变分法研究一维 Bose-Fermi 系统的稳定性

陈海军[1)] 李高清[1)†] 薛具奎[2)]
1)(陇东学院物理与电子工程学院, 庆阳 745000)
2)(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)
(2010 年 3 月 24 日收到;2010 年 7 月 12 日收到修改稿)

利用能量泛函变分法研究了一维 Bose-Fermi 系统稳定基态的存在条件. 根据 Bose-Fermi 系统的 Lagrange 量可以得到三维 Bose-Fermi 体系所满足的非线性动力学方程组. 当外势阱的横向囚禁频率远大于轴向囚禁频率时, 体系可以当作一维模型来处理. 从描述三维体系的动力学方程可以得到描述一维体系的动力学方程, 选取适当的无量纲参数, 可以对一维动力学方程组进行无量纲处理, 得到数值计算和理论分析中常用到的无量纲方程. 选择高斯型试探解(简单孤立子解), 利用能量泛函变分法得到一维 Bose-Fermi 体系稳定的高斯型孤立子存在条件. 分析了两种特殊情况下孤立子能够稳定存在的区域以及原子数的临界条件, 最后得出了一般情况下稳定基态存在时临界散射长度与原子数以及波包宽度之间的关系.

关键词: Bose-Fermi, 稳定性, 基态, 临界条件
PACS: 03.75.Lm, 03.75.Mn, 03.75.Kk

1. 引 言

自从实验上实现了单组分原子体系的玻色爱因斯坦凝聚以后, 冷原子体系的研究从实验和理论两个方面展开, 理论研究主要包括平均场理论和数值分析两个方面[1—12]. 最近几年由于激光冷却技术的发展, 凝聚体系的研究已由单组分原子体系扩展到多组分原子体系, 包括同种玻色原子不同自旋态以及不同种类玻色原子体系的混合凝聚. 随着冷却技术的继续发展, 尤其是同情冷却(sympathetic cooling)技术的成熟, 已经可以实现玻色原子和 Fermi 原子体系的混合凝聚以及 Fermi 和 Fermi 原子体系的混合凝聚[13]. Fermi 原子体系由于泡利不相容原理, 原子之间存在很强的排斥作用, 实现 Fermi 凝聚是很困难的, 同情冷却技术实现 Fermi 凝聚是以另一种原子的凝聚为前提, 最终实现共同凝聚. 实验上已经实现的 Bose-Femi 混合凝聚有 ^{7}Li-^{6}Li[14,15], ^{6}Li-^{23}Na[16] 以及 ^{7}K-^{87}Rb[17] 混合体系, Fermi-Fermi 体系的凝聚是 ^{40}K 以及 ^{6}Li 的不同自旋态的凝聚[18]. 另外, 有大量的文献用平均场理论和数值模拟方法对 Bose-Fermi 体系进行了理论研究[1—5]. 由于冷原子体系自身的量子特性及外部条件(包括势阱的结构, 强度以及其他组分的相互作用)的影响, 体系往往是不稳定的, 因此冷原子体系稳定性研究显得十分重要.

孤立子问题是非线性物理的一个重要研究课题, 而冷原子体系可以为实现和控制孤立子提供理想的实验平台, 因此冷原子体系中孤立子的研究尤为重要[19,20]. 孤立子稳定存在是需要严格条件的, 在冷原子体系中研究孤立子主要考虑原子之间的相互作用, 外势阱的结构以及强度等对孤立子稳定性的影响, 也可以考虑特殊性势阱(如光晶格)中孤立子的行为以及多组分冷原子体系中多个孤立子之间相互影响的动力学行为[21,22]. 孤立子的稳定性研究主要包括孤立子的结构, 以及孤立子稳定存在的条件, 稳定条件往往表现为系统参数之间的函数关系, 根据函数关系可以确定系统稳定时参数的临界值以及参数空间中的稳定和不稳定区域. 维数是冷原子体系另一个重要概念, 根据囚禁势阱横向和轴向束缚力度的不同, 凝聚系统可以用不同维数模型来处理[23,24]. 一般地, 凝聚体系是三维结构, 当横向囚禁频率远大于轴向囚禁频率时, 凝聚体系可以当作一维模型来处理, 称为"雪茄"模型.

本文利用能量泛函变分法[6]研究一维抛物型势阱中玻色 Fermi 混合体系中稳定孤立子解存在的

† 通讯联系人. E-mail: lgaoq@163.com

条件. 双组分 Bose 混合凝聚体系研究的出发点是 Gross-Pitaevskii 方程,对于 Bose-Fermi 混合体系仍然可以得到类似于 Bose-Bose 混合体系的 Gross-Pitaevskii 方程组. 我们从描述三维系统的耦合方程组得到了描述一维 Bose-Fermi 混合体系的动力学方程组,然后选取适当的单位对耦合方程进行了无量纲化,得到了数值计算和理论分析中经常用到的无量纲化方程. 选取高斯型试探解,利用能量泛函变分法分析了高斯型孤立子解稳定存在所满足的条件. 分析了两种特殊情况下孤立子能够稳定存在的区域以及原子数的临界条件,最后得出了一般情况下稳定基态存在时临界散射长度与原子数以及波包宽度之间的关系.

2. 一维模型

Bose-Fermi 混合体系的能量密度是

$$\varepsilon_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{B}}}|\nabla\Psi_{\mathrm{B}}|^2 + V_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r})|\Psi_{\mathrm{B}}|^2 + \frac{1}{2}g_{\mathrm{BB}}|\Psi_{\mathrm{B}}|^4,$$

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2}{6m_{\mathrm{F}}}|\nabla\Psi_{\mathrm{F}}|^2 + V_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r})|\Psi_{\mathrm{F}}|^2 + \frac{3}{5}A|\Psi_{\mathrm{B}}|^{10/3},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{BF}} = g_{\mathrm{BF}}|\Psi_{\mathrm{B}}|^2|\Psi_{\mathrm{F}}|^2, \tag{1}$$

其中非线性相互作用系数分别是

$$g_{\mathrm{BB}} = 4\pi\hbar^2 a_{\mathrm{BB}}/m_{\mathrm{B}},$$
$$A = \hbar^2(6\pi^2)^{2/3}/(2m_{\mathrm{F}}), \tag{2}$$
$$g_{\mathrm{BF}} = 2\pi\hbar^2 a_{\mathrm{BF}}/m_{\mathrm{R}},$$

下标 B,F 分别表示 Bose 和 Fermi 组分,a 表示散射长度,m 表示质量,$m_{\mathrm{R}} = m_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{F}}/(m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{F}})$是约化质量. 为了讨论方便,取 $V(\boldsymbol{r}) = V_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r}) = V_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r}) = m_{\mathrm{B}}\omega^2(x^2+y^2+\nu^2z^2)/2$.

Bose-Fermi 混合体系的 Lagrange 量是[13]

$$L = \int L\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int(T-\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

其中

$$T = \sum_{k=\mathrm{B,F}}\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left(\Psi_i^*\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} - \Psi_i\frac{\partial\Psi_i^*}{\partial t}\right),$$
$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{B}} + \varepsilon_{\mathrm{F}} + \varepsilon_{\mathrm{BF}}. \tag{4}$$

利用 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\Psi_k^*}{\partial t}} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\Psi_k^*}{\partial x_i}} = \frac{\partial L}{\partial\Psi_k^*},$$
$$(k = \mathrm{B,F}), \tag{5}$$

可以从 L 求出波函数 Ψ_{B} 和 Ψ_{F} 所满足的三维非线性薛定谔方程(NLSE)[1,3]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r},t) = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{B}}}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) + g_{\mathrm{BB}}|\Psi_{\mathrm{B}}|^2 + g_{\mathrm{BF}}|\Psi_{\mathrm{F}}|^2\Big]\Psi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r},t),$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r},t) = \Big[-\frac{\hbar^2}{6m_{\mathrm{F}}}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) + A|\Psi_{\mathrm{F}}|^{4/3} + g_{\mathrm{BF}}|\Psi_{\mathrm{B}}|^2\Big]\Psi_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r},t). \tag{6}$$

Bose-Fermi 体系囚禁在三维谐振势阱中,使横向囚禁频率远大于轴向囚禁频率,这时体系横向处于基态,轴向处于自由状态,体系可以当成准一维模型. 描述一维体系的非线性薛定谔方程可以从对应的三维(6)中得到. 三维波函数写成横向和轴向波函数的乘积 $\Psi_k(\boldsymbol{r};t) = \psi'_k(x,y;t)\phi'_k(z;t)$,其中 $\psi'_k(x,y;t)$是 Bose 和 Fermi 分量的横向基态波函数,假设

$$\psi'_k(x,y;t) = \sqrt{\frac{1}{\pi l_{xy}^2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2l_{xy}^2}\right)\exp(-\mathrm{i}\omega t), \tag{7}$$

$l_{xy} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$是波包的横向宽度,$\psi'_s$ 满足二维谐振子势阱中的基态方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'_{\mathrm{B}} = -\frac{\hbar}{2m_{\mathrm{B}}}\nabla_{xy}^2\psi'_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}\omega^2(x^2+y^2)\psi'_{\mathrm{B}},$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'_{\mathrm{F}} = -\frac{\hbar}{6m_{\mathrm{F}}}\nabla_{xy}^2\psi'_{\mathrm{F}} + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}\omega^2(x^2+y^2)\psi'_{\mathrm{F}}. \tag{8}$$

从方程(6)中消去方程(8)并对 xy 方向积分,便可得到准一维 Bose-Fermi 系统所满足的动力学方程组.

为了数值计算或定量讨论系统的动力学行为,需要对方程进行无量纲化. 令 $m\equiv m_{\mathrm{B}} = 3m_{\mathrm{F}} = m_{\mathrm{Rb}}$,并选取无量纲参数 $\tau = t\omega/2$, $x = z/\sqrt{\hbar/(m\nu\omega)}$,波函数的无量纲形式是 $\psi_k\} = \phi'_k/\sqrt{N_k/l_z}$, N_k 是 Bose 或 Fermi 分量的原子数,$l_z = \sqrt{\hbar/(m\nu\omega)}$是波包的轴向宽度,可以得到描述准一维 Bose-Fermi 系统的无量纲形式的动力学方程组

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_{\mathrm{B}}(x,\tau) = \Big[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 + \chi_{\mathrm{BB}}|\psi_{\mathrm{B}}|^2 + \chi_{\mathrm{BF}}|\psi_{\mathrm{F}}|^2\Big]\psi_{\mathrm{B}}(x,\tau),$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_{\mathrm{F}}(x,\tau) = \Big[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 + \chi_{\mathrm{FF}}|\psi_{\mathrm{F}}|^{4/3} + \chi_{\mathrm{FB}}|\psi_{\mathrm{B}}|^2\Big]\psi_{\mathrm{F}}(x,\tau), \tag{9}$$

其中

$$\chi_{\rm BB} = \frac{4a_{\rm BB}N_{\rm B}}{l\nu},$$
$$\chi_{\rm BF} = \frac{8a_{\rm BF}N_{\rm F}}{l\nu}, \chi_{\rm FB} = \frac{8a_{\rm BF}N_{\rm B}}{l\nu}, \tag{10}$$
$$\chi_{\rm FF} = \frac{9}{5}\left(\frac{6\pi N_{\rm F}}{\nu}\right)^{2/3}$$

分别表示 Bose 分量和 Fermi 分量组分内部原子间的相互作用以及组分之间原子间的相互作用.

3. 稳定条件

利用文献[6]中的能量泛函变分方法分析稳定孤立子的存在条件. 为了变分计算,假定高斯型试探波函数为

$$\phi'_k = \sqrt{\frac{N_k}{\sqrt{\pi}R_k}}\exp\left(-\frac{x^2}{2R_k^2}\right). \tag{11}$$

一维 Bose-Fermi 体系的能量

$$\begin{aligned} E[\phi'_{\rm B},\phi'_{\rm F}] = \int & \frac{\hbar^2}{2m_{\rm B}}\left|\frac{{\rm d}\phi'_{\rm B}}{{\rm d}x}\right|^2 + \frac{1}{2}m_{\rm B}(\nu\omega)^2|\phi'_{\rm B}|^2 \\ & + \frac{1}{2}g_{\rm BB}^{\rm 1D}|\phi'_{\rm B}|^4 + \frac{\hbar^2}{6m_{\rm F}}\left|\frac{{\rm d}\phi'_{\rm F}}{{\rm d}x}\right|^2 \\ & + \frac{1}{2}m_{\rm B}(\nu\omega)^2|\phi'_{\rm F}|^2 + \frac{3}{5}A^{\rm 1D}|\phi'_{\rm F}|^{10/3} \\ & + g_{\rm BF}^{\rm 1D}|\phi'_{\rm B}|^2|\phi'_{\rm F}|^2{\rm d}x. \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $g_{\rm BB}^{\rm 1D} = g_{\rm BB}/2\pi l_{xy}^2$, $g_{\rm BF}^{\rm 1D} = g_{\rm BF}/2\pi l_{xy}^2$ 和 $A^{\rm 1D} = 3A/5\pi^{2/3}l_{xy}^{4/3}$是一维体系中的相互作用系数.

把方程(11)代入方程(12)得

$$\begin{aligned} E = & \frac{\hbar^2}{4m}N_{\rm B}R_{\rm B}^{-2} + \frac{\hbar^2}{4m}N_{\rm F}R_{\rm F}^{-2} + \frac{1}{4}m(\nu\omega)^2N_{\rm B}R_{\rm B}^2 \\ & + \frac{1}{4}m(\nu\omega)^2N_{\rm F}R_{\rm F}^2 + \frac{1}{2}g_{\rm BB}^{\rm 1D}(2\pi)^{-1/2}N_{\rm B}^2R_{\rm BB}^{-1} \\ & + (3/5)^{3/2}A^{\rm 1D}\pi^{-1/3}N_{\rm F}^{5/3}R_{\rm F}^{-2/3} \\ & + g_{\rm BF}^{\rm 1D}N_{\rm B}N_{\rm F}[\pi(R_{\rm B}^2 + R_{\rm F}^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

选取无量纲系数 $\varepsilon = E/(\hbar\nu\omega/2)$, $r_k = R_k/l_z$ 和 $\alpha = a/l_z$,可得

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}N_{\rm B}r_{\rm B}^{-2} + \frac{1}{2}N_{\rm F}r_{\rm F}^{-2} + \frac{1}{2}N_{\rm B}r_{\rm B}^2 + \frac{1}{2}N_{\rm F}r_{\rm F}^2 \\ & + \lambda_{\rm BB}\alpha_{\rm BB}N_{\rm B}^2r_{\rm B}^{-1} + \lambda_{\rm FF}N_{\rm F}^{5/3}R_{\rm F}^{-2/3} \\ & + \lambda_{\rm BF}\alpha_{\rm BF}N_{\rm B}N_{\rm F}(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\lambda_{\rm BB} = \sqrt{2/\pi}/\nu$, $\lambda_{\rm FF} = 81\pi^{1/3}2^{2/3}3^{1/6}5^{-1/2}\nu^{-2/3}/25$, $\lambda_{\rm BF} = 8/(\nu\sqrt{\pi})$.

稳定基态存在的条件是 $\partial\varepsilon/\partial r_k = 0$,即

$$\begin{aligned} & 1 - r_{\rm B}^{-4} - \lambda_{\rm BB}N_{\rm B}\alpha_{\rm BB}r_{\rm B}^{-3} - \lambda_{\rm BF}N_{\rm F}\alpha_{\rm BF}(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^{-3/2} = 0, \\ & 1 - r_{\rm F}^{-4} - \frac{2}{3}\lambda_{\rm FF}N_{\rm F}^{2/3}r_{\rm F}^{-8/3} - \lambda_{\rm BF}N_{\rm B}\alpha_{\rm BF}(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^{-3/2} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

以及 Hessian 矩阵满足

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r_{\rm B}^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r_{\rm F}^2} - \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r_{\rm B}\partial r_{\rm E}}\right)^2 > 0, \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r_{\rm B}^2} > 0. \tag{16}$$

方程(16)给出了参数空间中稳定基态解存在的区域,而方程(15)确定了稳定基态存在时的临界条件.

讨论上述条件的3种情况.

1)通过方程(16)可以分析参数空间中稳定孤立子的存在区域,Hessian 矩阵的表达式为

$$\begin{aligned} & \left[N_{\rm B} + \frac{3N_{\rm B}}{r_{\rm B}^4} + \frac{2\alpha_{\rm BB}N_{\rm B}^2\lambda_{\rm BB}}{r_{\rm B}^3} + \frac{\alpha_{\rm BF}N_{\rm B}N_{\rm F}\lambda_{\rm BF}}{(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^{5/2}}(2r_{\rm B}^2 - r_{\rm F}^2)\right] \\ & \times\left[N_{\rm F} + \frac{3N_{\rm F}}{r_{\rm F}^4} + \frac{10N_{\rm F}^{8/3}\lambda_{\rm FF}}{9r_{\rm F}^{8/3}} + \frac{\alpha_{\rm BF}N_{\rm B}N_{\rm F}\lambda_{\rm BF}}{(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^{5/2}}(2r_{\rm F}^2 - r_{\rm B}^2)\right] \\ & - \frac{9\alpha_{\rm BF}^2N_{\rm B}^2N_{\rm F}^2r_{\rm B}^2r_{\rm F}^2\lambda_{\rm BF}^2}{(r_{\rm B}^2 + r_{\rm F}^2)^5}. \end{aligned} \tag{17}$$

假设 $r_{\rm B} = r_{\rm F} = r$,可以得出临界条件

$$\begin{aligned} & (24 + 8r^4 + 16\alpha_{\rm BB}\lambda_{\rm BB}N_{\rm B}r + \sqrt{2}\alpha_{\rm BF}\lambda_{\rm BF}N_{\rm F}r) \\ & \times(216 + 72r^4 + 9\sqrt{2}\alpha_{\rm BF}\lambda_{\rm BF}N_{\rm B}r + 80\lambda_{\rm FF}N_{\rm F}^{2/3}r^{4/3}) \\ & = 162\alpha_{\rm BF}^2\lambda_{\rm BF}^2N_{\rm B}N_{\rm F}r^2. \end{aligned} \tag{18}$$

2)根据方程(15),假设 $r_{\rm B} = r_{\rm F} = 1$,也就是两种原子波包的宽度相等且等于一个无量纲单位,可以得到稳定基态存在的临界原子数,

$$\begin{aligned} N_{\rm Fc} & = \frac{4096\alpha_{\rm BB}^3\lambda_{\rm BB}^3\lambda_{\rm FF}^3}{27\alpha_{\rm BF}^6\lambda_{\rm BF}^6} \approx 0.6\nu\alpha_{\rm BB}^3/\alpha_{\rm BF}^6, \\ N_{\rm Bc} & = \frac{-1024\sqrt{2}\alpha_{\rm BB}^2\lambda_{\rm BB}^2\lambda_{\rm FF}^3}{27\alpha_{\rm BF}^5\lambda_{\rm BF}^5} \approx -1.2\nu\alpha_{\rm BB}^2/\alpha_{\rm BF}^5. \end{aligned} \tag{19}$$

从临界原子数的取值可以看出,在这样的特殊情况下,必须满足 $\alpha_{\rm BB} > 0$ 且 $\alpha_{\rm BF} < 0$,也就是 Bose 分量内部原子间为排斥相互作用,玻色 Fermi 原子之间为吸引作用时,才可能有稳定基态存在,这是因为按照泡利不相容原理,Fermi 原子之间有很强的排斥作用,必须要有 Bose-Fermi 原子之间的吸引作用来抵消.

3)散射长度代表了原子之间的相互作用,而原子之间的相互作用在体系的稳定性中起到非常重要的作用,可以从方程(15)得出稳定基态存在时散

射长度与原子数以及波包宽度之间的关系

$$\alpha_{BB}=\frac{3N_B(r_B^4-1)r_F^4-3N_F(r_F^4-1)r_B^4+2N_F^{5/3}r_F^{4/3}\lambda_{FF}}{3N_B^3r_Br_F^4\lambda_{BB}},$$

$$\alpha_{BF}=\frac{(r_B^2+r_F^2)^{3/2}(3r_F^4-2N_F^{2/3}r_F^{4/3}\lambda_{FF}-3)}{3N_Br_F^4\lambda_{BF}},\qquad(20)$$

当系统的波包宽度和原子数给定时,可以很方便地确定稳定基态存在时,散射长度所满足的临界值.

4. 结　　论

本文讨论了准一维 Bose-Fermi 混合体系稳定基态解存在的条件. 当囚禁势阱的横向囚禁频率远大于轴向囚禁频率时, Bose-Fermi 系统可以当作准一维模型来分析. 一般的理论计算总考虑三维情况,因此必须从描述三维模型的动力学方程组得出描述一维体系的动力学方程组,然后选取适当的无量纲参数,可以得到理论分析中用到的无量纲方程组,无量纲化处理主要是对原子之间相互作用的分析,因为原子之间的非线性相互作用对系统的稳定性有非常重要的影响. 研究孤立子问题时,往往提出高斯型的试探解,利用能量泛函变分原理,可以得到稳定基态存在时所满足的条件. 在本文的最后,分析了两种特殊情况下稳定孤立子存在时稳定区域以及原子数的临界条件,最后得出了一般情况下稳定基态存在时临界散射长度与原子数以及波包宽度之间的关系.

[1] Adhikari S K 2005 *Phys. Rev.* A **72** 053608

[2] Adhikari S K, Salasnich L 2007 *Phys. Rev.* A **76** 023612

[3] Adhikari S K 2004 *Phys. Rev.* A **70** 043617

[4] Adhikari S K 2006 *Phys. Rev.* A **73** 043619

[5] Modugno M, Ferlaino F, Riboli F, Roati G, Modugno G, Inguscio M 2003 *Phys. Rev.* A **68** 043626

[6] Morise H, Tsrumi T, Wadati M 2000 *Physica* A **281** 432

[7] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]

[8] Ma Y, Fu L B, Yang Z A 2006 *Acta phys. Sin.* **55** 5628 (in Chinese) [马 云、傅立斌、杨志安 2006 物理学报 **55** 5628]

[9] Liu Z Z, Yang Z A 2007 *Acta phys. Sin.* **56** 1245 (in Chinese) [刘泽专、杨志安 2007 物理学报 **56** 1245]

[10] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东、谢征微、张卫平 2007 物理学报 **56** 6358]

[11] Zhou X Y, Mu A X, Xue J K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3197

[12] Zhang L P, Xue J K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2594

[13] Huang C C, Wu W C 2007 *Phys. Rev.* A **75** 023609

[14] Truscott A G, Strecker K E, McAlexander W I, Partridge G B, Hulet R G 2001 *Science* **291** 2570

[15] Schreck F, Khaykovich L, Corwin K L, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Salomon C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 080403

[16] Hadzibabic Z, Stan C A, Dieckmann K, Gupta S, Zwierlein M W, Görlitz A, Ketterle W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 160401

[17] Goldwin J, Papp S B, DeMarco B, Jin D S 2002 *Phys. Rev.* A **65** 021402

[18] Strecker K E, Partridge G B, Hulet R G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 080406

[19] Dong L W, Wang J D, Wang H, Yin G Y 2009 *Phys. Rev.* A **79** 013807

[20] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2006 *Phys. Rev.* E **74** 066615

[21] Li H and Wang D N 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4726

[22] Li H and Wang D N 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2659

[23] Xue J K, Zhang A X, Liu J 2008 *Phys. Rev.* A **77** 013602

[24] Wang J J, Zhang A X, Zhang K Z, Ma J, Xue J K 2010 *Phys. Rev.* A **81** 033607

Variational-method analysis of stability of Bose-Fermi mixture

Chen Hai-Jun[1)] Li Gao-Qing[1)†] Xue Ju-Kui[2)]

1) (*Physics and Electronics Engineering College, Longdong University, Qingyang* 745000, *China*)

2) (*Physics and Electronics Engineering College, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

(Received 24 March 2010; revised manuscript received 12 July 2010)

Abstract

In one-dimensional trapped Bose-Fermi mixture, described by time-dependent one-dimensional nonlinear equations that are derived from a three-dimensional Bose-Fermi system, we study the effect of atom-interactions on stability using a Gaussian Variational approach. We investigate the stable and the unstable conditions as functions of the atoms number and s-wave scattering length. We find that the interaction between the different species of atoms has significant effect on the stability of Bose-Fermi mixture. We also give critical conditions of the atoms number and s-wave scattering length for both special and general cases.

Keywords: Bose-Fermi, stability, ground state, critical condition

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Mn, 03.75.Kk

† Corresponding author. E-mail: lgaoq@163.com