Sinh-Gordon 方程的同伦近似解*

叶望川 李 彪† 王 佳
(宁波大学数学系,宁波 315211)
(2010 年 4 月 28 日收到;2010 年 5 月 6 日收到修改稿)

本文利用同伦分析方法得到了 Sinh-Gordon 方程的近似解. 在所得到的解中包含一个辅助参数,可以有效地控制级数解的收敛范围和收敛速度.

关键词: 同伦分析方法, Sinh-Gordon 方程, 近似解
PACS: 02.60.Cb, 02.70.Wz

1. 引 言

在非线性科学中,寻找一种新的数学演算法来求得非线性偏微分方程的精确解或者近似解是一项重要的和必要的工作. 许多数学家和物理学家已经发现了求非线性偏微分方程的特殊的解的方法,譬如反散射方法[1], Darboux 变换, Painlevé 截断展开法[2,3],子函数展开法[4—11],多极矩法[12], Lie 对称方法[13—20], 多线性变量分离法[21], Fourier 变换方法[22], 辛特征函数展开方法[23], Noether 方法[24]等等.

1992 年,廖世俊提出了一种新的分析方法,即同伦分析方法,通过该方法可以得到所给非线性系统[25]的级数解. 同伦分析方法包含一个辅助参数 h, 它为我们提供了一个简便的方法来控制级数解的收敛范围和收敛速度. 另外,通过所谓的 h 曲线,很容易找到辅助参数 h 的有效范围,从而获得收敛的级数解. 因此通过同伦分析方法,能够得到非线性偏微分方程的分析解. 一些专家已经成功地运用此方法解决了很多非线性问题[26—33].

在本文中,我们将利用同伦分析方法研究著名的 Sinh-Gordon 方程. 带有初始条件的 Sinh-Gordon 方程如下:

$$u_{xt} + \sinh(u) = 0; \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\tanh^4 x - 1}{\tanh^2 x}\right),$$

$$u_x(x, 0) = -\frac{2(\tanh^2 x - 1)}{\tanh x}. \tag{2}$$

它的精确解为 $u = \sinh^{-1}\left(\frac{\tanh^4\left(x - \frac{t}{4}\right) - 1}{2\tanh^2\left(x - \frac{t}{4}\right)}\right)$. 许多数学家和物理学家都对方程(1)进行过研究[34—37].

本文的具体结构如下:第二部分简要介绍了同伦分析方法的基本原理;第三部分利用同伦分析方法得到了方程(1)的近似解;第四部分进行了简要的总结。

2. 同伦分析方法的基本原理

基于拓扑理论中的同伦思想,廖世俊于 1992 年提出了同伦分析方法. 首先,我们将同伦分析方法的基本原理做一个简单的说明. 考虑微分方程

$$N[u(x, t)] = 0, \tag{3}$$

其中 N 是一个非线性算子, x 和 t 为自变量, $u(x, t)$ 是未知函数. 基于同伦分析方法,首先构造零阶形变微分方程

$$(1 - p)L[\phi(x, t; p) - u_0(x, t)] = phN[\phi(x, t; p)], \tag{4}$$

其中 L 是一个辅助线性算子, $u_0(x, t)$ 是一个初始猜测解, $h \neq 0$ 是一个辅助参数, $p \in [0, 1]$ 是嵌入变量. 具体地,当 $p = 0$ 和 $p = 1$ 时,得到

$$\phi(x, t; 0) = u_0(x, t),$$

* 浙江自然科学基金(批准号:Y6090592),国家自然科学基金(批准号:10735030),宁波自然科学基金(批准号:2009B21003)和宁波大学王宽诚基金资助的课题.
† 通讯联系人. E-mail: biaolee2000@yahoo.com.cn (B. Li)

$$\phi(x,\ t;1)\ =\ u(x,\ t), \tag{5}$$

当嵌入变量 p 从 0 增大到 1 时,$\phi(x,\ t;\ p)$ 从初始猜测解 $u_0(x,\ t)$ 变化到精确解 $u(x,\ t)$. 将 $\phi(x,\ t;\ p)$ 关于嵌入变量 p 进行泰勒展开,有

$$\phi(x,\ t;\ p)\ =\ u_0(x,\ t)\ +\ \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,\ t)p^m, \tag{6}$$

其中

$$u_m(x,\ t)\ =\ \frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(x,t;p)}{\partial p^m}\bigg|_{p=0}. \tag{7}$$

级数(6)的收敛取决于辅助参数 h. 如果它在 $p=1$ 处收敛,就有

$$u(x,t)\ =\ u_0(x,t)\ +\ \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t). \tag{8}$$

必是原非线性方程的一个解. 详细的证明参见廖世俊的著作[16].

定义矢量

$$\boldsymbol{u}_n\ =\ \{u_0(x,\ t), u_1(x,\ t),\cdots,u_n(x,\ t)\}.$$

对零阶形变方程(4)关于嵌入变量 p 求 m 阶导数,然后令 $p=0$,再除以 $m!$,即可得到如下 m 阶变形方程

$$\begin{aligned}&L\left[u_m(x,\ t)-\chi_m u_{m-1}(x,\ t)\right]\\ &=hR_m(\boldsymbol{u}_m-1),\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$R_m(\boldsymbol{u}_m-1)\ =\ \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N[\phi(x,\ t;\ p)]}{\partial p^{m-1}}\bigg|_{p=0},$$

$$\chi_m\ =\ \begin{cases}1, m\geqslant 1,\\ 0,\ m<1.\end{cases} \tag{10}$$

应当指出的是当 $m\geqslant 1$ 时,$u_m(x,\ t)$ 可以由计算软件 Maple 容易解出的线性的 m 阶形变方程(9)决定.

3. Sinh-Gordon 方程的近似解

为了得到 Sinh-Gordon 方程的近似解,我们选取线性算子 L 的形式为:

$$L[\phi(x,\ t;\ p)]\ =\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\phi(x,\ t;\ p),$$

线性算子具有如下性质:

$$L[f(x)+g(t)]=0. \tag{11}$$

进一步地,我们定义非线性算子为

$$\begin{aligned}N[\phi(x,\ t;\ p)]\ =&\frac{\partial^2\phi(x,\ t;\ p)}{\partial x\partial t}\\ &+\sinh[\phi(x,\ t;\ p)].\end{aligned} \tag{12}$$

利用在上一节给出的定义,构造零阶形变方程

$$\begin{aligned}&(1-p)L[\phi(x,\ t;\ p)-u_0(x,\ t)]\\ &=phN[\varphi(x,\ t;\ p)],\end{aligned} \tag{13}$$

其初始条件为

$$\phi(x,0;p)\ =\ \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\tanh^4 x-1}{\tanh^2 x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,0;p)\ =\ \frac{2(\tanh^2 x-1)}{\tanh x}. \tag{14}$$

$m\geqslant 1$ 时的 m 阶形变方程为

$$\begin{aligned}&L[u_m(x,\ t)-\chi_m u_{m-1}(x,\ t)]\\ &=hR_m(\boldsymbol{u}_{m-1}),\end{aligned} \tag{15}$$

其初始条件为

$$u_m(x,\ 0)\ =\ 0,\frac{\partial u_m(x,0)}{\partial x}\ =\ 0, \tag{16}$$

而

$$R_1(\boldsymbol{u}_0)\ =\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_0(x,\ t), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}R_2(\boldsymbol{u}_1)\ =&-(1+h)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_0(x,\ t)\\ &-\frac{1}{2}h(\mathrm{e}^{u_0(x,t)}\\ &-\mathrm{e}^{-u_0(x,t)})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_1(x,t),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}R_3(\boldsymbol{u}_2)\ =&-\frac{1}{2}h(\mathrm{e}^{u_0(x,t)}+\mathrm{e}^{u_0(x,t)})u_1(x,\ t)\\ &-(1+h)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_1(x,t)\\ &+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_2(x,t),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}R_4(\boldsymbol{u}_3)\ =&-\frac{1}{2}h(\mathrm{e}^{u_0(x,t)}+\mathrm{e}^{-u_0(x,t)})u_2(x,\ t)\\ &-(1+h)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_2(x,\ t)\\ &+\frac{1}{4}h(\mathrm{e}-u_0(x,t)\\ &-\mathrm{e}^{u_0(x,t)})u_1^2(x,\ t)\\ &+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_2(x,\ t),\end{aligned} \tag{20}$$

根据初值条件(2)和方程(17),我们可以取初始假设

$$u_0(x,\ t)\ =\ \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\tanh^4 x-1}{\tanh^2 x}\right). \tag{21}$$

将方程(21)和方程(16)代入方程(15),可以依次得到

$$u_1(x,\ t)\ =\frac{(1-\tanh^2 x)ht}{2\tanh x}, \tag{22}$$

$$u_2(x,\ t)\ =\frac{(\tanh^4 x-1)h^2t^2}{16\tanh^2 x}$$

$$-\frac{(\tanh^2 x-1)h(h+1)}{2\tanh x}t, \qquad (23)$$

$$u_3(x,t)=-\frac{(\tanh^6 x-\tanh^4 x+\tanh^2 x-1)}{96\tanh^3 x}h^3t^3$$
$$+\frac{(\tanh^4 x-1)}{8\tanh^2 x}h^2(h+1)t^2$$
$$-\frac{(\tanh^2 x-1)h(h+1)^2}{2\tanh x}t, \qquad (24)$$

最终,可以得到 $u(x,t)$ 的 m 阶近似

$$u=u_0(x,t)+\sum_{k=1}^{m}u_k. \qquad (25)$$

可以注意到:在解级数(25)中,有一个辅助参数 h,通过调整 h 的值,可以控制解级数的收敛域. 所以研究近似解(25)的 h 曲线就显得非常重要.

辅助参数 h 对解级数收敛性的影响, 我们利用图 1—3 来描述. 这些图都是在 20 阶近似解中取不同的 x 和 t 所得到的 h 曲线. 图 1 是 $u(1.0, 0.2)$, $u(1.0, 0.5)$ 和 $u(1.0, 0.8)$ 的 h 曲线. 从图中,很容易可以看出,当时间 t 从 0.2 增长到 0.8 时,h 的可行域变小,但始终在 -1 的附近. 我们同样可以从图 2 和图 3 中发现:随着时间 t 的增长,h 的可行域在变小,但分别在 -0.3 和 $0(h\neq 0)$ 附近. 所以,为了得到当 x, t 在某些值附近时,方程的收敛解级数,我们可以根据 h 曲线取不同的 h 值. 比如,当 $x=1.0$,$t=0.2$(或 0.5, 0.8)时,取 $h=-1$; 当 $x=7.0$,$t=0.2$(或 0.5, 0.8)时,取 $h=-0.3$; 当 $x=12.0$,$t=0.2$(或 0.5, 0.8)时,取 $h=-0.001$.

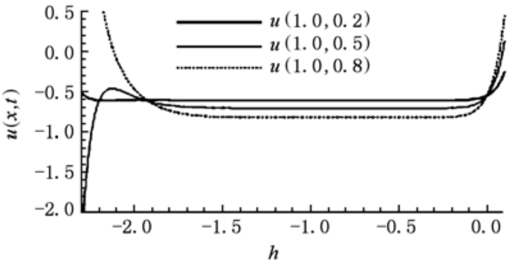

图 1 20 阶近似解 $u_a(1.0,0.2)$, $u_a(1.0,0.5)$ 和 $u_a(1.0,0.8)$ 的 h 曲线

为了说明所得结果的有效性,我们用 $|u_e(x,t)-u_a(x,t)|$ 表示精确解和同伦近似解之间的差值的绝对值,其中 $u_e(x,t)$ 和 $u_a(x,t)$ 分别表示 sinh-Gordon 方程(1)的精确解和 20 阶近似解(比较的结果列在表 1 中). 从表中,我们可以看出,对于确定的 x, t 和可行域里的 h,同伦近似解和精确解非常接近.

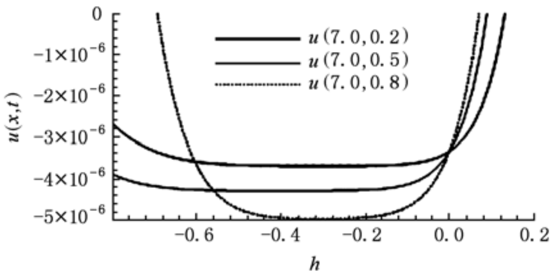

图 2 20 阶近似解 $u_a(7.0,0.2)$, $u_a(7.0,0.5)$ 和 $u_a(7.0,0.8)$ 的 h 曲线

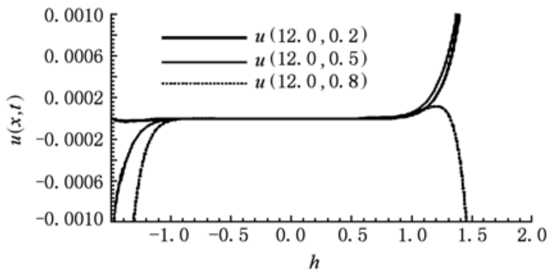

图 3 20 阶近似解 $u_a(12.0,0.2)$, $u_a(12.0,0.5)$ 和 $u_a(12.0,0.8)$ 的 h 曲线

表 1 20 阶同伦近似解和精确解的绝对误差

$u(x,t)$	h	$\lvert u_e(x,t)-u_a(x,t)\rvert$
$u(1.0,0.2)$	-1	0.280×10^{-9}
$u(1.0,0.5)$	-1	0.720×10^{-9}
$u(1.0,0.8)$	-1	0.690×10^{-9}
$u(7.0,0.2)$	-0.3	0.272×10^{-8}
$u(7.0,0.5)$	-0.3	0.534×10^{-8}
$u(7.0,0.8)$	-0.3	0.518×10^{-8}
$u(12.0,0.2)$	-0.001	0.272×10^{-15}
$u(12.0,0.5)$	-0.001	0.123×10^{-14}
$u(12.0,0.8)$	-0.001	0.314×10^{-14}

4. 结 论

这篇文章中,我们运用同伦分析方法得到了 sinh-Gordon 方程的包含辅助参数 h 的近似解. 为了控制解的收敛范围,可以为辅助参数 h 选择合适的值. 通过对精确解和 20 阶近似解得绝对误差的比较,可以发现我们得到的近似解与精确解非常接近. 这充分证明了同伦分析方法在求解非线性偏微分方程中的有效性.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (New York: Cambridge Univ. Press)

[2] Li Y S 1999 *Soliton and integrable system* (Shanghai: Shanghai Sci. Edu. Press) (in Chinese)

[3] Weiss J, Tabor M, Carnevale G 1983 *J. Math. Phys.* **24** 522

[4] Malfliet W 1992 *Am. J. Phys.* **60** 650

[5] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comput. Phys. Commun.* **98** 288

[6] Lai S Y, Guo Y X, Qing Y, Wu Y H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 405

[7] Fan E G 2002 *Phys. Lett.* A **294** 26

[8] Yan Z Y 2001 *Phys. Lett.* A **292** 100

[9] Li B 2007 *Int. J. Mod. Phys.* C **18** 1187

[10] Zhang S Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1335 (in Chinese) [张善卿 2008 物理学报 **57** 1335]

[11] Li W, Liu S B, Yang W 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030307

[12] Gu Y Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030402

[13] Yao R X, Jiao X Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1821

[14] Jiao X Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3611

[15] Li J H, Lou S Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 747

[16] Wang J, Li B 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2109

[17] Zhang H P, Chen Y, Li B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7393 (in Chinese) [张焕萍、陈　勇、李　彪 2009 物理学报 **58** 7393]

[18] Wang Y F, Lou S Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 091128

[19] Hu X R, Chen Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 091982

[20] Dong Z Z, Lang Y H, Chen Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 091846

[21] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 046601
Tang X Y, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **3** 335

[22] Zhang L, Zhang L F, Wu H Y, Li G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 44 (in Chinese) [张　亮、张立凤、吴海燕、李　刚 2010 物理学报 **59** 44]

[23] Huang J J, Alatancang, Wang H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3616
Hou G L, Alatancang 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2753

[24] He G, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 18 (in Chinese) [何光、梅凤翔 2008 物理学报 **57** 18]

[25] Liao S J 2003 *Chapman and Hall*/CRC Press, Boca Raton

[26] Hayat T Khan M, Asghar S 2004 *Acta. Mech.* **168** 213

[27] Liao S J 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **14** 983
Liao S J 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **15** 2003

[28] Niu Z, Wang C 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **15** 2026

[29] Wu W, Liao S J 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **26** 177

[30] Wu Y Y, Wang C, Liao S J 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 1733

[31] Abbasbandy S, Magyari E, Shivanian E 2009 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat* **14** 3530

[32] Wang J, Li B, Ye WC 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030401

[33] Liu X Z 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100019

[34] Corrigan E E, Delius G W 1999 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **32** 8601

[35] Tang Y N, Xu W, Shen J W 2008 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat* **13** 1048

[36] Papa E, Tsvelik A M 1999 *Phys. Rev.* B **60** 12752

[37] Wazwaz A M 2005 *Appl. Math. Comput.* **167** 1196

Approximate solution to Sinh-Gordon equation via the homotopy analysis method*

Ye Wang-Chuan Li Biao† Wang Jia

(*Department of Mathematics*, *Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*)

(Received 28 April 2010; revised manuscript received 26 May 2010)

Abstract

In this paper, approximate solution of the Sinh-Gordon equation is obtained via the homotopy analysis method. The obtained solution contains an auxiliary parameter which provides a convenient way to control the convergence region and rate of the series solutions.

Keywords: homotopy analysis method, Sinh-Gordon equation, approximate solutions

PACS: 02.60.Cb, 02.70.Wz

* Project supported by the Zhejiang Provincial Natural Science Foundations of China (Grant No. Y6090592), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10735030), the Ningbo Natural Science Foundation (Grant No. 2009B21003) and K. C. Wong Magna Fund in Ningbo University.

† Corresponding author. E-mail: biaolee2000@yahoo.com.cn