

针对 X - Z 型 Pauli 信道的量子稀疏图码的反馈式和积译码算法*

王云江^{1)†} 白宝明¹⁾ 彭进业²⁾ 王新梅¹⁾

1) (西安电子科技大学综合业务网理论与关键技术国家重点实验室, 西安 710071)

2) (西北工业大学电子信息学院, 西安 710072)

(2010年3月7日收到; 2010年6月12日收到修改稿)

本文针对 X - Z 型 Pauli 量子信道构建了一个量子稀疏图码的反馈式和积译码算法. 相比较之前的基本和积算法, 该反馈式译码策略利用了错误图样的比较, 稳定子中相关元素的值, 特别的还根据信道的特征充分考虑了各变量所占错误的比重, 并由此来调整信息节点的概率分布. 该反馈式策略起到了经典译码中的软判决技术的作用, 不但克服了对称简并问题带来的不利影响, 更重要的是还给译码器提供了更多的有效信息, 从而大大提高了译码器的纠错译码能力. 另外, 反馈式译码和积译码算法是基于 $GF(4)$ 的, 大大拓展了和积译码器关于量子译码的应用范围. 最后值得指出是, 该算法并没有增加量子测量的复杂度, 而是对测量中所能获得的信息的更充分利用.

关键词: 量子稀疏图码, 和积算法, 量子纠错码, 量子信息

PACS: 03.67.Pp, 03.67.Hk

1. 引言

无论是量子通信^[1-5] 还是经典通信, 都不可避免的要受到噪声的影响. 所幸的是我们可以通过对信息的编码来克服噪声的影响, 从而实现可靠的通信. 编码的基本思想是通过增加冗余来实现对信息的保护, 比如最简单的重复码, 就是把信息进行多份拷贝然后再传送. 然而在实际应用中, 这种简单的编码方式并不实用和有效. 由于稀疏图码^[6] 在和积译码算法下可以接近信道容量, 因此成为近十多年来经典编码领域的研究热点. 考虑到通过经典码来构造量子码^[7], 一直是量子纠错码的一种主要的构造方式. 因此, 对于基于经典稀疏图码的量子稀疏图码的构造^[8-10] 以及对相应的译码算法^[11,12] 的研究变得非常有意义.

本文针对 X - Z 型 Pauli 量子信道构建了一个量子稀疏图码的反馈式和积译码算法, 我们的算法由

于更加充分的利用了量子通信中可以被利用的有效信息, 克服了对称简并问题带来的影响, 从而大大提高了译码器的译码纠错能力. 第二、三节是本文重点, 其中在第二节中, 我们说明了如何在 $GF(4)$ 下实现量子稀疏图码的和积译码, 并分析了这样做的优势. 第三节分两小节: 第一小节介绍了我们的反馈式迭代译码算法的主要思想和相应的算法设计; 在第二小节中, 我们通过对常见的量子稀疏图码的译码仿真展示了我们的译码算法的优越性, 并在本节末尾做了相应的讨论和评价. 最后一节是对全文的总结.

2. 基于 $GF(4)$ 的量子稀疏图码的基本和积译码算法

目前所有的量子稀疏图码都是量子稳定子码, 它们由相应的稳定子来定义^[13], 这里稳定子的作用和经典码的校验矩阵是一样的. 比如, 考虑把 k 比特信息编码到 n 个量子比特中, 即量子码为 $[[n, k]]$,

* 国家重点基础研究发展计划(973计划)(批准号: 2010CB328300), 国家预研项目(纠缠量子编码调制技术), 国家自然科学基金委员会-广东省联合基金(批准号: U0635003), 111 基地项目(批准号: B08038)、国家留学基金委员会国家公派专项研究生奖学金项目(批准号: [2008] 3019)资助的课题.

† E-mail: yunjiang.w@gmail.com

那么 $[[n, k]]$ 将由一个含 $m = n - k$ 个相互独立的生成子的稳定子来确定. 在和积译码算法中, 这 m 个生成子就可以作为校验节点^[14]. 为了表示方便, 我们使用 $S = \{S_1, \dots, S_m\} \subset G_n$ 来表示稳定子, 这里 G_n 是 n 个单比特 Pauli 算子的张量积, 并假设信道模型为 Pauli 无记忆信道, 即 $E \subset G_n$, E 表示发生在整个量子码上的错误, 其中发生在每个量子比特上的错误彼此相互独立. 由于稳定子码被定义为 S 的 $+1$ 本征空间^[13], 如果我们令 $s_c = 1$ 指 $[S_c, E] = 0$, $s_c = -1$ 指 $\{S_c, E\} = 0$, 那么稳定子的测量结果 $s = \{s_1, \dots, s_m\} \in \{-1, 1\}$ 就构成码的码的错误图样. 量子译码的关键就是根据 s 找出实际发生的错误 E .

此前应用于量子稀疏图码的和积算法都是基于 $GF(2)$ 的, 且主要应用于 Calderbank-Shor-Steane (CSS)^[15,16]类型的量子稀疏图码. 因为 CSS 类型的量子码可以看成两个独立的经典二进制码, 一个码对应于翻转(由 Pauli 算子 X 表示)错误, 一个码对应于相位(由 Pauli 算子 Z 表示)错误. 由于这两个码有着相同的结构, 所以人们一般只考虑对其中的一个码译码, 然后把出错数翻倍来近似真实的错误数^[8]. 由此, 我们可以明显的看到这种译码策略的不足之处: 1) 忽略了翻转错误和相位错误之间的联系^[8]; 2) 如果量子码是由经典四进制码构造得来, 那么这种基于 $GF(2)$ 的译码策略就不再适用了; 3) 如果码是非 CSS 形式的, 那么就不能采用这种分开译码的策略. 据此, 在本节我们提出基于 $GF(4)$ 的和积译码策略. 我们的算法可以完全克服上面提到的问题, 从而大大拓展了和积算法在量子译码中的适用范围.

在介绍算法之前, 先明确几个相关名称的定义. 第 q 个量子比特发生 $E_q \in \{I, X, Z, Y\}$ 的错误概率由 $p_q(E_q)$ 表示; 第 q 个量子比特的邻居校验节点由 $n(q)$ 表示; 校验节点 $S_c (c \in \{1, \dots, m\}, \text{下同})$ 的邻居比特节点由 $n(c)$ 表示. 另外我们用 $S_c \cdot E_c = 1$ 表示 $[S_c, E_c] = 0, S_c \cdot E_c = -1$ 表示 $\{S_c, E_c\} = 0$, 这里 E_c 指发生在 $n(c)$ 上的错误. 这样量子码的和积译码算法的表达式可以表示为^[11]

$$m_{c \rightarrow q}(E_q) \propto \sum_{E_{q'}} (\delta_{S_c \cdot S_c \cdot E_c} \prod_{q'} m_{q' \rightarrow c}(E_{q'})), \quad (1)$$

$$q' \in n(c) \setminus q,$$

$$m_{q \rightarrow c}(E_q) \propto p_q(E_q) \prod_{c'} m_{c' \rightarrow q}(E_q), \quad (2)$$

$$c' \in n(q) \setminus c.$$

这里 $m_{c \rightarrow q}(E_q)$ 和 $m_{q \rightarrow c}(E_q)$ 分别表示从校验节

点传往相邻的比特节点的信息和从比特节点传往相邻校验节点的信息.

为了实现基于 $GF(4)$ 的和积译码方案, 首先我们需要在 Pauli 群和 $GF(4)$ 之间构筑一个同构关系^[17], 这里不失一般性令 $GF(4) = \{0, 1, \omega, \bar{\omega}\}$, 其中 ω 是本原元素, $\bar{\omega} = \omega^2 = 1 + \omega$. $GF(4)$ 中元素 x 的共轭, 表示为 \bar{x} , 满足 $\bar{\bar{x}} = x^2$. 那么元素之间的对应关系可以表示如下:

$$I \leftrightarrow 0, X \leftrightarrow 1, Z \leftrightarrow \omega, Y \leftrightarrow \bar{\omega} (\omega^2). \quad (3)$$

而 Pauli 群上的乘法可对应于 $GF(4)$ 上的加法. 另外我们定义迹映射 $\text{Tr}: GF(4) \rightarrow GF(2)$, 满足 $\text{Tr}(x) = x + x^2$. 从而有 $\text{Tr}(0) = \text{Tr}(1) = 0$ 和 $\text{Tr}(\omega) = \text{Tr}(\bar{\omega}) = 1$. 那么 Pauli 群内的对易关系就可以转化为 $GF(4)$ 上的迹内积关系. 在 n 量子比特的情况下, 这种对应关系可以表示为

$$P, Q \in P_n \leftrightarrow u, v \in GF(4)^n, \quad (4)$$

$$[P, Q] = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(u \cdot \bar{v}) = 0,$$

$$\{P, Q\} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(u \cdot \bar{v}) = 1.$$

这样我们可以方便地把量子码里面所要考虑的对易准则转化为 $GF(4)$ 上述内积的计算. 比如在量子稀疏图码中, 如果我们通过错误图样得到 $s_c = 1$, 那么这就意味着 S_c 和量子码上发生的错误 E 对易, 即 $[S_c, E] = 0$. 这样在译码过程中我们就可以采用 $\text{Tr}(E \cdot \bar{S}_c) = 0$, 即该校验节点的判断准则为 $E \cdot \bar{S}_c = 0$ 或 $E \cdot \bar{S}_c = 1$, 因为如前所述只有 $\text{Tr}(0) = \text{Tr}(1) = 0$. 现在我们定义 $p_q[x]$ 为 $E_q \cdot \bar{S}_{c_q}$ 等于 x 的概率, 这里 S_{c_q} 是生成子 S_c 上和第 q 个量子比特所相对应的元素, $q \in n(c)$. 然后定义 $p[x]$ 为 $E \cdot \bar{S}_c$ 除了 $E_q \cdot \bar{S}_{c_q}$ 这一项外等于 x 的概率. 由于 $S_{c_q} \in \{X, Z, Y\} \Rightarrow S_{c_q} \in \{1, \omega, \bar{\omega}\}$, 并考虑到 $x \in \{0, 1, \omega, \bar{\omega}\}$, 我们得到

$$p_q[0] = (p[0] + p[1])/2, \quad (5)$$

$$p_q[1] = (p[0] + p[1])/2. \quad (6)$$

同样地, 如果由错误图样我们得到 $s_c = -1$, 那么这就意味着 S_c 和量子码上发生的错误 E 反对易, 即 $\{S_c, E\} = 0$. 这样在译码过程中我们就可以采用 $\text{Tr}(E \cdot \bar{S}_c) = 1$, 即该校验节点的判断准则为 $E \cdot \bar{S}_c = \omega$ 或 $E \cdot \bar{S}_c = \bar{\omega}$, 因为只有 $\text{Tr}(\omega)$ 和 $\text{Tr}(\bar{\omega})$ 才等于1. 据此我们有

$$p_q[\omega] = (p[\omega] + p[\bar{\omega}])/2, \quad (7)$$

$$p_q[\bar{\omega}] = (p[\omega] + p[\bar{\omega}])/2. \quad (8)$$

这样一来, 由方程(5), (6), (7), (8)再结合(1)式, 我们可以计算从校验节点发送到比特节点的信息为

$$m_{c \rightarrow q}(E_q) = p_q[E_q \cdot \bar{S}_{c_q}]. \quad (9)$$

而对于 $m_{q \rightarrow c}(E_q)$ 的计算可将(9)式代入(2)式中, 然后直接通过归一化得到, 由于比较容易, 在此不再赘述. 另外需要指出的是, 当译码器迭代运算的过程中, 译码结果的判断和经典译码过程一样, 由下式决定^[9]:

$$b_q(E_q) = p_q(E_q) \prod_{c \in n(q)} m_{c \rightarrow q}(E_q). \quad (10)$$

这里 $p_q(E_q)$ 是发生在第 q 个量子比特上的错误的初始概率分布, 而对于 $m_{c \rightarrow q}(E_q)$ 我们采用(9)式.

3. X-Z 型 Pauli 信道的量子稀疏图码的反馈式和积译码算法

基本的量子积译码算法虽然能有效的应用于量子稀疏图码的译码, 但是它会带来一个新的问题, 即容易造成对称式简并错误^[11]. 针对这种情况, 2008 年 Poulin 和 Chung 提出了一种随机扰动的反馈策略^[11] (简称 PC08) 作为基本的量子积译码算法的补充来克服对称式简并错误. 然而值得注意的是仍有大量的译码错误并不属于对称式简并错误. 因此, PC08 错过了很多可以被纠正的错误. 换句话说, 基于 PC08 的译码器仍然会产生了大量的可检测错误^[11], 这意味着译码器的译码能力仍有很大的提升空间.

我们这里考虑的信道模型为 Pauli 量子信道, 这是因为量子稳定子码在信道的传输过程中所发生的错误, 总可以由 Pauli 算子的张量积来描述. 常见的 Pauli 信道模型为极化信道, 比特翻转信道, 相位翻转信道等. 其中最重要的一类 Pauli 信道是可以由比特翻转概率(P_X) 和相位翻转概率(P_Z) 这两个独立变量来刻画的量子信道 (称为 X-Z 型 Pauli 信道). 显然比特翻转信道和相位翻转信道都被包含其中. X-Z 型 Pauli 信道模型如下式所示:

$$\rho_q \rightarrow P_I \rho_q + P_X X \rho_q X + P_Z Z \rho_q Z + P_Y Y \rho_q Y, \quad (11)$$

和 P_X, P_Z 所表示的意义类同, P_I 表示没有错误发生的概率, 而 P_Y 表示比特翻转和相位同时发生错误的概率. 容易验证, $P_I = (1 - P_X) \times (1 - P_Z)$, $P_Y = P_X \times P_Z$, 而当 $P_X \gg P_Z$ 时, 信道即退化为比特翻转信道, 当 $P_Z \gg P_X$ 时, 信道退化为相位翻转信道.

3.1. 反馈式算法设计

首先我们应用基本的量子积译码算法来确定发生在码传输过程中的错误 E , 当该译码过程失

败的时候, 也就是说 $s(E_{\text{out}}) \neq s$ 时, 这里 E_{out} 指译码器的输出, $s(E_{\text{out}})$ 指 E_{out} 的错误图样. 我们通过比较 $s(E_{\text{out}})$ 和 s 容易找出是在哪些稳定子的生成子上出现了错误. 然后随机选择这样一个出错的生成子, 比如说是 S_c , 那么只有两种情况发生: 1) $s_c = -1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = 1$; 2) $s_c = 1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = -1$. 在确定这两种情况后, 我们可以随机选择一个和 S_c 相连的量子比特节点, 比如说是第 q 个量子比特, 那么我们就可以根据 S_{c_q} 的值和信道模型来重新设定 $p_q(E_q)$, 并将这一更新的结果反馈到译码器中, 这里 S_{c_q} 指 S_c 上和第 q 个量子比特相对应的元素的值. 由于 X-Z 型信道和其他 Pauli 信道 (比如极化信道) 的不同之处在于它是由两个相互独立的变量来描述的. 因此, 为了充分的利用信道的错误模型, 在反馈式调整算法的设计中, 我们引入各种错误类型的比重以期更加合理的调整相关比特节点上错误的概率分布. 具体算法如下.

首先令 $\Sigma_{1,2,3} = \{X, Z, Y = XZ\}$, 如果 $S_{c_q} = \Sigma_1$, 那么当 $s_c = -1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = 1$ 时, 我们调整 $p_q(E_q)$ 如下:

$$p_q(I) = (1 - P_I) \times (P_I / (P_I + P_{\Sigma_1})), \quad (12)$$

$$p_q(\Sigma_1) = (1 - P_I) \times (P_{\Sigma_1} / (P_I + P_{\Sigma_1})), \quad (13)$$

$$p_q(\Sigma_2) = P_I \times (P_{\Sigma_2} / (P_{\Sigma_2} + P_{\Sigma_3})), \quad (14)$$

$$p_q(\Sigma_3) = P_I \times (P_{\Sigma_3} / (P_{\Sigma_2} + P_{\Sigma_3})). \quad (15)$$

另一方面, 当 $s_c = 1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = -1$ 时, 我们调整 $p_q(E_q)$ 如下:

$$p_q(I) = P_I \times (P_I / (P_I + P_{\Sigma_1})), \quad (16)$$

$$p_q(\Sigma_1) = P_I \times (P_{\Sigma_1} / (P_I + P_{\Sigma_1})), \quad (17)$$

$$p_q(\Sigma_2) = (1 - P_I) \times (P_{\Sigma_2} / (P_{\Sigma_2} + P_{\Sigma_3})), \quad (18)$$

$$p_q(\Sigma_3) = (1 - P_I) \times (P_{\Sigma_3} / (P_{\Sigma_2} + P_{\Sigma_3})). \quad (19)$$

比如, 当 $S_{c_q} = X$, 而 $s_c = -1$ 且 $S_c \cdot E_{\text{out}} = 1$ 时, 则有

$$p_q(I) = (1 - P_I) \times (P_I / (P_I + P_X)), \quad (20)$$

$$p_q(X) = (1 - P_I) \times (P_X / (P_I + P_X)), \quad (21)$$

$$p_q(Z) = P_I \times (P_Z / (P_Z + P_Y)), \quad (22)$$

$$p_q(Y) = P_I \times (P_Y / (P_Z + P_Y)). \quad (23)$$

接下来, 我们把这些调整过后的分布概率, 重新反馈到积译码器中, 利用(1), (2)式并结合(5) — (10)式重新迭代以确定 E . 如果在此过程中译码器得到了一个有效的译码输出, 那么即终止. 否则, 我们判断 $S_c \cdot E_{\text{out}}$ 和 s_c 是否相等. 如果不相等, 那么我们恢复 $p_q(E_q)$, 接着选取和 S_c 相连的其他量子比特 q' , 并像设置 $p_q(E_q)$ 那样设置 $p_{q'}(E_{q'})$, 然后将其反

馈到译码器中重新译码. 而如果相等, 但仍不满足 $s(E_{out}) = s$, 那么选择另外一个满足 $S_{c'} \cdot E_{out} \neq s_{c'}$ 的生成子 $S_{c'}$, 然后如调整 S_c 相连的量子比特节点的 $p_q(E_q)$ 一样, 调整发生在和 $S_{c'}$ 相连的量子比特节点上的错误分布概率.

PC08 的随机扰动策略是先随机选择一个校验失败生成子, 然后找到和其相连的量子比特节点并对这些节点上的概率分布进行随机扰动. 与此不同的是, 我们的反馈式译码策略, 首先对失败的校验子进行分类, 然后针对不同的类别, 采用不同的反馈调整策略. 特别的, 在调整策略的设计中, 我们充分利用了量子信道的模型特征, 生成子相关元素的具体值然后结合对原有校验失败结果的分析, 而得到新的更加合理的概率分布向量, 从而达到提高量子译码器译码能力的目的.

事实上, 当我们考虑的量子信道为无记忆信道时, 发生在每一个量子比特上的错误都可以被视为 Pauli 算子的叠加 (即由翻转错误 X 、相位错误 Z 和翻转-相位错误 $Y = X \times Z$ 的叠加而成)^[17]. 此时, 我们都可以应用我们的反馈式算法的策略来提高和积译码器的译码能力. 所不同的是, 由于量子信道模型的变化, 我们也必须改变调整后的量子比特节点的概率分布, 比如针对量子极化信道 (quantum depolarizing channel), 当我们发现应该调整量子比特节点概率分布以使其和对应生成子上的元素 (假定为 X) 反对易, 那么考虑到量子极化信道模型下相位错误 Z 和翻转-相位错误 Y 有着相同的先验概率分布, 我们就可以让 $p_q(Z)$ 和 $p_q(Y)$ 平均分享一个优势的概率分布 (p_I), 即 $p_q(Z) = p_q(Y) = p_I/2$, 而让翻转错误 X 和无错误操作 I 平均分享剩下的概率, 即 $p_q(X) = p_q(I) = (1 - p_I)/2$. 文献[18]中的仿真结果表明, 对于量子极化信道, 这样的调整策略可以非常明显的提升译码器的译码能力. 同理, 对于其他的 Pauli 信道也可以做类似推广.

整个量子译码的物理实现过程可描述如下. 当接收端的 Bob 收到发送端的 Alice 经由量子噪声信道传送过来的量子码时, 他首先要根据量子码所对应的稳定子设计错误图样的物理检测线路. 比如当稳定子由 XX 和 ZZ 构成时, 其错误图样的物理检测线路可设计如图 1 所示.

在 Bob 获取错误图样 S_1 和 S_2 后, 他将该结果输入译码器中, 译码器将结合稳定子的各个生成子, 相应量子比特的初始概率分布以及 S_1 和 S_2 的

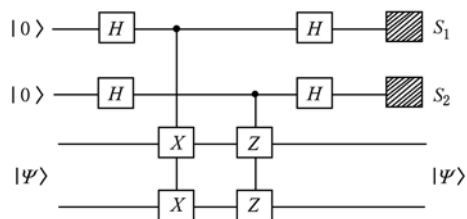


图 1 稳定子由 XX 和 ZZ 构成的量子码的错误图样的物理检测线路 ($|\Psi\rangle$ 表示待检测的量子码, S_1 和 S_2 分别代表两个校验子的错误检测值)

值, 进行译码操作. 如果随后的译码器输出值的错误图样与 S_1 和 S_2 一致, 那么 Bob 将视该结果为成功的译码, 并将其作用在 $|\Psi\rangle$ 上. 根据 Pauli 算子的酉性可知, Bob 的这一操作可以纠正量子码在传送过程中所受到的错误干扰. 假设量子码在传送过程中第一个量子比特上发生了比特翻转错误 (该错误可以表示为 XI), 而译码器的输出值也为 XI , 那么 Bob 只需应用量子翻转门 X 于 的第一个量子比特上, 由于 $XI \times XI |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, 因此, Bob 的这一操作就可以恢复量子码. 如果译码器输出值的错误图样与 S_1 和 S_2 不一致, 比如在第一个校验子上发生了错误, 那么我们就需要应用反馈调整策略, 找到第一个校验子所连接的量子比特, 调整它们的初始概率分布, 然后重新将该调整结果送入译码器进行译码. 如果此时译码器输出了有效的译码结果 (其错误图样与测量获得的错误图样一致), 那么和基本的量子译码一样, Bob 将该结果 (对应于相应的 Pauli 门) 作用于接收到的量子码上以消除噪声的干扰. 由于在此过程中并不需要对量子码进行再次测量操作, 因此从这个意义上讲, 我们的反馈式量子译码器并没有增加量子测量的复杂度, 另外通过比较最后的纠错过程, 也可以看到我们的译码策略并没有增加纠错过程的物理实现的复杂度.

3.2. 仿真及结果讨论

将我们的反馈式量子码和积译码算法应用于各种不同的量子稀疏图码, 包括传统的量子稀疏图码和纠缠辅助的量子稀疏图码, 所有的仿真结果都表明我们的算法大大提高了译码器的译码能力, 从而明显的提升了量子稀疏图码的表现. 在本节中, 我们选用最常用的也是最成功的量子稀疏图码的构造方式来构造一个量子稀疏图码, 然后给出其译码

仿真结果,并对此进行相应的讨论和分析来说明我们算法的优越性.

我们知道,传统的量子稀疏图码可由满足对偶约束 (dual-containing) 条件的经典稀疏图码来构造^[19]. 其中,最成功的构造方式之一是 MaKay 提出的所谓“Construction B”的方法^[8]. 其构造思路如下,首先选择一个行重为 $L/2$ 的 $n/2 \times n/2$ 循环矩阵,然后定义

$$H_0 = [C, C^T]. \quad (24)$$

接着,从 H_0 中删掉 $n - m$ 行,从而得到一个新的矩阵 $m \times n$ 的矩阵 H . 容易验证, H 是满足对偶约束条件的. 最后,根据 CSS 构造方式^[15,16],可以得到我们

需要的量子稀疏图码.

据此,我们首先基于有限几何理论构造一个二进制循环稀疏图码 [63, 37], 行重为 8. 由于 [63, 37] 的校验矩阵是一个 63×63 的循环矩阵,包含 26 个独立的行和 37 个冗余的行. 因此根据上面提到的构造方法,我们就可以构造出一个 [[126, 74]] 量子稀疏图码,码率是 74/126, 行重为 16. 在图 2 (a) 中,我们展示了 [[126, 74]] 码经过 $X-Z$ 型 Pauli 信道时分别在基本的量子译码算法,基于随机策略的量子译码算法 (PC08),以及我们的新型反馈式量子译码算法下的表现.

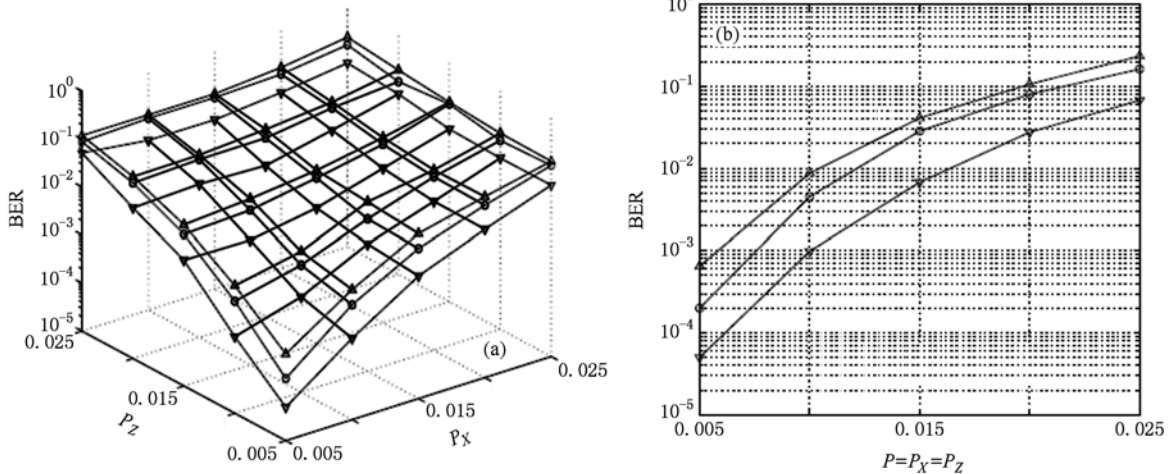


图 2 (a) 针对 [[126, 74]] 量子码文中所述三种译码算法在 $X-Z$ 型 Pauli 信道下的性能表现, Δ, \circ, ∇ , 分别表示基本的量子译码算法 (Basic SPA), 基于 PC08 的量子译码算法 (SPA with PC08) 以及我们的反馈式量子译码算法 (SPA with our feedback strategy), BER 表示量子码的块错误率; (b) 当 $P_x = P_z$ 时, 这三种译码算法的性能表现 (对应于 (a) 中的对角切面)

从图 2 中,可以很明显的看到我们的反馈式量子译码算法大大提高了译码器的译码能力,明显提升了量子稀疏图码的表现. 比如在图 2 (b) 中,当信道的极化强度 $P = P_x = P_z = 0.005$ 时,相比较 PC08,我们的方法有约 4 倍的增益,而相比较于基本的量子译码算法,我们的方法更有约 13 倍的增益. 另外,由于译码错误的类型可以分外两类:可检测错误与不可检测错误. 而可检测错误意味着译码器的译码失败,因此我们可以用可检测错误在总体错误的百分比 (POD) 作为衡量译码器的译码能力的一个重要参数. 事实上,当 $P = P_x = P_z = 0.01$ 时,对于基本的量子译码器而言,当出现 50 次译码错误时,这其中可检测错误多达 49 个, $POD = 98\%$. 而对于 PC08 而言,当出现 50 次译码错误时,

可检测错误为 48 个, $POD = 96\%$. 最后考虑我们的反馈式量子译码算法,当出现 50 次译码错误时,只有 19 个可检测错误,因此我们的 $POD = 38\%$. 可见我们设计的译码器的译码能力大大高于已有的译码器.

4. 结 论

在本文中,我们针对 $X-Z$ 型 Pauli 信道,为量子稀疏图码构建了一种新型的反馈式量子译码策略. 我们的反馈式策略通过利用错误图样的比较,稳定子中相应元素的值以及量子信道的错误模型来调整信息节点的概率分布,从而为译码器提供了更多的有效信息. 同时,我们的算法通过对信息节点概率分布的

调整,克服了基于错误图样的基本和积译码算法所无法克服的对称简并错误.从这个意义上来讲,我们的反馈式策略起到经典通信中的软判决技术所起的作用,从而大大提高了译码器的译码能力,使量子稀疏图码的表现得到了明显的提升.另外,我们的算法通过在量子译码过程引入 GF(4),克服了基于 GF(2)的量子积译码算法的限制.最后值得指出的是,我们的反馈式策略并没有增加量子通信中物理测量的复

杂度,给译码器提供的额外有效信息来自于对可能得到的信息更加充分的分析和利用,并不需要额外的物理操作来实现该算法.对于我们的算法本身而言,由于调整的过程只是选择了生成子中某些非零元素所对应的量子比特进行概率分布调整,考虑到量子稀疏图码的稳定子本身也是稀疏的,因此我们的算法复杂度和 PC08 的随机扰动策略一样,与基本的和积译码算法成线性关系.

-
- [1] Liu W J, Chen H W, Ma T H, Li Z Q, Liu Z H, Hu W B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4105
- [2] Wang X B 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 077902
- [3] Li C Y, Li X H, Deng F G, Zhou H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2352
- [4] Zhou N C, Zeng G H, Gong L H, Liu S Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 9 (in Chinese) [周南润、曾贵华、龚黎秋、刘三秋 2007 物理学报 **56** 9]
- [5] Zhang S, Wang J, Zhang Q, Tang C J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1 (in Chinese) [张盛、王剑、张权、唐朝京 2009 物理学报 **58** 1]
- [6] Gallager R G 1962 *IRE Trans. Inform. Theory* **8** 21
- [7] Li Z, Xing L J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 28 (in Chinese) [李卓、邢莉娟 2008 物理学报 **57** 28]
- [8] MacKay D J C, Mitchison G J, McFadden P L 2004 *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** 2315
- [9] Wang Y J, Bai B M, Zhao W B, Wang X M 2009 *Int. J. Quantum Inf.* **7** 1373
- [10] Li Y, Zeng G H, Moon H L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4154
- [11] Poulin D, Chung Y 2008 *Quantum Inform. Comput.* **8** 987
- [12] Wang Y J, Sanders B C, Bai B M, Wang X M 2009 *Proceedings of the 9th Asian Conference on Quantum Information Science* Nanjing, P. R. China, August 2009 p79
- [13] Gottesman D 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1862
- [14] Camara T, Ollivier H, Tillich J P 2007 *Proceedings of the International Symposium on Information Theory* Nice, France, June 2007 p811
- [15] Steane A M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 793
- [16] Calderbank A R, Shor P W 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1098
- [17] Preskill J 2001 *Lecture Notes for Physics* 219: *Quantum Computation*. Chap 7 p5
- [18] Wang Y J, Sanders B, Bai B M, Wang X M 2009 *arxiv.org/abs/0912.4546*
- [19] Calderbank A R, Rains E M, Shor P W, Sloane N J A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 405

Feedback sum-product decoding of sparse quantum codes for X - Z Pauli channels*

Wang Yun-Jiang^{1)†} Bai Bao-Ming¹⁾ Peng Jin-Ye²⁾ Wang Xin-Mei¹⁾

1) (State Key Lab of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

2) (School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 7 March 2010; revised manuscript received 12 June 2010)

Abstract

In this paper, a feedback sum-product decoding algorithm of sparse quantum codes for X - Z Pauli channels is developed. Compared with the previous decoding algorithm, our feedback strategy exploits not just the syndrome but also the values of the frustrated checks on individual qubits of the code and the character of the channel model with the portion of each error to adjust the probability distribution of information nodes. Due to the smart adjustment, our decoding algorithm, on one hand, can break the symmetric degeneracy, and on the other hand, can feed back more useful information to the SPA decoder to help the decoder determine a valid output, thereby significantly improving the decoding ability of the decoder. Moreover, our algorithm, which is based on $GF(4)$, overcomes the limitation caused by decoding in $GF(2)$. Finally, we want to point out that, our method does not increase the measurement overhead in comparison with the previous methods, as the extra information comes for free from the requisite stabilizer measurement.

Keywords: sparse quantum codes, sum-product algorithm, quantum error-correcting codes, quantum information

PACS: 03.67.Pp, 03.67.Hk

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB328300), the National Pre-Research Foundation of China, the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the Guangdong Province (Grant No. U0635003), 111 Program (Grant No. B08038) and the China Scholarship Council (Grant No. [2008] 3019).

† E-mail: yunjiang.w@gmail.com