

一种单稳随机共振系统信噪比增益的数值研究*

万 频^{1)†} 詹宜巨²⁾ 李学聪¹⁾ 王永华¹⁾

1) (广东工业大学自动化学院, 广州 510006)

2) (中山大学工学院, 广州 510006)

(2010年11月19日收到; 2010年12月13日收到修改稿)

采用四阶 Runge-Kutta 数值求解方法, 发现一种单稳随机共振系统信噪比增益的随机共振现象, 并且在一定的条件下系统信噪比增益大于 1. 通过调节单稳随机共振系统参数可以改变信噪比增益. 本文结果拓展了这类单稳的已有研究范围, 在信号检测与处理以及通信领域有着潜在的应用价值.

关键词: 单稳随机共振, 信噪比增益, 数值分析, 非线性

PACS: 05.40.-a, 02.60.-x, 06.30.Ka

1. 引言

一直以来, 随机共振在信号检测与处理以及通信领域的应用研究, 主要集中在双稳系统中. 1993年 Stocks 在文献[1]中首次提到在欠阻尼单稳系统中发现了随机共振现象, 随后有关单稳系统中的随机共振研究不断取得进展^[2-7]. Guo 等研究了乘性噪声和加性噪声在单稳系统中引发的随机共振^[8,9], 由于乘性噪声的作用导致单稳势阱中出现势垒, 实质上将单稳系统转化为双稳系统进行分析; Agudov 等^[10,11]研究了单稳势函数为分段线性函数构成的单稳系统产生的随机共振现象; 康艳梅等^[12]对单模非线性光学系统中的随机共振现象研究时, 根据对文中单稳的分析, 推测出单稳势函数如果存在拐点则系统会发生随机共振的一般性结论. Evstigneev 等^[13]给出的单稳势函数不存在势垒, 就文中个例而言也不存在拐点, 在加性噪声和驱动信号作用下系统的谱功率放大系数 η 出现随机共振现象, Evstigneev 等认为是一种新型单稳随机共振.

在大量的应用随机共振进行信号检测与处理以及通信的相关文献中, 绝大多数都是基于传统的双稳随机共振系统开展应用研究. 本文在文献[13]研究成果的基础上, 进一步研究这种新型单稳随机共振系统的信噪比增益特性, 希望能为随机共振在

信号检测与处理以及通信领域的应用添加新模式.

2. 一种新型单稳随机共振^[13]

在过阻尼限制也即忽略惯性作用的情况下, 郎之万方程取其原型

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + A\cos(2\pi Ft) + \Gamma(t), \quad (1)$$

式中 $U(x)$ 为势函数; $A\cos(2\pi Ft)$ 为周期性驱动信号; $\Gamma(t)$ 为高斯白噪声, 满足 $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$, $\langle \Gamma(t + \tau)\Gamma(t) \rangle = 2D\delta(\tau)$, D 为噪声强度(布朗粒子运动模型中为温度). 势函数为双稳时, 系统表现出来的是在理论和应用上研究都较多的传统双稳随机共振情况. 接下来要讨论的是在数学模型如(2)式所示的单稳势函数情况下^[13], 其系统随机共振的研究.

$$U(x) = a|x|^\alpha + b|x|^\beta, \quad a, b > 0, \quad 0 < \alpha < \beta. \quad (2)$$

系统(1)的瞬态过程结束后, x 的噪声统计平均值表现为围绕平衡态的受迫振荡,

$$\langle x \rangle(t) = \langle x \rangle_{\text{eq}} + |\chi_x| A \cos(2\pi Ft + \delta_x) + o(A^2), \quad (3)$$

在只关注小驱动幅值的情况时, 高阶项 $o(A^2)$ 可以忽略. χ_x 被称之为 x 的线性响应敏感度, 其模为 $|\chi_x| = \sqrt{(\text{Re}\chi_x)^2 + (\text{Im}\chi_x)^2}$, 相位为 $\delta_x =$

* 国家自然科学基金(批准号:60871025)资助的课题.

†E-mail: wanpin3@sohu.com

$\tan^{-1}(\text{Im}\chi_x/\text{Re}\chi_x)$. 为了更好体现系统的随机共振特性, 引入谱功率放大系数 η (spectral power amplification)^[14,15]

$$\eta = |\chi_x|^2, \quad (4)$$

如果对应 D 为变量时 η 有局部极大化现象即可判断系统产生随机共振.

为了数值化确定系统(1)对应于谐波驱动的线性响应(3), 文献[13]采用了矩方法(MOM)来进行计算^[16]. (2)式单稳势函数具体参数取值为 $a = b = 1, \alpha = 3/2, \beta = 4$, 即 $U(x) = |x|^{3/2} + x^4$ 时(如图1中内插图所示), 由文献[13]数值方法可得到 η 的数值解如图1所示, 可见 η 随 D 的变化呈现单峰曲线.

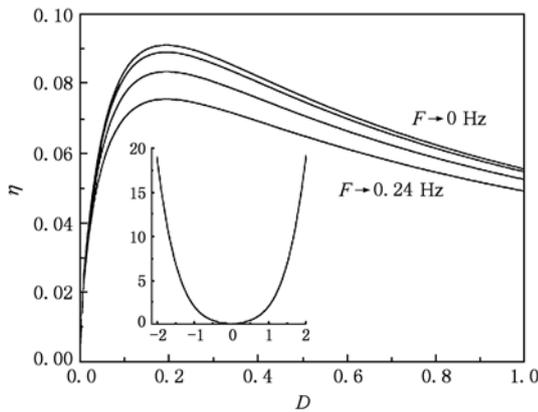


图1 谱功率放大系数 η 对应噪声强度 D 的变化曲线(驱动频率 F 分别取 $F \rightarrow 0$ Hz, $F = 0.08$ Hz, $F = 0.16$ Hz, $F = 0.24$ Hz)

对于势函数 $U(x) = |x|^{3/2} + x^4$ 而言, 不存在任何形式的势垒, 也不存在文献[12]提到的拐点, 对应产生的是一种新的随机共振类型.

结合图1对这种单稳过阻尼系统中的随机共振数值结果进行分析^[13]. 图1中 $F \rightarrow 0$ 的情况说明只是逼近直流, 现在来看(3)式中 F 足够小但有限时的 χ_x 的任意精度近似, χ_x 满足以下形式的涨落耗散定理

$$\lim_{F \rightarrow 0} \chi_x = \chi_{dc} = \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{D}, \quad (5)$$

对于(2)式中的对称势函数, $\langle x \rangle = 0$. $\langle x^2 \rangle$ 可估算得到^[13], 于是可知, 对于形如 $U(x) \propto |x|^\gamma (\gamma > 0)$ 的势函数, 有 $\chi_{dc} \propto D^{\frac{2}{\gamma}-1}$ 存在. 因此当 $\gamma < 2$ 和 $\gamma > 2$ 时, χ_{dc} 分别是噪声(温度)的增函数和减函数, 而在 $\gamma = 2$ 对应调和势函数时 χ_{dc} 保持恒定. 回到势函数(2)式, 当噪声(温度)很低时, 较小的指数 γ

$= \alpha$ 占主导地位, 因为系统绝大部分时间处于原点附近. 反之高噪声(高温)时, 类似的理由, 较大的指数 $\gamma = \beta$ 占主导地位. 因此, χ_{dc} 作为 D 的函数, 先增加后减小, 也即系统表现出随机共振特征. 换言之, χ_{dc} 初始的增长是由于噪声促使系统进入状态空间的更大范围造成的. 在噪声强度更大时, 噪声的无序干扰作用占主导地位, 导致 χ_{dc} 随后的下降. 可以得出结论, 对于其他 F 较小的情况, 一样会产生机理相同的随机共振现象^[13]. 作为(2)式势函数的一个具体算例, 图1很好地印证了该结论.

3. 信噪比增益

随机共振的测度有多种定义, 常用的有信噪比增益、信噪比、谱功率放大系数、线性响应敏感度以及常用在非周期随机共振上的互相关系数等. 一个系统对信号增强和改善作用的最本质衡量指标是信噪比增益, 即系统输出端信噪比与输入端信噪比之比. 在该指标大于1的情况下, 才说明系统具有改善信噪比的作用. 系统信噪比增益定义如下:

$$\text{SNR}_{\text{gain}} = \frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}}, \quad (6)$$

式中 SNR_{gain} 为信噪比增益, SNR_{out} 为输出端信噪比, SNR_{in} 为输入端信噪比.

对于随机共振系统的信噪比定义, 至今也没有统一认识^[17-19]. 主要有两种定义, 一种是源自于随机共振近似解析解推导过程中得到的信噪比定义^[14,17,20].

随机共振系统输入驱动信号为频率 F_0 的正弦信号, 其输出端信噪比

$$\text{SNR} = \frac{S(F_0)}{N(F_0)}, \quad (7)$$

式中 $S(F_0)$ 为输出端 F_0 频率的信号功率, $N(F_0)$ 为输出端 F_0 频率处的噪声功率谱.

另一种是信号检测与处理以及通信等领域中常用的信噪比定义^[17-19]:

$$\text{SNR} = \frac{S(F_0)}{P - S(F_0)}, \quad (8)$$

式中 $S(F_0)$ 为 F_0 频率的信号功率; P 为系统总功率, 包括信号功率和噪声功率, 减去 $S(F_0)$ 后剩下的即为噪声功率.

两种信噪比定义的不同之处在于噪声功率的解释不同, 前一种是局部噪声功率, 而后一种是全部噪声功率. (8)式的定义被认为能更好更全面地

描述信号与噪声的功率对比关系,更符合信号检测、通信等实际工程中信噪比的定义^[17-19].由于进一步求解信噪比增益还需要计算输入端信噪比,而 SNR_{in} 对应采用(8)式的定义,显然更能反映并未经过随机共振处理的信号和噪声的功率对比关系.因此,本文采用(8)式的信噪比定义.

设随机共振系统输入为(1)式中的 $A\cos(2\pi F_0 t) + \Gamma(t)$,该含噪信号经过采样频率为 F_s 的采样得到长度为 L 离散序列 $z(l)$,通过四阶 Runge-Kutta 算法数值求解得到单稳随机共振系统的输出信号,也是一个离散序列 $x(l)$,对 $x(l)$ 进行 FFT 处理,可得到其频谱分布 $X(k)$

$$X(k) = \sum_{l=0}^{L-1} x(l) e^{-j2\pi kl/L}. \quad (9)$$

设输出端信号中 F_0 频率分量的单边谱幅值为 $X(k_0)$,且有 $k_0 = \frac{F_0}{F_s}L$.根据(8)式的信噪比定义可得到

$$SNR_{out} = \frac{2|X(k_0)|^2}{\sum_{k=0}^{L-1} |X(k)|^2 - 2|X(k_0)|^2}. \quad (10)$$

同理,输入端含噪信号离散序列 $z(l)$ 信噪比可由下式得到

$$SNR_{in} = \frac{2|Z(k_0)|^2}{\sum_{k=0}^{L-1} |Z(k)|^2 - 2|Z(k_0)|^2}, \quad (11)$$

式中 $Z(k_0)$ 为输入含噪信号中 F_0 频率分量的单边谱幅值.

文献[17]证明了在 L 较大的情况下,(10)和(11)式信噪比表达式是成立的.

由(6)式可计算得到信噪比增益 SNR_{gain} .

4. 信噪比增益的随机共振现象

文献[13]得到谱功率放大系数 η 的随机共振现象,并未考虑该单稳系统信噪比增益这个重要参数,而信噪比增益大于1是随机共振系统在信号检测及通信方面发挥积极作用的最重要标志.本节内容主要进行该单稳系统信噪比增益的研究.这种新型单稳系统在解析解以及近似解求解方面,目前还没有研究成果出现,文献[13]的结论是数值解的结果.最近的相关文献[10]在研究分段线性函数构成的单稳系统时,提及了(12)式单稳模式,但没有相关研究结果.鉴于目前的研究现状,本文将采用精

度较高的四阶 Runge-Kutta 算法对该类单稳系统(13)式进行进一步的数值求解和研究,以期得到对这类单稳随机共振更多的了解.

设单稳势函数为

$$U(x) = \frac{2}{3}a|x|^{3/2} + \frac{1}{4}bx^4. \quad (12)$$

将(12)式代入(1)式过阻尼郎之万方程中

$$\frac{dx}{dt} = -a|x|^{1/2}\text{sign}(x) - bx^3 + A\cos(2\pi Ft) + \Gamma(t), \quad (13)$$

式中, $\text{sign}(x)$ 为符号函数

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (14)$$

为了与文献[13]所得结果进行相互验证比对,在数值研究信噪比增益的同时给出谱功率放大系数 η 的随机共振曲线.根据(3)式中第二项 $|\chi_x|A\cos(2\pi Ft + \delta_x)$ 可以将 χ_x 近似看成是 F 频率信号的输出信号幅度与输入信号幅度之比,由前面讨论可知经过 FFT 变换后输入和输出信号中的 F_0 频率信号单边谱幅值分别为 $Z(k_0)$ 和 $X(k_0)$,谱功率放大系数 $\eta \approx \frac{|X(k_0)|^2}{|Z(k_0)|^2}$.

本质上而言,文中的信噪比、信噪比增益、谱功率放大系数等均为随机变量,本文中上述几个指标均取其多次计算结果的算术平均值^[17-19].

首先采用图1对应的参数条件,为方便本文与文献[13]两种方法研究结果的比对,令(13)式系统参数 $a = \frac{3}{2}$, $b = 4$;外部周期性驱动信号为 $A\cos(2\pi Ft)$, $A = 0.3$, F 分别取 0.08 Hz, 0.16 Hz, 0.24 Hz; $\Gamma(t)$ 是与(1)式中相同的高斯白噪声;参照文献[18],采样点数 $L = 16384$,采样频率 F_s 取 $\frac{F_s}{F} = 128$,取 100 次数值计算结果的算术平均值.结果如图2所示.

从图2(a)中可以看到,采用 Runge-Kutta 方法得到的谱功率放大系数 η 的随机共振曲线,与文献[13]得到的如图1所示曲线相同,两种数值方法得到很好的相互验证.

从图2(b)中发现该单稳系统信噪比增益随噪声强度的变化也产生了随机共振现象,但系统信噪比增益小于1.

对随机共振尤其是双稳系统的相关文献查阅,

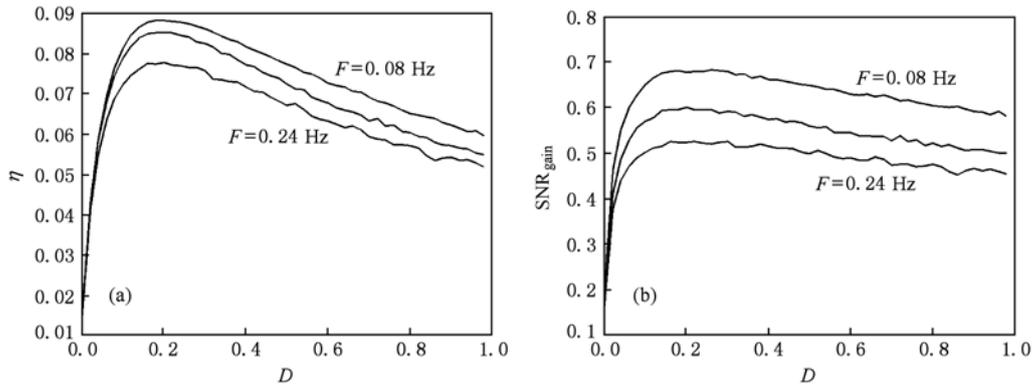


图2 Runge-Kutta 方法得到的单稳随机共振结果 (a) 谱功率放大系数 η ; (b) 系统信噪比增益 SNR_{gain}

可知随机共振系统的调节既可通过改变噪声强度也可通过调节系统参数来实现^[21-24]。同时由图2可知驱动信号频率对随机共振系统响应是有很大的影响的。有鉴于此, 本文通过调节单稳系统参数 a, b 以及驱动信号参数来进一步研究其信噪比增益的特性。具体参数调节为: $a = 0.5, b = 1; A = 0.2, F$ 分别取 0.01 Hz, 0.05 Hz, 0.15 Hz。其他参数与图2对应参数相同。所得结果如图3所示。

由图3(a)可以看到 η 的随机共振现象, 与图2(a)相比谱功率放大系数在峰值位置有6—10倍的增大。更重要的是从图3(b)可以观察到信噪比增益 SNR_{gain} 随机共振现象的同时, 还可以看到其大于1的情况, F 为 0.01 Hz, 0.05 Hz 时图中曲线数值大部分大于1; F 为 0.15 Hz 时图中曲线数值大部分在1附近临界变化。这个研究结果拓展了该种新型单稳随机共振已有的研究范围。

在文献[13]所述单稳随机共振机理的基础上, 可以进一步看到单稳势阱的深浅对随机共振特性

的重要影响, 也即当 a, b 较小(单稳势阱较浅)时, 噪声能量较易转化为信号能量, 并且有使共振峰左移的现象, 意味着更小的噪声强度就可导致共振峰的出现; 而当 a, b 较大(单稳势阱较深)时, 则相反。与传统的双稳随机共振情况类似, 外加驱动信号的频率被限制在较低频范围内, η 和 SNR_{gain} 均与驱动信号的频率 F 成反比。由图3(b)可以观察到该单稳系统信噪比增益随噪声强度增加衰减非常缓慢, 噪声的积极作用所持续的强度范围较大, 这也意味着单稳随机共振在实际应用中, 适用的噪声强度范围较宽。

取参数为 $a = 0.5, b = 1; A = 0.9, F = 0.02$ Hz; $D = 0.1$; 采样点数 $L = 16384$, 采样频率 F_s 取 $\frac{F_s}{F} = 128$ 。驱动信号分别为正弦信号和矩形脉冲信号时, 对带有高斯白噪声的信号处理结果如图4和图5所示。

对于输入如图4(a)所示正弦带噪信号, 单稳系

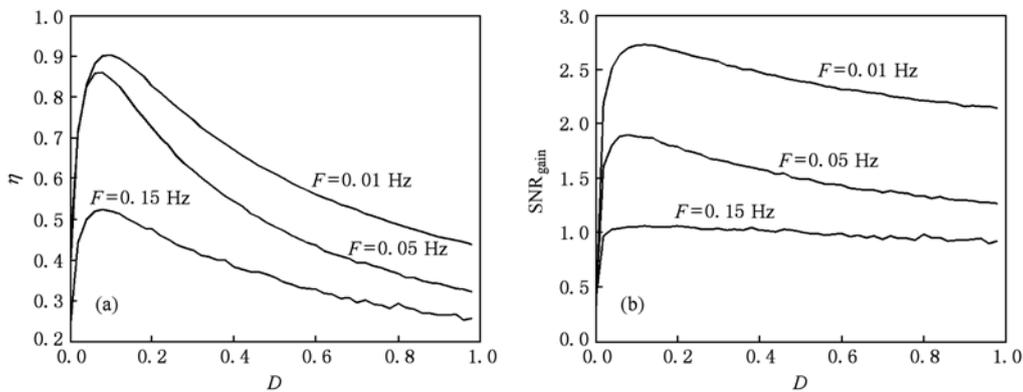


图3 调节系统参数和驱动信号参数之后得到的单稳随机共振结果 (a) 谱功率放大系数 η ; (b) 系统信噪比增益 SNR_{gain}

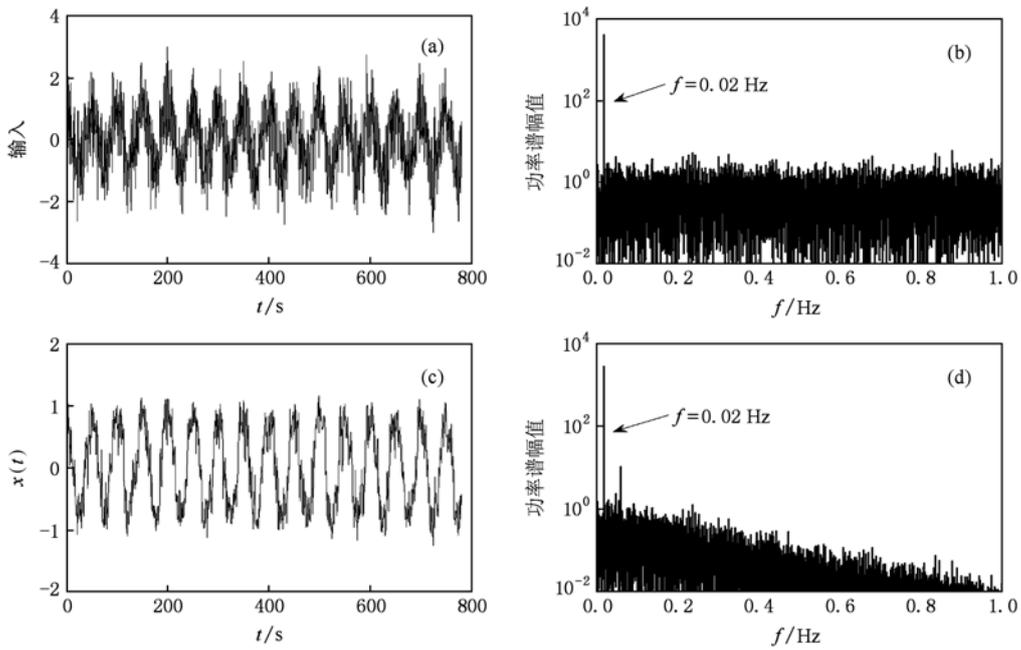


图4 驱动信号为正弦信号 (a)输入带噪正弦信号;(b)输入信号频谱;(c)单稳系统输出信号;(d)输出信号频谱

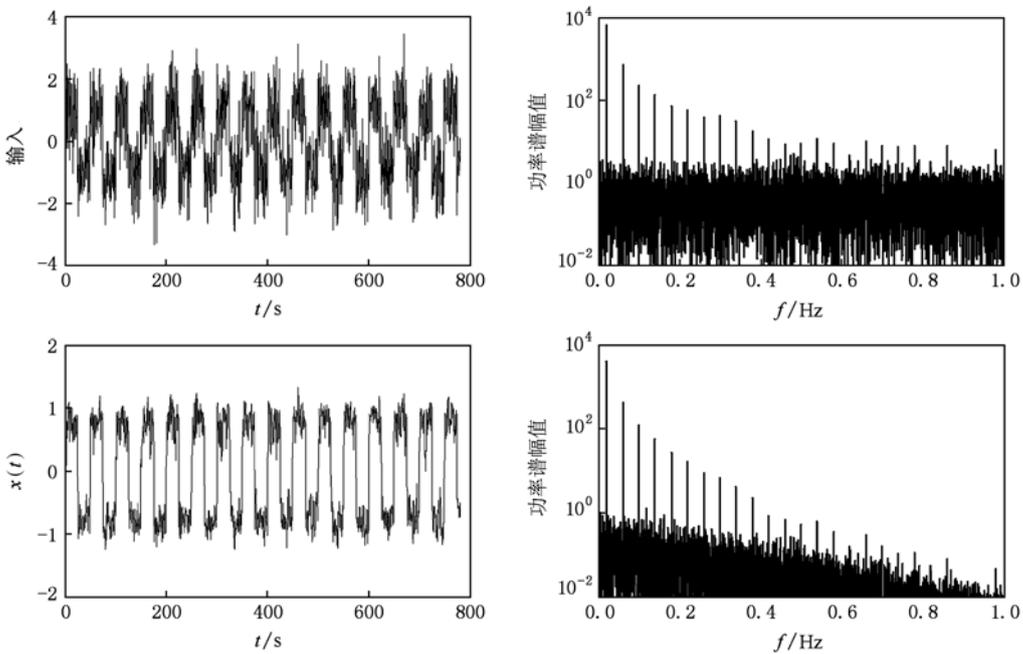


图5 驱动信号为矩形脉冲信号 (a)输入带噪矩形脉冲信号;(b)输入信号频谱;(c)单稳系统输出信号;(d)输出信号频谱

统输出的如图4(c)所示信号波形得到明显改善,噪声尤其是较高频率噪声得到一定抑制;对应图5(a), (c)可以看到单稳系统对矩形脉冲带噪信号也有很好的改善作用,提示对数字通信有潜在应用价值。

与传统双稳随机共振输出功率谱洛伦兹分布特性^[25]类似,单稳系统输出的功率谱也存在噪声谱能量向低频区集中的洛伦兹分布特性,由图4(d)和图5(d)可以清楚地看到这一特征。

5. 结 论

本文对一种单稳随机共振的信噪比增益进行了数值研究,发现在满足一定的参数条件下,其信噪比增益呈现随机共振特性,最重要的是信噪比增益曲线在局部区域大于1.通过调节单稳随机共振

系统参数可以改变信噪比增益.本文结果拓展了这类单稳的已有研究范围,目前给出的是第一阶段研究结果,后续研究正在进行并已获得部分有益的结果,将陆续另文阐述.基于该单稳系统局部信噪比增益大于1的特性,说明在一定条件下对信噪比有改善作用,预示其在信号检测与处理以及通信领域有着潜在的应用价值.

- [1] Stocks N G, Stein N D, McClintock P V E 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L385
- [2] Vilar J M G, Rubí J M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2863
- [3] Lindner J F, Breen B J, Wills M E, Bulsara A R, Ditto W L 2001 *Phys. Rev. E* **63** 051107
- [4] Grigorenko A N, Nikitin S I, Roschepkin G V 1997 *Phys. Rev. E* **56** R4907
- [5] Vilar J M G, Rubí J M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2882
- [6] Pérez - Madrid A, Rubí J M 1995 *Phys. Rev. E* **51** 4159
- [7] Raikher Y L, Stepanov V I 1995 *Phys. Rev. B* **52** 3493
- [8] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 13861
- [9] Guo F, Luo X D, Li S F, Zhou Y R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080504
- [10] Agudov N V, Krichigin A V 2008 *Radiophysics and Quantum Electronics* **51** 812
- [11] Agudov N V, Krichigin A V, Valenti D, Spagnolo B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051123
- [12] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [13] Evstigneev M, Reimann P, Pankov V, Prince R H 2004 *Europhys. Lett.* **65** 7
- [14] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [15] Jung P, Hanggi P 1991 *Phys. Rev. A* **44** 8032
- [16] Evstigneev M, Pankov V, Prince R H 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 2595
- [17] Mitaim S, Kosko B 1998 *Proceedings of the IEEE* **86** 2152
- [18] Wang Y G, Wu L N 2009 *Acta Electronica Sinica* **37** 2273 (in Chinese) [王友国、吴乐南 2009 电子学报 **37** 2273]
- [19] Gingl Z, Vajtai R, Kiss L B 2000 *Chaos, Solitons & Fractals* **11** 1929
- [20] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [21] Bulsara AR, Gammaitoni L 1996 *Phys. Tod.* **49** 39
- [22] Xu B, Duan F, Bao R, Li J 2002 *Chaos, Solitons & Fractals* **13** 633
- [23] Leng Y G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5196 (in Chinese) [冷永刚 2009 物理学报 **58** 5196]
- [24] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [25] Leng Y G, Wang T Y, Qin X D, Li R X, Guo Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、秦旭达、李瑞欣、郭 焱 2004 物理学报 **53** 717]

Numerical research of signal-to-noise ratio gain on a monostable stochastic resonance*

Wan Pin^{1)†} Zhan Yi-Ju²⁾ Li Xue-Cong¹⁾ Wang Yong-Hua¹⁾

1) (*Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China*)

2) (*School of Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 19 November 2010; revised manuscript received 13 December 2010)

Abstract

We report a stochastic resonance with the signal-to-noise ratio gain in a monostable system, by the fourth-order Runge-Kutta method, and on some occasions the signal-to-noise ratio gain exceeds 1. Tuning the parameters in the monostable stochastic resonance system can change the signal-to-noise ratio gain. This research result is the latest development of the monostable stochastic resonance, and has potential applications in the signal detection, processing and communications.

Keywords: monostable stochastic resonance, signal-to-noise ratio gain, numerical analysis, nonlinearity

PACS: 05.40.-a, 02.60.-x, 06.30.Ka

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60871025).

† E-mail: wanpin3@sohu.com