

过阻尼谐振子的随机共振*

张 莉^{1)†} 刘 立²⁾ 曹 力²⁾

1) (中南民族大学电子信息工程学院, 武汉 430074)

2) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2009 年 2 月 16 日收到; 2009 年 7 月 17 日收到修改稿)

研究了由交叉相关高斯白噪声驱动的过阻尼谐振子的随机共振, 其中加法噪声被周期信号所调制, 运用平稳关联函数的傅里叶变换, 导出了过阻尼谐振子随机模型信噪比的精确表达式. 结果揭示: 在过阻尼谐振子的随机模型中存在二类随机共振. 一类随机共振表现为信噪比随乘法噪声强度 Q 变化的曲线存在共振峰, 另一类随机共振表现为信噪比随振子频率 ω 变化的曲线存在共振峰. 大幅度改变信号频率 Ω 值的大小, 信噪比随乘法噪声强度 Q 变化的曲线有单峰, 一峰一谷和单调变化三种不同的形式.

关键词: 过阻尼谐振子, 随机共振, 乘法噪声

PACC: 0540, 4260K

1. 引 言

噪声有两面性, 我们通常看到的是其消极的一面. 噪声的建设性的、积极的一面, 很好地表现在随机共振现象上. 随机共振是上世纪 80 年代先后从理论和实验发现的^[1,2], 现已渗透到各个学科领域^[3]. 随机共振的核心是动力学系统对输入信号的响应能够被噪声所优化. 随机共振的标准判据是信噪比曲线出现共振峰(极大值). 近年来, Cao 等研究过谐振子扩散的信号调制效应和噪声交叉关联效应^[4]及激光系统中的随机共振^[5]. 特别是张良英, 陈德彝等研究了线性化激光方程的随机共振^[6-9]. Gitterman 系统地研究过双态噪声驱动的谐振子的随机共振^[10,11]. 据我们的了解, 本文研究的由信号调制的噪声及交叉相关噪声所驱动的过阻尼谐振子的随机共振, 国内外未见报道. 噪声驱动的线性谐振子是自然界各种现象的最简单的基础模型, 因而它也成为各类基本概念的理论典范. 鉴于具有涨落频率的谐振子已成为包括物理学、生物学和化学等诸多学科领域的研究对象, 我们在本文中将对这一系统可能出现的随机共振现象, 以及噪声参数对其随机共振的影响进行研究.

2. 模 型

阻尼谐振子的运动方程为

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega^2 x, \quad (1)$$

其中 γ 是系统的阻尼系数, 在过阻尼情况, 可忽略惯性项 \ddot{x} , 方程(1)降为一阶常微分方程. 这时, 我们再考虑下列物理因素, 便得到一个既能出现随机共振又不必使用色噪声的可精确求解的物理模型:

因素 1, 环境涨落. 引入加法噪声 $\xi(t)$ 反映振子受环境涨落的影响, 同时引入乘法噪声 $\eta(t)$ 反映振子频率受环境涨落的影响. 两噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 来自同一噪声源, 故相互关联.

因素 2, 噪声受信号的调制. 当噪声 $\xi(t)$ 的强度以信号频率 Ω 作周期振动时, 将使随机动力学方程产生有趣的物理效应. 故引入调制噪声项 $\xi(t)A\cos(\Omega t)$. 基于上面考虑, 本文提出的过阻尼谐振子的无量纲随机动力学模型为

$$\dot{x} = -(\omega^2 + \eta(t))x + \xi(t)A\cos(\Omega t), \quad (2)$$

式中 $A\cos(\Omega t)$ 为信号, A 为信号幅度. 高斯白噪声 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 的统计性质设为

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= \langle \xi(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2Q\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10275025)

† 通讯联系人. E-mail: zhangli1996@163.com

$$\begin{aligned}\langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), & (4) \\ \langle \eta(t)\xi(t') \rangle &= \langle \xi(t)\eta(t') \rangle \\ &= 2\lambda \sqrt{DQ}\delta(t-t'),\end{aligned}$$

式中 D, Q 分别为加法噪声强度和乘法噪声强度, λ 为两噪声间的关联系数, 其取值范围为 $-1 \leq \lambda \leq 1$. 下面可看到, 上述两物理因素共同作用的结果是: 线性系统受高斯白噪声驱动, 也能出现随机共振.

3. 信噪比

解(2)式, 可得

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} + A e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \\ &\quad \times \int_0^t \xi(\tilde{s}) \cos(\Omega \tilde{s}) \cdot e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s}. & (5)\end{aligned}$$

要求信噪比, 须先求出系统的输出功率谱, 而功率谱则是 $x(t)$ 的稳态关联函数的傅里叶变换. 因此, 第一步是由(5)式构成关联函数 $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$, 即

$$\begin{aligned}\langle x(t)x(t+\tau) \rangle &= \langle [x_0 e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \\ &\quad + A e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \int_0^t \xi(\tilde{s}) \cos \Omega \tilde{s} \\ &\quad \times e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s}] \\ &\quad \times [x_0 e^{-\int_0^{t+\tau} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} \\ &\quad + A e^{-\int_0^{t+\tau} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} \int_0^{t+\tau} \xi(\tilde{s}') \cos \Omega \tilde{s}' \\ &\quad \times e^{\int_0^{\tilde{s}'} [\omega^2 + \eta(s'')] ds''} d\tilde{s}'] \rangle. & (6)\end{aligned}$$

第二步, 为了求得信噪比, 须对(6)式进行周期平均, 并令 $t \rightarrow \infty$, 以获得平稳的关联函数 $C(\tau)$, 即

$$\begin{aligned}C(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} [x(t')x(t'+\tau)] dt' \\ &= M e^{-(\omega^2+Q)\tau} + \frac{1}{2} N \cos(\Omega\tau), & (7)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M &= \frac{\lambda^2 Q D}{(\omega^2 + Q)} + \frac{(\omega^2 + Q)^2}{2[(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2]} \\ &\quad - \frac{\lambda^2 A Q D (\omega^2 + Q)}{2[(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2]^2} \\ &\quad + \frac{\lambda^2 A^2 Q D \Omega^2}{2[(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2]^2}, & (8)\end{aligned}$$

$$N = \frac{\lambda^2 A^2 Q D}{2[(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2]}. & (9)$$

第三步是求输出功率谱. 过阻尼谐振子的输出

功率谱 $S(\tilde{\omega})$ 可由 $C(\tau)$ 通过傅里叶变换求出

$$S(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau. & (10)$$

最后一步是求信噪比. 为此, 对 $S(\tilde{\omega})$ 作如下分解, 并只取正频:

$$S(\tilde{\omega}) = S_1(\tilde{\omega}) + S_2(\tilde{\omega}), & (11)$$

其中, 输出信号功率谱

$$S_1(\tilde{\omega}) = \frac{\pi}{2} N \delta(\tilde{\omega} - \Omega); & (12)$$

输出噪声功率谱

$$S_2(\tilde{\omega}) = M \frac{2(\omega^2 + Q)}{(\omega^2 + Q)^2 + \tilde{\omega}^2}; & (13)$$

输出信号总功率

$$P_s = \int_0^{\infty} S_1(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = \frac{N}{2}, & (14)$$

信噪比 SNR 定义为输出信号总功率 P_s 与 $\tilde{\omega} = \Omega$ 处噪声平均功率 $S_2(\tilde{\omega} = \Omega)$ 之比, 即

$$SNR = \frac{P_s}{S_2(\tilde{\omega} = \Omega)} = \frac{\frac{\pi}{2} N}{M \frac{2(\omega^2 + Q)}{(\omega^2 + Q)^2 + \Omega^2}}, & (15)$$

(15)式中的 M 和 N 分别由(8)和(9)式给出.

4. 讨 论

下面分别讨论信噪比 SNR 随加法噪声强度 D , 乘法噪声强度 Q 和谐振子频率 ω 的变化关系.

1) $SNR-D$ 曲线是单调增加的, 最后达到饱和, 不存在随机共振, 如图 1 所示.

2) 图 2 表示以噪声间关联系数 λ 为参数画出的 $SNR-Q$ 曲线, 曲线显示了随机共振. 即 SNR 先随 Q 增大而增大, 达到极大值后又随 Q 增大而减小. SNR 极大值处的 Q 优化了信号传输, 使信噪比达到最大. 从图中可以看出, 随 λ 值的增大, 共振峰变高, 极值位置没有移动. 图 3 反映了以加法噪声强度 D 为参数画出的 $SNR-Q$ 曲线. 从图中可以看出, 随 D 值的增大, 共振峰变高, 极值位置没有移动.

3) 从图 4 可以看出, $SNR-\omega$ 曲线出现随机共振. 随加法噪声强度 D 值的增大共振峰迅速变高变窄, 共振峰的位置向右移动. 以 λ 为参数的 $SNR-\omega$ 曲线如图 5 所示. 图中显示随着 λ 值的增大, 即噪声关联系数加大, 共振峰迅速变高, 峰的位置向右移动.

4) 以 Ω 为参数的 $SNR-Q$ 曲线如图 6 所示. 随着 Ω 值增大 $SNR-Q$ 曲线的共振峰增高, 但极值位

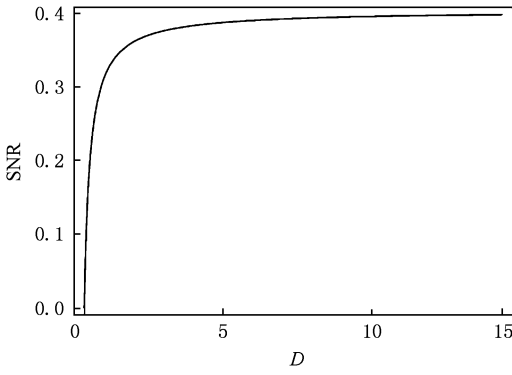


图1 信噪比 SNR 随加法噪声强度 D 变化的曲线 (参数值: $\omega = 1, A = 1, \Omega = 5, Q = 0.2$ 和 $\lambda = 0.9$)

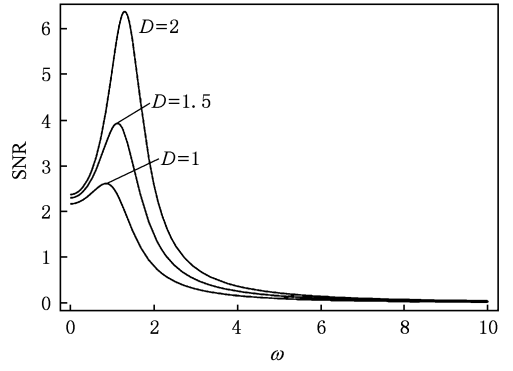


图4 信噪比 SNR 随共振频率 ω 变化的曲线 (参数值: $A = 2, \Omega = 2, \lambda = 0.9$ 和 $Q = 1, D = 1, 1.5, 2$)

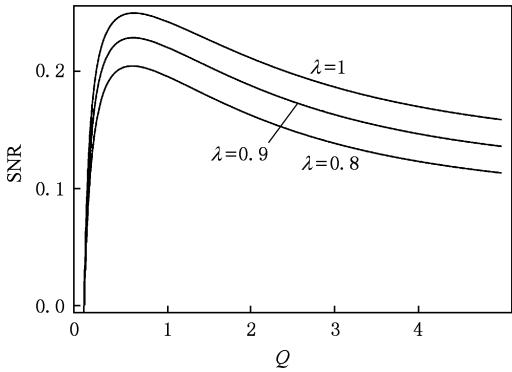


图2 信噪比 SNR 随乘法噪声强度 Q 变化的曲线 (参数值: $\omega = 1, A = 1, \Omega = 5, D = 2$ 和 $\lambda = 0.8, 0.9, 1$)

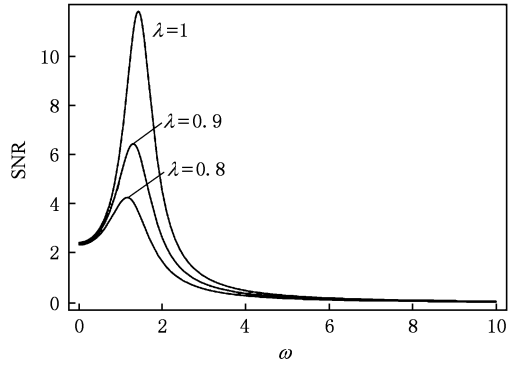


图5 信噪比 SNR 随共振频率 ω 变化的曲线 (参数值: $A = 2, \Omega = 2, D = 2$ 和 $Q = 1, \lambda = 0.8, 0.9, 1$)

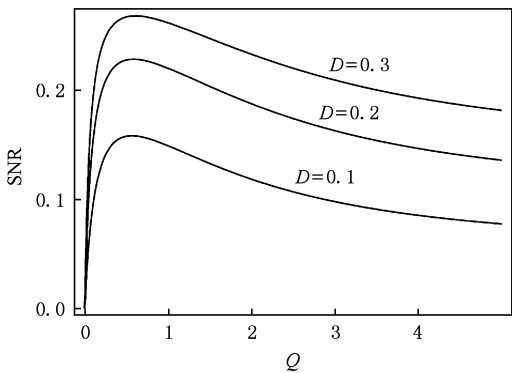


图3 信噪比 SNR 随乘法噪声强度 Q 变化的曲线 (参数值: $\omega = 1, A = 1, \Omega = 5, \lambda = 0.9$ 和 $D = 0.1, 0.2, 0.3$)

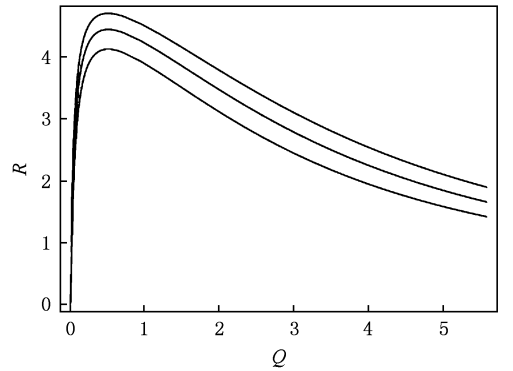


图6 信噪比 R ($R = 10^{10} \text{SNR}$) 随乘法噪声强度 Q 变化的曲线 (参数值: $\omega = 1, A = 0.00004, D = 0.1, \lambda = 0.5$, 曲线由上到下 Ω 取值分别为 20, 18, 16)

置不变。

大幅度改变参数 Ω , SNR- Q 曲线有三种不同的形式. $\Omega = 20$ 时曲线为单峰; $\Omega = 2$ 时曲线有峰有谷, 即有一极大值和一极小值, $\Omega = 0.2$ 时 SNR- Q 曲线单调增加到饱和. 如图 7 所示.

图 7 揭示: 噪声的调制频率 Ω 处于不同的数量级时, 输出信噪比随乘法噪声强度 Q 的变化曲线显示一种类相变现象, 即当 Ω 由 20 减小到 0.2 的过程, SNR- Q 曲线从单峰相, 到一峰一谷最后到无峰无谷的单调相.

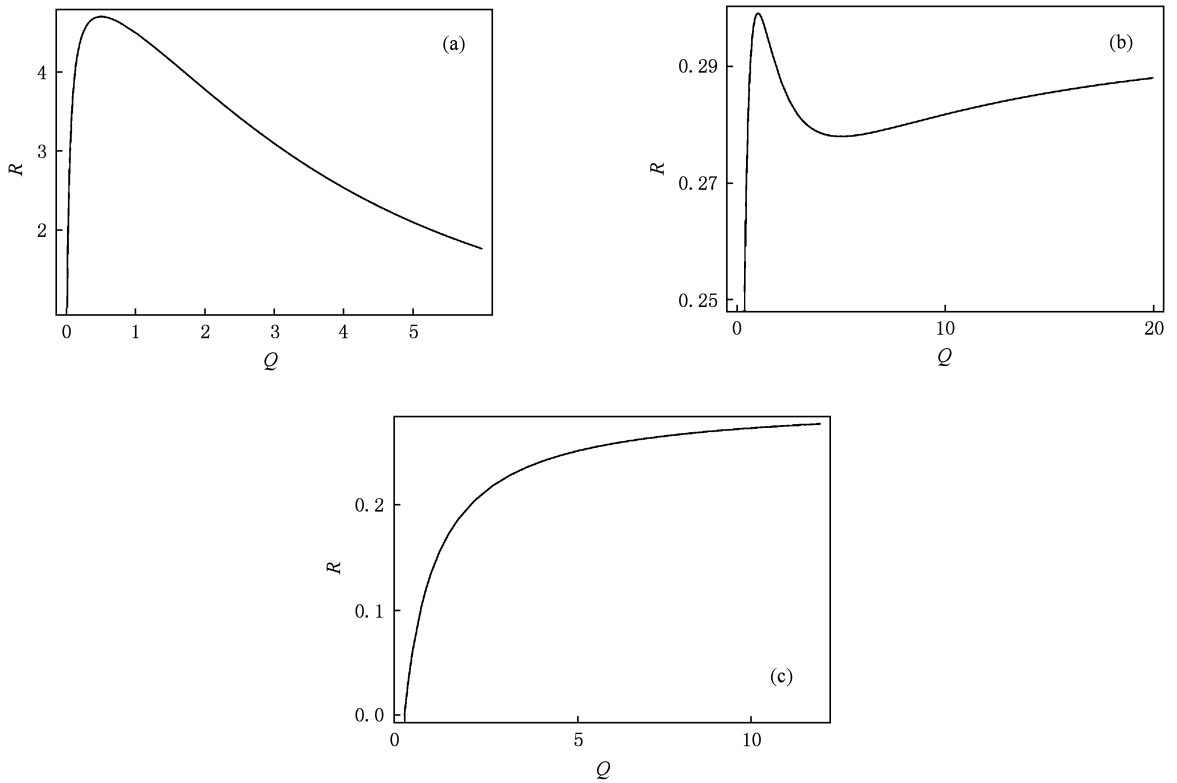


图7 信噪比 R ($R = 10^{10} \text{SNR}$) 随乘法噪声强度 Q 变化的曲线
(参数值: $\omega = 1, A = 0.00004, D = 0.1, \lambda = 0.5$) (a) $\Omega = 20$;
(b) $\Omega = 2$; (c) $\Omega = 0.2$

5. 结 论

从图2和图3可以看到,反映振子频率涨落强弱乘法噪声强度 Q 取适当值时,SNR最大,使信号传输得以优化.而从图5则可看出,对 λ 的不同取

值,振子频率 ω 对信号传输的优化也不同. λ 越大,优化频率越高,优化程度也高.对 D 也有类似效应.大幅度改变信号频率 Ω 值的大小,SNR- Q 曲线存在三种“相”.所以,过阻尼谐振子的随机共振,是由噪声之间的关联效应和加性噪声的信号调制效应共同诱导产生.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *Phys. A: Math. Gen.* **14** 453
 [2] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
 [3] Gammaitoni L, Haggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
 [4] Cao L, Wu D J 2007 *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 1721
 [5] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2008 *Commun Theor. Phys.* **49** 1310
 [6] Zhang L Y, Cao L, Gin G X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6238 (in Chinese) [张良英、曹力、金国祥 2006 物理学报 **55**

6238]
 [7] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英、曹力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
 [8] Chen D Y, Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3333 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2008 物理学报 **57** 3333]
 [9] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 102 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2009 物理学报 **58** 102]
 [10] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
 [11] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 04110

Stochastic resonance in an overdamped harmonic oscillator^{*}

Zhang Li^{1)†} Liu Li²⁾ Cao Li²⁾

1) (*College of Electrics and Information Engineering, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China*)

2) (*School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

(Received 16 February 2009; revised manuscript received 17 July 2009)

Abstract

The stochastic resonance in an overdamped harmonic oscillator driven by cross-correlation Gaussian white noises in which one of the noises is modulated by a periodic signal is studied. By means of the Fourier transform of the stationary correlation function, an exact expression of the signal-to-noise ratio for the overdamped harmonic oscillator stochastic model is derived. Results reveal that there are two types of stochastic resonance in an overdamped harmonic oscillator stochastic model. One type of stochastic resonance is that a resonance peak exists in the curves of signal-to-noise ratio versus the multiplicative noise intensity Q . Another type of stochastic resonance is that a resonance peak exists in the curves of signal-to-noise ratio versus the oscillator frequency ω . By changing the value of signal frequency Ω , the signal-to-noise ratio versus Q curve can exhibit three different forms: the form with a signal peak, the form with a peak following a valley, and the monotonic form.

Keywords: overdamped harmonic oscillator, stochastic resonance, multiplicative noise

PACC: 0540, 4260K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10275025).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangli1996@163.com