

基于自适应主动及滑模控制的分数阶超混沌系统异结构反同步*

刘福才[†] 李俊义 臧秀凤

(燕山大学西校区工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

(2009年12月31日收到; 2010年7月14日收到修改稿)

以超混沌 Chen 系统和超混沌 Lorenz 系统为例, 研究了慢时变参数超混沌系统的反同步问题. 首先利用主动控制的思想, 消去超混沌系统中的非线性部分, 然后基于 Lyapunov 稳定性理论, 合理地选取参数自适应控制律, 很好的解决了时变参数的参数摄动问题, 从而实现了两个超混沌系统的反同步. 在此基础上, 又进一步研究了分数阶超混沌系统, 使用滑模控制方法对其进行控制, 理论上分析了该方法的可行性. 数值模拟实验进一步验证了所提出方法的有效性.

关键词: 超混沌, 分数阶, 自适应, 滑模

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Jn, 05.45.Pq, 05.45.Xt

1. 引言

Pecora 和 Carroll 提出了两个相同结构, 不同初始值的混沌系统的同步问题, 并利用电路实验实现了混沌系统的同步^[1]. 从此国内外学者对混沌的控制研究产生了极大的兴趣. 随着对混沌理论的深入研究, 人们提出了各种有关混沌同步、反同步的方法, 如 backstepping 方法^[2], 状态观测器法^[3], 自适应双模控制法^[4], 滑模变结构控制法^[5], 主动控制法^[6], 线性矩阵不等式法 (LMI)^[7], 鲁棒控制法^[8]等. 目前的研究还主要集中在低维混沌系统的同结构反同步, 而关于具有两个以上正的 Lyapunov 指数的高维超混沌系统^[9-11]的异结构反同步的研究还相对较少. 而且由于不同结构混沌系统之间的同步现象广泛存在, 超混沌系统具有比低维混沌系统更加复杂的动力学特性, 使得实现超混沌的控制、同步(反同步)问题成为一项更具有挑战性的研究工作. 当用于保密通信^[12]中, 超混沌比低维混沌系统具有更加良好的保密性能, 增加了数据传输的复杂性, 提高了数据通讯的保密性. 这使得超混沌的研究成为近几年的热点.

分数阶微积分和整数阶微积分几乎具有同样长的发展历史, 整数阶微积分实际是分数阶微积分的特例, 整数阶混沌系统是对实际混沌系统的理想化处理, 人们发现分数阶混沌系统更能反映系统呈现的工程物理现象, 从而促进了分数阶混沌系统的研究和发展^[13-15]. 当前分数阶超混沌异结构反同步研究还相对较少^[16].

本文首先基于自适应与主动控制相结合的方法, 运用 Lyapunov 稳定性理论, 辨识出了系统全部未知参数, 实现了高维超混沌系统的反同步. 又进一步利用滑模控制方法^[17], 对分数阶超混沌系统^[18]进行控制, 实现其异结构反同步, 数值仿真验证了上述两种方法的有效性.

2. 自适应主动控制法

2.1. 问题描述和系统模型

考虑超混沌系统, 设驱动系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

考虑响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2)$$

* 河北省自然科学基金(批准号:F2010001320)资助的课题.

[†] E-mail: lfc_xb@263.net

其中, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^4, \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^4$ 分别为驱动系统和响应系统状态变量向量, \mathbf{F}, \mathbf{G} 为 $\mathbf{R}^{4 \times 4} \rightarrow \mathbf{R}^4$ 连续可微函数, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为系统控制输入.

定义 设反同步误差为 $\mathbf{e} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, 若满足如下条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)\| = \mathbf{0}, \quad (3)$$

则称超混沌系统(1), (2)实现反同步.

超混沌 Chen 系统方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= dx_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 &= x_2x_3 + rx_4, \end{aligned} \quad (4)$$

当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, 0.085 \leq r \leq 0.798$ 时, 该系统状态呈现超混沌现象.

受控超混沌 Lorenz 系统方程

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -a_1(y_1 - y_2) + y_4 + u_1(t), \\ \dot{y}_2 &= -y_1y_3 + r_1y_1 - y_2 + u_2(t), \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - b_1y_3 + u_3(t), \\ \dot{y}_4 &= -y_1y_3 + d_1y_4 + u_4(t). \end{aligned} \quad (5)$$

当 $a_1 = 10, b_1 = 8/3, d_1 = 1.3, r_1 = 28$ 时, 该系统为超混沌. $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 为控制器.

2.2. 控制器的设计

根据(3)式的定义, 将(4), (5)两式相加, 得误差系统方程

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4 + a_1(y_2 - y_1) \\ &\quad + y_4 + u_1(t), \\ \dot{e}_2 &= dx_1 - x_1x_3 + cx_2 + r_1y_1 - y_2 \\ &\quad - y_1y_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 &= x_1x_2 - bx_3 + y_1y_2 - b_1y_3 + u_3(t), \\ \dot{e}_4 &= x_2x_3 + rx_4 - y_1y_3 + d_1y_4 + u_4(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $e_1 = x_1 + y_1, e_2 = x_2 + y_2, e_3 = x_3 + y_3, e_4 = x_4 + y_4$, 基于自适应主动控制的思想, 我们选择合适的控制器 $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 以及系统参数自适应控制律, 即可使得系统(4)和(5)实现渐近反同步, 即使得系统(6)渐进稳定, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$.

将系统的误差方程描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) + a_1(y_2 - y_1) \\ dx_1 + cx_2 + r_1y_1 \\ -bx_3 - b_1y_3 \\ rx_4 + d_1y_4 \end{pmatrix} \text{为系}$$

$$\text{统带参数部分, } \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_4 + y_4 \\ -y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{为系统无参线}$$

$$\text{性部分, } \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 - y_1y_3 \\ x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_2x_3 - y_1y_3 \end{pmatrix} \text{为系统非线}$$

性部分.

基于主动控制的思想, 我们选取控制器为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{M}\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, δ 为相应的参数符号加权, $\delta = -\text{sgn}(\boldsymbol{\Theta}), \hat{\boldsymbol{\Theta}}$ 为参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 的估值, $\mathbf{M} = [-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4]^T$, $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为任意正常数.

2.3. 系统稳定性分析

对于初始时刻任意状态 $\mathbf{x}(\mathbf{0}), \mathbf{y}(\mathbf{0})$, 依照(8)式, 控制器 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 选为(9)式, 自适应参数控制律选为(10)式, 则可使得响应系统(5)式反同步于驱动系统(4)式, 即误差系统(6)式渐进稳定.

控制输入选择如下:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -[\hat{a}(x_2 - x_1) + \hat{a}_1(y_2 - y_1)] \\ &\quad - e_4 - \lambda_1 e_1, \\ u_2(t) &= -(\hat{d}x_1 + \hat{r}_1y_1 + \hat{c}x_2) + y_2 \\ &\quad + x_1x_3 + y_1y_3 - \lambda_2 e_2, \\ u_3(t) &= \hat{b}x_3 + \hat{b}_1y_3 - x_1x_2 - y_1y_2 - \lambda_3 e_3, \\ u_4(t) &= -(\hat{r}x_4 + \hat{d}_1y_4) - x_2x_3 \\ &\quad + y_1y_3 - \lambda_4 e_4. \end{aligned} \quad (9)$$

各参数自适应控制律选择如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} &= (\dot{\hat{a}}, \dot{\hat{b}}, \dot{\hat{c}}, \dot{\hat{d}}, \dot{\hat{a}}_1, \dot{\hat{b}}_1, \dot{\hat{d}}_1, \dot{\hat{r}}_1)^T \\ &= (e_1(x_2 - x_1), -e_3x_3, e_2x_2, \\ &\quad e_2x_1, e_4x_4, e_1(y_2 - y_1), \\ &\quad -e_3y_3, e_4y_4, e_2y_1). \end{aligned} \quad (10)$$

将(9), (10)两式代入(6)式, 误差动力学系统可改写为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \tilde{a}(x_2 - x_1) + \tilde{a}_1(y_2 - y_1) - \lambda_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -(\tilde{d}x_1 + \tilde{c}x_2 + \tilde{r}_1 y_1) - \lambda_2 e_2, \\ \dot{e}_3 &= \tilde{b}x_3 - \tilde{b}_1 y_3 - \lambda_3 e_3, \\ \dot{e}_4 &= -(\tilde{r}x_4 + \tilde{d}_1 y_4) - \lambda_4 e_4. \end{aligned} \quad (11)$$

上式中, $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为任意正常数, $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta$ 为系统参数误差.

选取正定标量 Lyapunov 函数为

$$V(e, \tilde{\Theta}) = \tilde{\Theta}^T \hat{\Theta} + e^T e, \quad (12)$$

则其沿(11)式的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\Theta}) &= 2(\tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} + e^T \dot{e}) \\ &= 2(\tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} + \tilde{r} \dot{\tilde{r}} \\ &\quad + \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{d}_1 \dot{\tilde{d}}_1 + \tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 \\ &\quad + e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 + e_4 e_4) \\ &= 2(\tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} + \tilde{r} \dot{\tilde{r}} \\ &\quad + \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{d}_1 \dot{\tilde{d}}_1 + \tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 \\ &\quad + e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 + e_4 e_4) \\ &= 2\{ \tilde{a}[e_1(x_2 - x_1)] + \tilde{b}(-e_3 x_3) \\ &\quad + \tilde{c}(e_2 x_2) + \tilde{d}(e_2 x_1) + \tilde{r}(e_4 x_4) \\ &\quad + \tilde{a}_1[e_1(y_2 - y_1)] + \tilde{b}_1(-e_3 y_3) \\ &\quad + \tilde{d}_1(e_4 y_4) + \tilde{r}(e_2 y_1) \\ &\quad + e_1[\tilde{a}(x_2 - x_1) \\ &\quad + \tilde{a}_1(y_2 - y_1) - \lambda_1 e_1] \\ &\quad + e_2[-(\tilde{d}x_1 + \tilde{c}x_2 + \tilde{r}_1 y_1) - \lambda_2 e_2] \\ &\quad + e_3(\tilde{b}x_3 - \tilde{b}_1 y_3 - \lambda_3 e_3) \\ &\quad + e_4[(\tilde{r}x_4 + \tilde{d}_1 y_4) - \lambda_4 e_4] \} \\ &= -\lambda_1 e_1^2 - \lambda_2 e_2^2 - \lambda_3 e_3^2 - \lambda_4 e_4^2 \\ &= e^T M e. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中 $M = [-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4]^T$, 考虑 M 负定, 即 $\dot{V}(e, \tilde{\Theta}) = 2(\tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} + e^T \dot{e}) \leq 0 \leq V(e, \tilde{\Theta})$, 得误差系统(11)式渐近稳定, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 即系统(4)和(5)实现反同步, 通过调整 λ 的大小, 还可改善误差趋于零的速度以及参数稳定的效果.

3. 滑模控制实现分数阶超混沌系统反同步

3.1. 分数阶微分超混沌系统理论分析

分数阶微积分理论几乎与整数阶微积分理论具有同样长的发展历史, 近年来引起人们的广泛兴趣和深入研究. 而且, 由分数阶描述的系统与实际系统模型更为接近. 在分数阶微积分的研究过程中, 对分数阶导数有多种定义, 其中在实际应用中以 Caputo 定义较为常见. 因此, 本文以 Caputo 定义为例, 来研究分数阶超混沌系统动力学行为, Caputo 微分定义为

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (14)$$

式中, $m - 1 < \alpha < m$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (15)$$

分数阶线性系统稳定性的充要条件为, 对于如下自治系统:

$$D^\alpha x = Ax, \quad (16)$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, A 为 $n \times n$ 阶常数矩阵, 若满足条件 $|\arg(\text{eig}(A))| > \alpha\pi/2$, 则系统(16)稳定, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$. 对于超混沌系统 $\dot{x} = f(x)$, 其对应分数阶系统 $D^\alpha x = f(x)$ 仍保持混沌的必要条件是平衡点的稳定性保持不变, 即不稳定平衡点所对应线性化雅克比矩阵的特征值满足

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) &> \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)} \\ \Rightarrow \alpha &> \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

3.2. 滑模控制器设计

给定分数阶超混沌驱动系统为

$$D^\alpha x = A_1 x + f(x), \quad (18)$$

其中 α 为分数阶数, $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in R^4$ 为系统状态变量, $A_1 \in R^{4 \times 4}$ 为系统线性部分, $f: R^4 \rightarrow R^4$ 为系统非线性部分.

同样, 给定分数阶超混沌响应系统为

$$D^\alpha y = A_2 y + g(y) + u, \quad (19)$$

$0 < \alpha < 1$, $y(t) \in R^4$ 为系统状态变量, $A_2 \in R^{4 \times 4}$ 为系统线性部分, $g: R^4 \rightarrow R^4$ 为系统非线性部分, u 为控

制器. 我们的目的就是设计控制器 u , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x + y\| = 0$. 可得误差系统为

$$\begin{aligned} D^\alpha e &= A_1 x + f(x) + A_2 y + g(y) + u \\ &= A_2 e + G(x, y) + u(t), \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $e = x + y, G(x, y) = g(y) + f(x) + (A_1 - A_2)x$. 设计控制器 $u \in R^4$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0. \quad (21)$$

基于主动控制设计思想, 可以设计控制器如下:

$$u(t) = H(t) - G(x, y), \quad (22)$$

则误差系统(20)式重新改写为

$$D^\alpha e = A_2 e + H(t). \quad (23)$$

基于滑模控制方法, 设计 $H(t)$ 为

$$H(t) = Kw(t), \quad (24)$$

其中 $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T$ 是常向量, $w(t) \in R$ 是控制输入, 满足下面条件:

$$w(t) = \begin{cases} w^+(t), & s(e) \geq 0, \\ w^-(t), & s(e) < 0, \end{cases} \quad (25)$$

上式中 $s = s(e)$ 为滑模面, 因此误差系统可以记为

$$D^\alpha e = A_2 e + Kw(t). \quad (26)$$

设计滑模面为

$$s(e) = Ce, \quad (27)$$

其中 $C = [c_1, c_2, c_3, c_4]$ 是常向量. 当系统发生滑模运动时, 需要满足下面两个条件:

$$s(e) = 0, \quad (28)$$

$$\dot{s}(e) = 0. \quad (29)$$

联立(26)——(29)式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}(e) &= \frac{\partial s(e)}{\partial e} \dot{e} = \frac{\partial s(e)}{\partial e} D^{1-\alpha} (D^\alpha e) \\ &= CD^{1-\alpha} (A_2 e + Kw(t)) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

求解上式, 可得等效控制 $w_{eq}(t)$ 为

$$w_{eq}(t) = - (CK)^{-1} CA_2 e(t), \quad (31)$$

式中 (CK) 是非奇异矩阵. 把(31)式代入(26)式中求得

$$D^\alpha e = [I - K(CK)^{-1}C]A_2 e. \quad (32)$$

选取到达律为指数趋近律,

$$D^\alpha s = -p \operatorname{sgn}(s) - rs, \quad (33)$$

式中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是符号函数, 系数 $p > 0, r > 0$, 由(26)和(27)式得

$$D^\alpha s = CD^\alpha e = C(A_2 e + Kw(t)). \quad (34)$$

由(33), (34)式得等效控制输入为

$$w(t) = - (CK)^{-1} [C(rI + A_2)e + p \operatorname{sgn}(s)]. \quad (35)$$

由(22)和(24)式可得

$$\begin{aligned} u(t) &= -K(CK)^{-1} [C(rI + A_2)e \\ &\quad + p \operatorname{sgn}(s)] - G(x, y). \end{aligned} \quad (36)$$

3.3. 稳定性分析

对于误差系统(26), 需从两方面验证其稳定性. 首先需考虑其是否满足其到达滑模面条件, 设 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2}s^2, \quad (37)$$

对上式求导得

$$\dot{V} = \dot{s}s = -p \operatorname{sgn}(s) - rs^2. \quad (38)$$

因为 $s \operatorname{sgn}(s) > 0, r > 0, p > 0$, 得到 $\dot{V} = \dot{s}s < 0$, 所以 $\dot{V}(e) = 0$ 是负定的. 故误差系统(26) 满足滑模到达条件.

进一步考察, 当误差系统(26) 到达滑模面时, 其滑动模态是否稳定. 将(35)式代入(13)式, 得

$$\begin{aligned} D^\alpha e &= [A_2 - K(CK)^{-1}C(rI + A_2)]e \\ &\quad - K(CK)^{-1}p \operatorname{sgn}(s). \end{aligned} \quad (39)$$

将 $-K(CK)^{-1}p \operatorname{sgn}(s)$ 看作是线性误差系统的输入, 如果

$$\begin{aligned} &|\arg(\operatorname{eig}([A_2 - K(CK)^{-1}C(rI + A_2)]))| \\ &> \alpha\pi/2, \end{aligned} \quad (40)$$

则误差系统渐进稳定. 可以看出 $A_2 - K(CK)^{-1}C(rI + A_2)$ 有一个特征值是 $-r$, 其他三个特征值与 r 无关, 只与 K 和 C 有关. 选择合适的 K 和 C , 可以使误差系统的特征值满足条件(40), 保证误差系统稳定.

同样以超混沌 Chen 系统和超混沌 Lorenz 系统为例, 考虑其分数阶模型.

分数阶超混沌 Chen 系统(驱动系统)

$$\begin{aligned} d^\alpha x_1/dt^\alpha &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ d^\alpha x_2/dt^\alpha &= dx_1 - x_1 x_3 + cx_2, \\ d^\alpha x_3/dt^\alpha &= x_1 x_2 - bx_3, \\ d^\alpha x_4/dt^\alpha &= x_2 x_3 + rx_4, \end{aligned} \quad (41)$$

式中, α 为分数阶阶数, 且 $0 < \alpha \leq 1$. 当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, 0.085 \leq r \leq 0.798$ (r 取 0.5) 时, 系统处于混沌状态, 通过 MATLAB 仿真计算得知系统具有 5 个不稳定的平衡点, $S_0 = (0, 0, 0, 0), S_1 = (-82.0531 - 284.8306i, -6.6181 - 1.2245i, -4.2737 + 6.9135i, 12.2500 - 13.5069i), S_2 = (-82.0531 + 284.8306i, -6.6181 + 1.2245i, -4.2737 - 6.9135i, 12.2500 + 13.5069i), S_3 = (82.0531 - 284.8306i, 6.6181 - 1.2245i, 4.2737 +$

$6.9135i, 12.2500 + 13.5069i), S_4 = (82.0531 + 284.8306i, 6.6181 + 1.2245i, 4.2737 - 6.9135i, 12.2500 - 13.5069i).$

系统(41)在平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 1 \\ 7 & 12 & -x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 & -3 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

平衡点相应特征值为 S_0 处, $\lambda_1 = -39.7356, \lambda_2 = 16.7356, \lambda_3 = -3.0000, \lambda_4 = 0.5000$; 在 S_1 处, $\lambda_1 = 289.93 - 82.25i, \lambda_2 = -280.64 + 81.49i, \lambda_3 = -35.29 + 0.77i, \lambda_4 = 0.50 - 0.01i$; 在 S_2 处, $\lambda_1 = 289.93 + 82.25i, \lambda_2 = -280.64 - 81.49i, \lambda_3 = -35.29 - 0.77i, \lambda_4 = 0.50 + 0.01i$; 在 S_3 处, $\lambda_1 = 289.93 + 82.25i, \lambda_2 = -280.64 - 81.49i, \lambda_3 = -35.29 - 0.77i, \lambda_4 = 0.50$; 在 S_4 处, $\lambda_1 = 289.93 - 82.25i, \lambda_2 = -280.64 + 81.49i, \lambda_3 = -35.29$

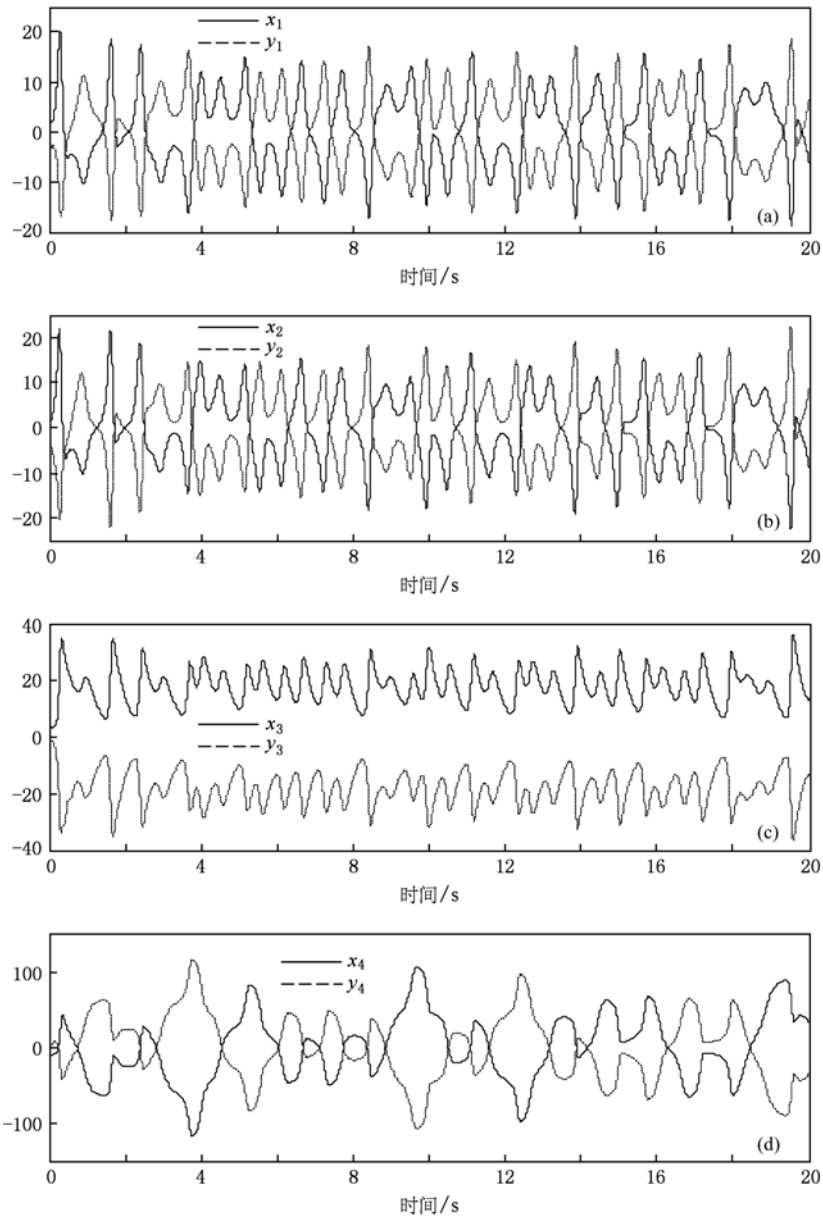


图1 超 Chen 系统和超 Lorenz 系统的反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线; (b) x_2 和 y_2 的反同步曲线; (c) x_3 和 y_3 的反同步曲线; (d) x_4 和 y_4 的反同步曲线

+0.77i, $\lambda_4 = 0.50$.

根据(17)式,要使系统(41)产生混沌现象,则要满足 $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{82.25}{289.93}\right) \approx 0.18$, 即 $1 \geq \alpha > 0.18$, 分数阶超 Chen 系统是混沌的.

分数阶超混沌 Lorenz 系统(响应系统)

$$\begin{aligned} d^\alpha y_1/dt^\alpha &= -a_1(y_1 - y_2) + y_4 + u_1(t), \\ d^\alpha y_2/dt^\alpha &= -y_1 y_3 + r_1 y_1 - y_2 + u_2(t), \\ d^\alpha y_3/dt^\alpha &= y_1 y_2 - b_1 y_3 + u_3(t), \\ d^\alpha y_4/dt^\alpha &= -y_1 y_3 - d_1 y_4 + u_4(t), \end{aligned} \quad (42)$$

式中, α 为分数阶阶数, 且 $0 < \alpha \leq 1$. 当 $a_1 = 10, b_1 = 8/3, d_1 = 1, r_1 = 28$ 时, 系统处于混沌状态, 通过计算得知, 系统具有 3 个不稳定的平衡点, $S_0 = (0, 0, 0, 0), S_1 = (1.1665, 21.6268, 9.4606, -204.6024), S_2 = (-1.1665, -21.6268, 9.4606, 204.6024)$.

系统(41)在平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 1 \\ 28 - y_3 & -1 & -y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 & -3/8 & 0 \\ -y_3 & 0 & -y_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

同理, 通过计算其在平衡点处的特征值, 根据(17)式, 可以得出, 当 $0.97 \leq \alpha \leq 1$, 系统参数 $a_1 = 10,$

$b_1 = 8/3, d_1 = 1, r_1 = 28$ 时, 系统(42)处于超混沌状态.

4. 仿真研究

4.1. 自适应主动控制仿真研究

为了验证上述方法的有效性, 利用 MATLAB 采用四阶龙格-库塔法, 时间步长选为 $t_s = 0.005$, 仿真时间选为 $T = 20$, 分别选取“未知参数” $\Theta = (a, b, c, d, r, a_1, b_1, d_1, r_1)^T = (35, 3, 12, 7, 0.5, 10, 8/3, 1.3, 28)^T$, 可选取参数 $M = [-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4]^T = [-10, -10, -10, -10]^T$, 状态初始值分别选为 $x(0) = (6, 0.5, 4, -9)^T, y(0) = (-4, -2, 1, -5)^T$, 则有 $e(0) = (2, -1.5, 5, -14)^T$, 任意选取参数估计初值 $\hat{\Theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{r}, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{d}_1, \hat{r}_1)^T = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)^T$. 驱动系统和响应系统状态反同步效果如图 1 所示, 由图可知, 两系统状态从不同初始条件出发, 随时间推移, 很快达到完全反同步; 系统状态误差曲线如图 2 所示, 其随时间推移趋于零; 参数估值收敛曲线如图 3 所示, 可见最终收敛于常数.

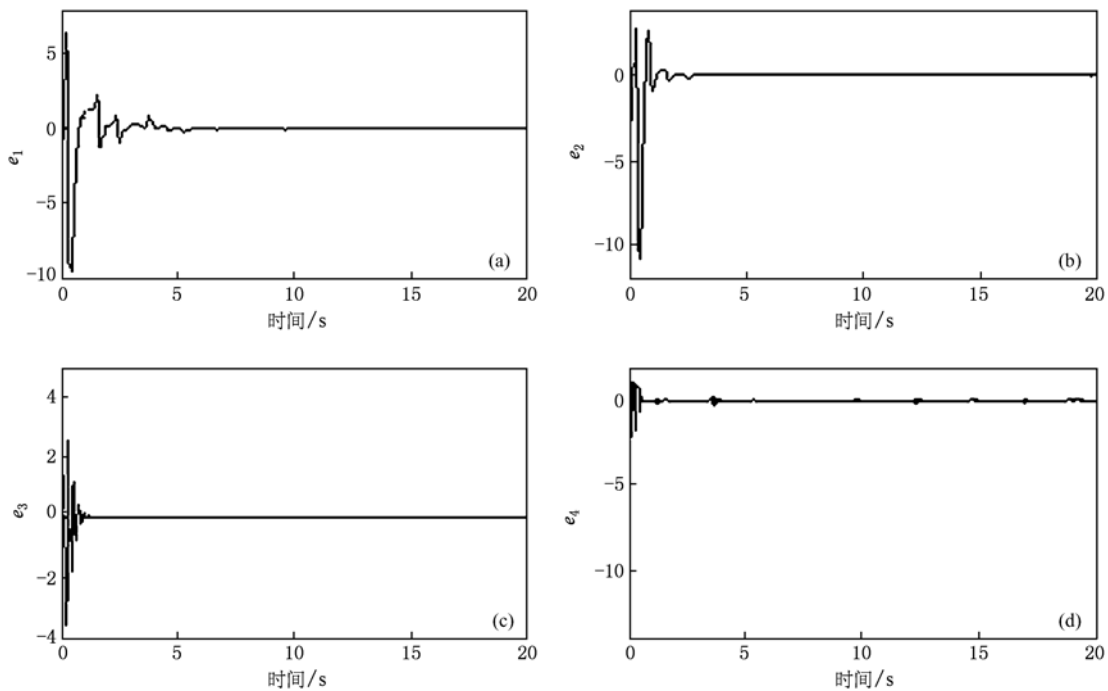


图 2 超混沌 Chen 系统和超混沌 Lorenz 的反同步误差曲线 (a) e_1 的误差曲线; (b) e_2 的误差曲线; (c) e_3 的误差曲线; (d) e_4 的误差曲线

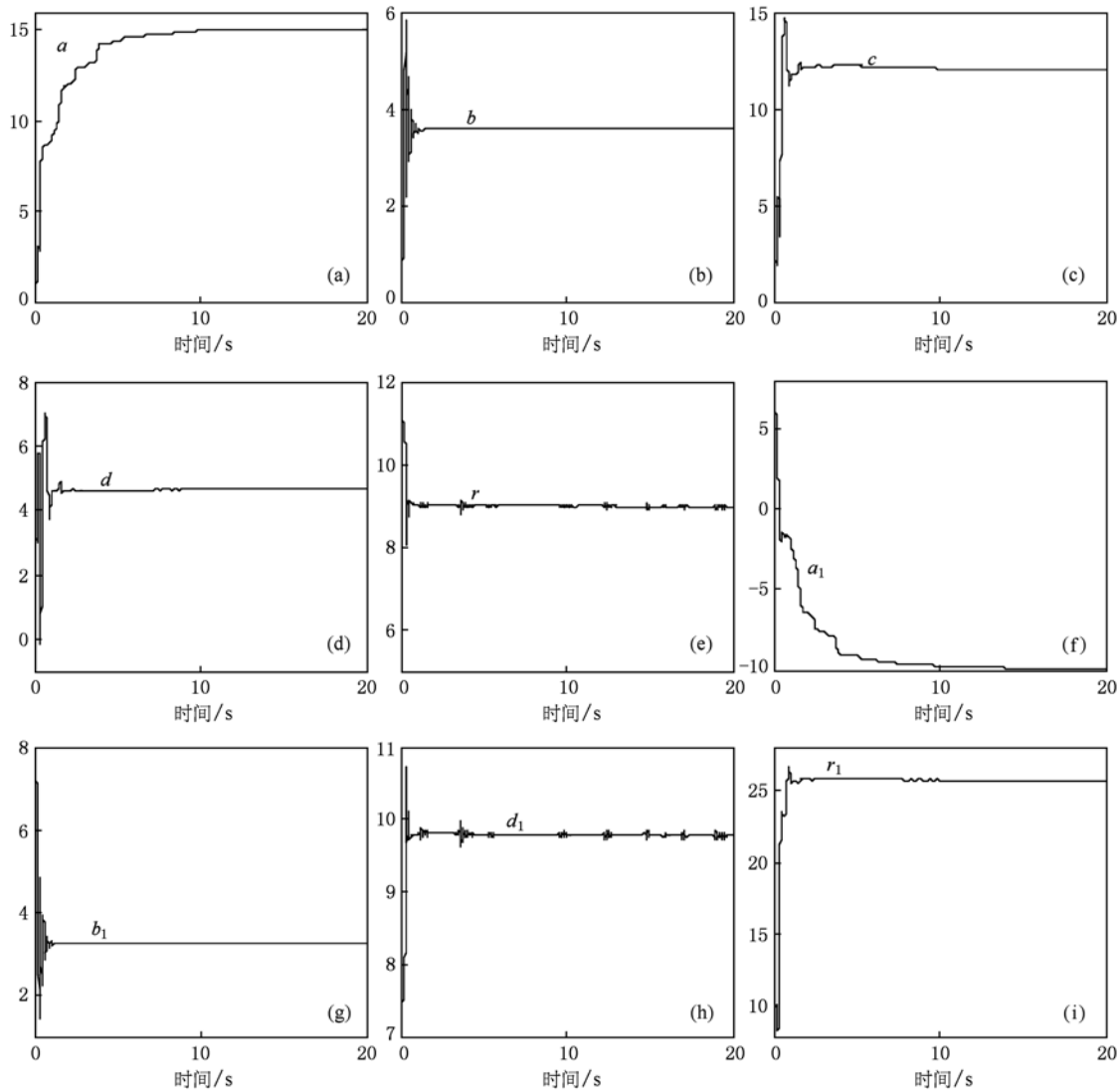


图3 超混沌各参数估计收敛曲线 (a) a 的误差曲线;(b) b 的误差曲线;(c) c 的误差曲线;(d) d 的误差曲线;(e) r 的误差曲线;(f) a_1 的误差曲线;(g) b_1 的误差曲线;(h) d_1 的误差曲线;(i) r_1 的误差曲线

4.2. 滑模控制分数阶超混沌反同步仿真研究

采用预估-校正解法进行数值仿真,选取 $\alpha = 0.98$, 时间步长 $t_s = 0.001$, 仿真时间 $T = 15$, 系统参数 $(a, b, c, d, r, a_1, b_1, d_1, r_1)^T = (35, 3, 12, 7, 0.5, 10, 8/3, 1, 28)^T$, 控制参数 $K = [1 \ 2 \ 2 \ 1]^T$, $C = [-1.5 \ 5 \ -3 \ -1]$, $r = 1.5$, $p = 0.35$, 受控系统系数矩阵为 $A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 1 \\ 28 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -8/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 随机选取状态初始值分别为 $x(0) = (2, 0, 1, 1)^T$, $y(0) = (10, 5, -14, -2)^T$, 则有 $e(0) = (12, 5, -13, -1)^T$. 驱动系统和响应系统状态反同步效果如图4所示, 系统状态误差曲线如图5所示, 由图可知, 通过滑模控制法对两分数阶超混沌系统进行控制, 两系统状态从任意初始条件出发, 随时间推移, 很快达到完全反同步的效果.

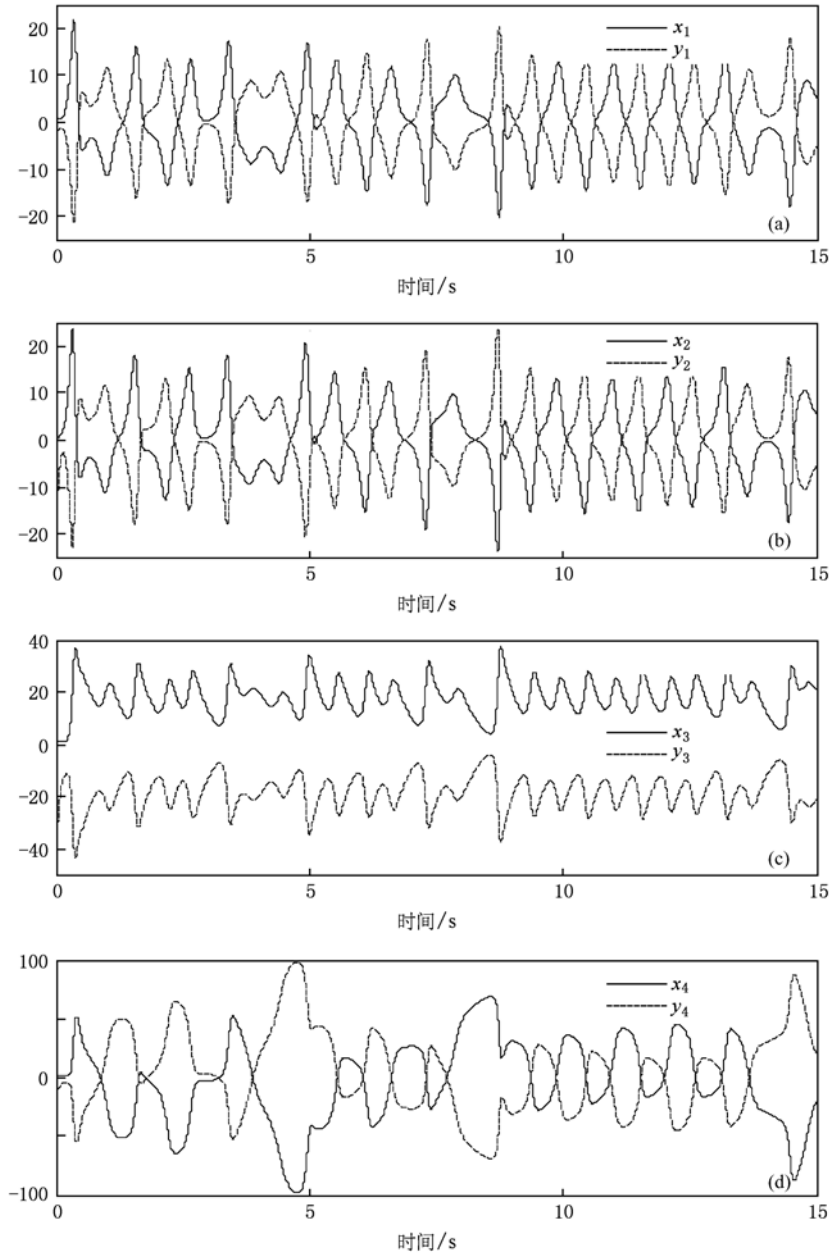


图4 分数阶超 Chen 系统和分数阶超 Lorenz 系统滑模控制反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线;(b) x_2 和 y_2 的反同步曲线;(c) x_3 和 y_3 的反同步曲线;(d) x_4 和 y_4 的反同步曲线

5. 结 论

本文选取两异结构具有时变结构参数、随机初值的超混沌系统,研究其反同步问题.首先采用了自适应结合主动控制的方法,达到反同步,具有一

定的普适性.该方法新颖简单有效,并且很好地解决了参数摄动问题,具有良好的鲁棒性能.其次,针对目前研究相对热门的分数阶系统,用滑模控制实现两异结构超混沌系统的反同步,所提方法适用性广,且行之有效,数值仿真进一步验证了本文所提方案的有效性.

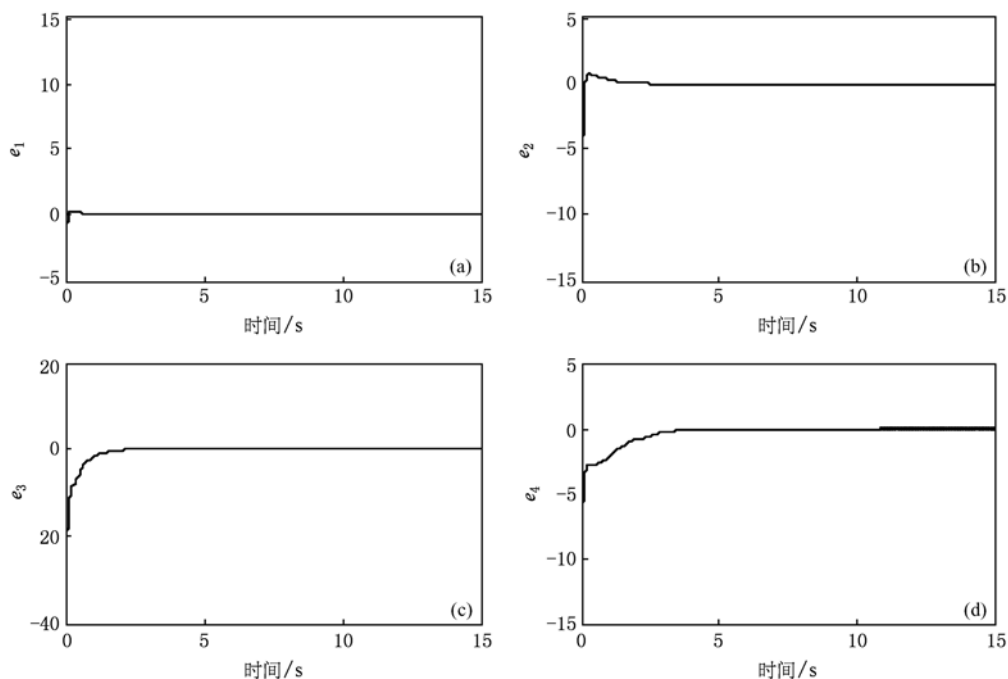


图5 分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌 Lorenz 系统滑模控制反同步误差曲线 (a) e_1 的误差曲线;(b) e_2 的误差曲线;(c) e_3 的误差曲线;(d) e_4 的误差曲线

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Li G H 2005 *Chaos, Soliton and Fractals*. **32** 1454
- [3] Yin X H, Shan X M, Ren Y 2003 *Atomic Energy Science and Technology* **37** 185 (in Chinese) [尹逊和、山秀明、任勇 2003 原子能科学技术 **37** 185]
- [4] Liu F C, Liang X M, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1458 (in Chinese) [刘福才、梁晓明、宋佳秋 2008 物理学报 **57** 1458]
- [5] Dadras S, Momeni H R, Majd V J 2008 *Chaos, Soliton and Fractals* **41** 1857
- [6] Tang R A, Liu Y L, Xue J K 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1449
- [7] Kuntanapreeda S 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2837
- [8] Wei D Q, Luo X S, Bing H W, Jin Q F 2007 *Phys. Lett. A* **363** 71
- [9] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [10] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 507
- [11] Wang H X, Cai G L, Miao S, Tian L X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 509
- [12] Sun L, Jiang D P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3283 (in Chinese) [孙琳、姜德平 2006 物理学报 **55** 3283]
- [13] Liu D, Yan X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3747 (in Chinese) [刘丁、闫晓妹 2009 物理学报 **58** 3747]
- [14] Yang J, Qi D L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 508
- [15] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 510
- [16] Zhang R X, Yang S P 2009 *Journal of Hebei Normal University* **33** 37 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2009 河北师范大学学报 **33** 37]
- [17] Hosseinnia SH, Ghaderi R, Ranjbar NA 2010 *Comput. Math. Applicat.* **59** 1637
- [18] Xu C, Feng JW, Austin F 2009 *Int. J. Nonlin. Sci.* **10** 1517

Anti-synchronization of different hyperchaotic systems based on adaptive active control and fractional sliding mode control *

Liu Fu-Cai[†] Li Jun-Yi Zang Xiu-Feng

(Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province,
West Campus of Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 31 December 2009; revised manuscript received 14 July 2010)

Abstract

Taking hyperchaotic Chen system and hyperchaotic Lorenz system as examples, we study the anti-synchronization of hyperchaotic systems with slow time-varying parameters. Firstly, taking advantage of active control concept, the non-linear parts of hyperchaotic systems are eliminated, and then based on Lyapunov stability theory, a kind of parameter adaptive control law is selected reasonably to achieve anti-synchronization of two hyperchaotic systems, which is a good solution to the time-varying parameters perturbation problem. Furthermore, hyperchaotic systems of different parameters with fractional order are studied via sliding mode control, which is proved to be valid theoretically. Numerical simulation experiments verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: hyperchaos, fractional order, adaptive, sliding mode

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Jn, 05.45.Pq, 05.45.Xt

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China(Grant No. F2010001320).

[†] E-mail: lfc_xb@263.net