{ MPa}$ ,  $L = 2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$ )

的情形,当气泡内外作用力平衡时,气泡的变形率分别为 0.70 和 0.74,因此塑性黏度大的流体中的蛋白质气泡变形小。

### 6.2. 气泡间距离对气泡振动特性的影响

图 3 是模拟两个蛋白质气泡的内径为  $r_{01} = r_{02} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,当两个气泡间距离发生改变时气泡的振动特性.从图 3 中可以看出,当气泡间距离逐渐减小时,气泡 2# 对气泡 1# 的振动特性的影响是逐渐加强的.在此过程中,气泡壁面振幅衰减速度加快,振动频率是逐渐增加的。

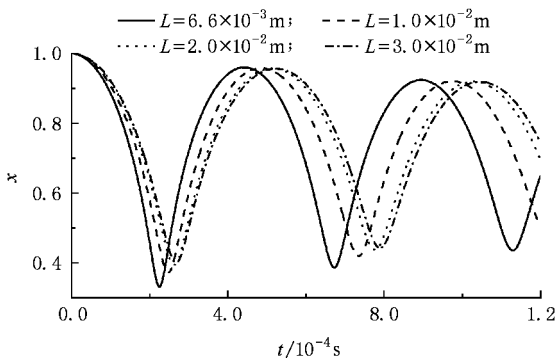


图3 气泡间距离变化时振动特性比较(参数:  $\rho_M = 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_m = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\mu(0) = 100 \text{ Pa}$ ,  $C_1 = 80 \text{ Pa}$ ,  $C_2 = 20 \text{ Pa}$ ,  $\rho_L = 1.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_p = 0.042 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\tau_y = 0.86 \text{ Pa}$ ,  $r_{01} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta = 3.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $p_L = 0.3 \text{ MPa}$ )

根据数值模拟的结果,在蛋白质气泡的应用过程中,如果在相同体积的流体中气泡的含量越大,即气泡间距离越近,那么流体中气泡壁面的振动频率

就越高,例如,当蛋白质气泡用于成像过程中,必须考虑气泡间的相互影响导致振动频率的变化.另外,当蛋白质气泡用于药物输送的过程中,还必须考虑由于气泡间的相互作用所导致的频率变化是否会超出血管的承受变形要求,从而控制气泡间距或内外压力差以保证蛋白质气泡在输送过程中的安全。

### 6.3. 气泡初始半径不同时振动特性对比

图 4 中所模拟的是两个蛋白质气泡的内径为  $r_{01} = r_{02} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,气泡膜厚度  $\Delta = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,蛋白质膜的其他参数  $\rho_M$ ,  $\eta_m$ ,  $\mu(0)$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  及外部流体的特征参数与 6.2 节中相同。

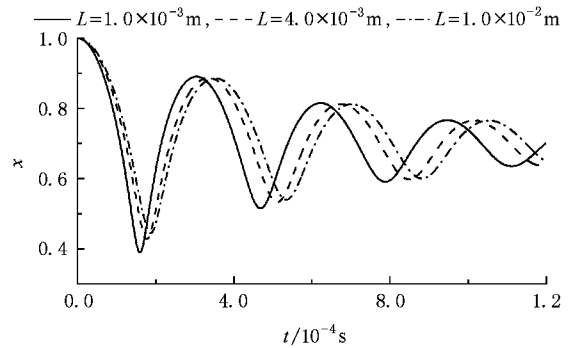


图4 气泡初始半径  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$  时振动特性(参数:  $\rho_M = 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_m = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\mu(0) = 100 \text{ Pa}$ ,  $C_1 = 80 \text{ Pa}$ ,  $C_2 = 20 \text{ Pa}$ ,  $\rho_L = 1.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_p = 0.042 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\tau_y = 0.86 \text{ Pa}$ ,  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $p_L = 0.3 \text{ MPa}$ )

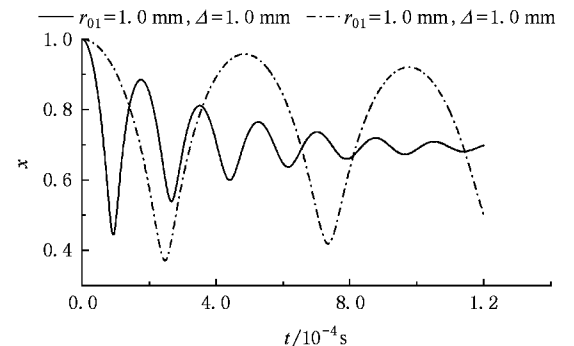


图5 气泡初始半径  $r_{01}$  不同时振动特性的对比(参数:  $\rho_M = 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_m = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\mu(0) = 100 \text{ Pa}$ ,  $C_1 = 80 \text{ Pa}$ ,  $C_2 = 20 \text{ Pa}$ ,  $\rho_L = 1.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_p = 0.042 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\tau_y = 0.86 \text{ Pa}$ ,  $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $p_L = 0.3 \text{ MPa}$ )

比较图 3 和图 4 的模拟结果,表明在相同载荷作用下,初始半径小的气泡振动频率高,振幅衰减快.另外,气泡间距离的改变对频率和振幅变化的影

响程度也不相同.从图 5 可以看出,气泡初始半径越小,气泡振动的频率和振幅衰减的速率越大.

#### 6.4. 两个气泡与单个气泡振动特性的对比

在文献 [12] 中,建立了 Bingham 流体中单个蛋白质气泡的动力学特性方程为

$$K'_1(x)\ddot{x} + K'_2(x)\dot{x}^2 + K'_3(x)\dot{x} = K'_4(x), \quad (39)$$

$$K'_1(x) = \rho_M r_{01}^2 x \left( 1 + \frac{\rho_L - \rho_M}{\rho_M} \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{1/3} - \frac{\rho_L}{\rho_M} x \frac{r_{01}}{r_3} \right), \quad (40a)$$

$$K'_2(x) = \rho_M r_{01}^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho_L - \rho_M}{\rho_M} \left( \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right)^{1/3} \times \left( 2 - \frac{1}{2} \frac{x^3}{x^3 + \delta} \right) + \rho_L r_{01}^2 \left( \frac{1}{2} \left( x \frac{r_{01}}{r_3} \right)^4 - 2 \frac{r_{01}}{r_3} x \right) \right). \quad (40b)$$

$K'_3(x)$ ,  $K'_4(x)$  分别与 (38c) 式和 (38d) 式的  $K_3(x)$ ,  $K_4(x)$  相同.

将  $K'_1(x)$ ,  $K'_2(x)$  与 (38a) 式和 (38b) 式中的  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$  进行对比,可以发现,  $K'_1(x)$ ,  $K'_2(x)$  比  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$  多出了附加项.这个附加项就反映了 (37) 式所表达的 Bjerknes 力的影响.由于 (34), (39) 式都是衰减的非线性振动方程<sup>[29]</sup>,而 (37) 式所示的 Bjerknes 力是流体流动的速度及加速度的函数,与流体的流动是紧密联系的,而且受气泡与流体边界的大小及气泡间距离  $L$  的影响.而且 (37) 式的一阶和二阶微分项的系数均为正,这导致在考虑 Bjerknes 力的情况下,非线性振动方程 (34) 的一阶和二阶微分项的系数发生变化,根据文献 [29] 的理论分析结论,这将导致气泡的振动频率增加,振幅衰减的速度加快.

将 (39) 式和 (34) 式进行对比研究,分析初始条件和边界条件相同的两个与单个蛋白质气泡在 Bingham 流体中的振动特性,利用数值模拟计算的方法来分析两个气泡间相互作用的 Bjerknes 力对气泡振动特性的影响.图 6 模拟的是 Bingham 流体中单个气泡与两个气泡振动特性的对比.在数值模拟过程中所使用的蛋白质膜和流体的特性参数均相同,气泡的内壁半径均为  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3}$  m.两个气泡间距离为  $L = 2.2 \times 10^{-3}$  m.

从数值模拟结果可以看出,由于流体中两个气

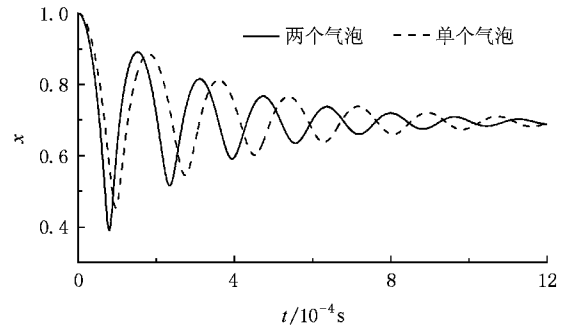


图 6 单个与两个气泡在 Bingham 流体中振动特性比较(参数:  $\rho_M = 0.9 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_m = 1.0$  Pa·s,  $t(0) = 100$  Pa,  $C_1 = 80$  Pa,  $C_2 = 20$  Pa,  $\rho_L = 1.65 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_p = 0.042$  Pa·s,  $\tau_y = 0.86$  Pa,  $r_{01} = 1.0 \times 10^{-3}$  m,  $\Delta = 1.0 \times 10^{-4}$  m,  $p_0 = 0.1$  MPa,  $p_L = 0.2$  MPa,  $L = 2.2 \times 10^{-3}$  m)

泡间受到 Bjerknes 作用力的影响,气泡振动频率和振幅衰减速度的改变比较明显.与单个气泡相比,当流体中一个气泡受到另一个气泡 Bjerknes 力作用时,会导致气泡的振动频率增加,振幅衰减的速度加快.本文的数值模拟结果与文献 [29] 的理论分析是相符的.

## 7. 结 论

本文利用粘弹性膜构成的蛋白质气泡有限变形方程,并考虑一个气泡在 Bingham 流体中振动产生的 Bjerknes 力对另一个气泡振动特性的影响,利用蛋白质气泡的动力学方程和气泡外流体流动的动力学方程,建立了两个等径蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动的非线性方程.它反映了在考虑蛋白质膜黏弹性以及两个大小相同、振动特性相同的气泡间相互作用的 Bjerknes 力的情况下,其中一个气泡在 Bingham 流体中有限变形时内径随时间的变化关系.

利用数值模拟计算的方法分析了 Bingham 流体的塑性黏度、两个蛋白质气泡在不同初始半径情形时的振动特性以及气泡间距离对气泡壁振动特性的影响,并且与单个蛋白质气泡在 Bingham 流体中的振动特性进行了对比研究.研究结果表明,增加 Bingham 流体的塑性黏度,蛋白质气泡振幅衰减速度加快,振动周期增加,频率减小;两个气泡间距离会影响气泡振动特性,当两个气泡间的距离减小时,气泡振动频率会增加,振幅衰减速度加快,而对于初始半径不同的气泡而言,初始半径小的气泡振动频率



高,振幅衰减快,而且振动的频率和振幅衰减的速率越大;与单个气泡相比,两个蛋白质气泡在 Bingham 流体中振动时,蛋白质气泡的振动具有更高的振动频率,而且振幅衰减速度更快.数值模拟结果对于实

际应用具有一定的指导作用,通过分析气泡间的相互作用对气泡壁面振动特性的影响,可以为更好利用蛋白质气泡提供重要参考.

- [ 1 ] Bekeredjian R , Graybum P A , Shohet R 2005 *J. Am. Coll. Cardiol.* **45** 329
- [ 2 ] Van W A , Bouakaz A , Bernard B , Cate T F , Jong N 2005 *J. Control. Release* **101** 389
- [ 3 ] Tao Y , Joseph L B 2006 *J. Biomech. Eng.* ( Trans. ASME ) **128** 554
- [ 4 ] Unger E C , Porter T , Culp W , Labell R , Matsunaga T , Zutshi R 2004 *Adv. Drug. Deliv. Rev.* **56** 1291
- [ 5 ] Maruyama H , Seki H , Suzuki A , Inoue N 2007 *Water Res.* **41** 710
- [ 6 ] Burapatana V , Prokop A , Tanner R D 2005 *Sep. Sci. Technol.* **40** 2445
- [ 7 ] Liang B , Zhu Z M , Cheng J C 2006 *Chin. Phys.* **15** 412
- [ 8 ] Church C C 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **97** 1510
- [ 9 ] Friking P J , Nico J 1998 *Eur. J. Ultrasound* **24** 523
- [ 10 ] Khismatullin D B 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 1463
- [ 11 ] Qian M L , Cheng Q , Ge C Y 2002 *Acta. Acoust.* **27** 289 ( in Chinese ) [ 钱梦茜、程茜、葛曹燕 2002 声学学报 **27** 289 ]
- [ 12 ] Wang H M , Ma J M , Zhang W 2008 *Acta Mech. Solid Sin.* **29** 325 ( in Chinese ) [ 王海民、马建敏、张文 2008 固体力学学报 **29** 325 ]
- [ 13 ] Wijngaarden L V , Jeffrey D J 1976 *J. Fluid. Mech.* **77** 27
- [ 14 ] Kornfeld M , Suvorov L 1944 *J. Appl. Phys.* **15** 495
- [ 15 ] Harkin A A 2001 *Nonlinear dynamics of gas bubbles in liquids* ( Ph. D Thesis ) ( Boston : Boston University )
- [ 16 ] Weiss P 1944 *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **40** 259
- [ 17 ] Blake F G 1949 *J. Acoust. Soc. Am.* **21** 551
- [ 18 ] Crum L A 1975 *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 1363
- [ 19 ] Pelekasis N A , Tsamopoulos J A 1993 *J. Fluid. Mech.* **254** 467
- [ 20 ] Pelekasis N A , Tsamopoulos J A 1993 *J. Fluid. Mech.* **254** 501
- [ 21 ] Zhang A M , Yao X L , Li J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1672 ( in Chinese ) [ 张阿漫、姚熊亮、李佳 2008 物理学报 **57** 1672 ]
- [ 22 ] Zhou G Q , Liu X M 1996 *Theory of Viscoelasticity* ( Hefei : University of Science and Technology of China Press ) ( in Chinese ) [ 周光泉、刘孝敏 1996 粘弹性理论 合肥 :中国科学技术大学出版社 ]
- [ 23 ] Aleksey D D 1997 *Int. J. Solids Struct.* **34** 2685
- [ 24 ] Wang H M , Ma J M , Zhang W 2007 *J. Appl. Phys.* **102** 074919
- [ 25 ] Jiang T Q 2004 *Chemical Engineering Rheology* ( Shanghai : East China University of Science and Technology Press ) ( in Chinese ) [ 江体乾 2004 化工流变学 ( 上海 :华东理工大学出版社 ) ]
- [ 26 ] Liu B T , Muller S J , Morton M D 2002 *J. Non-Newtonian. Fluid. Mech.* **102** 179
- [ 27 ] Shima T A , Tsujino T 1978 *J. Applied. Mech.* ( Trans. ASME ) **45** 37
- [ 28 ] Huang K Z , Xue M D , Lu M W 2003 *Tensor Analysis* ( Beijing : Tsinghua University Press ) ( in Chinese ) [ 黄克智、薛明德、陆明万 2003 张量分析 ( 北京 :清华大学出版社 ) ]
- [ 29 ] Sansone G , Conti R 1964 *Nonlinear Differential Equations* ( New York : Pergamon Press )

# Vibration of two equal-radius protein bubbles in Bingham fluid<sup>\*</sup>

Wang Hai-Min<sup>1)†</sup> Ma Jian-Min<sup>2)</sup> Zhang Wen<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> College of Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China )

<sup>2)</sup> Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, China )

( Received 19 February 2009 ; revised manuscript received 27 March 2009 )

## Abstract

Based on the finite deformation equation of protein bubble with viscoelastic film, and taking into account the Bjerknes effect that one oscillating bubble acts on the other in Bingham liquid, a nonlinear equation describing the vibration of two equal-radius protein bubbles in Bingham fluid is built. The numerical simulation is used to solve the above nonlinear equation. The results show that, increasing the plastic viscosity of Bingham liquid the protein bubble wall will vibrate with higher decrement velocity of amplitude, and with lower frequency; shortening the distance between bubbles, the bubble wall will vibrate with a higher frequency and a higher decrement velocity of amplitude. Furthermore, the smaller the bubble size is, the higher the increment of frequency and decrement velocity of amplitude are. The two bubbles in Bingham fluid will vibrate with higher frequency and higher decrement velocity of amplitude than that of a single bubble.

**Keywords** : protein bubble, Bjerknes force, non-linear vibration, Bingham fluid

**PACC** : 4630C, 4750, 6260

<sup>\*</sup> Project supported by the Leading Academic Discipline Project of Shanghai Municipal Education Commission ( Grant No. J50501 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : hmwang@usst.edu.cn