

# 基于 $TE_{10}$ 矩形波导的异向介质有效本构参数提取算法\*

龚建强<sup>†</sup> 梁昌洪

(西安电子科技大学天线与微波技术国防科技重点实验室, 西安 710071)

(2010年5月24日收到; 2010年7月11日收到修改稿)

提出了一种基于  $TE_{10}$  矩形波导的异向介质有效本构参数提取算法, 利用该算法提取了对称多元胞铁氧体和金属线阵复合型异向介质的有效介电常数  $\epsilon$  和有效磁导率  $\mu$ . 文中着重探讨了多元胞异向介质传播常数  $\beta$  实部的分枝选取问题, 借鉴了测量理论中测量值和理论真值之间的关系, 将单元胞的  $\beta$  提取值作为多元胞  $\beta$  的测量值, 进而确定多元胞  $\beta$  的真实值; 由于在多元胞异向介质各元胞之间存在耦合效应, 使电磁波主要以周期性 Bloch 波的形式存在, 而在单元胞中 Bloch 波常可忽略, 因此单元胞有效本构参数提取值往往不能定义为多元胞情形下的有效本构参数, 然而单元胞的  $\beta$  值通常易于提取, 这可作为提取多元胞  $\beta$  值的第一步; 强调了有效本构参数具有物理意义的前提是周期性异向介质结构中的高次 Bloch 波模较主 Bloch 波模具有更高的衰减常数, 此时随着元胞数目的增加, 异向介质结构中更趋于单模传输, 使得提取出的  $\epsilon$  和  $\mu$  也更趋于稳定和收敛.

**关键词:**  $TE_{10}$  矩形波导, 异向介质, 有效本构参数提取, 铁氧体和金属线阵异向介质

**PACS:** 92.60.Ta

## 1. 引言

异向介质 (metamaterial, MTM) 大多采用周期性结构进行合成<sup>[1-4]</sup>, 因此能够分析计算周期性结构特性的全波电磁仿真工具及算法便可用于设计特定的 MTM 结构<sup>[5-7]</sup>. 然而当利用 MTM 制作实际的微波电路时, 其中局部的电磁场分布细节有时并非主要的, 而其对外呈现的宏观电磁特性可通过有效本构参数 (effective constitutive parameters, ECPs) 进行刻画则往往足以应用于微波工程设计<sup>[8]</sup>. 人工 MTM 本质上是非均匀结构, 然而媒质均匀理论指出: 当入射波波长远远大于非均匀结构的组件尺寸及组件之间的间隔时, 该结构可用连续均匀的材料来等效, 并且非均匀结构及其等效均匀材料 (effective homogeneous material, EHM) 在相同的电磁辐射照射下将呈现一致的散射特性<sup>[9]</sup>. 因此, 当 MTM 元胞尺寸以及元胞间隔同入射波波长相比很小时, 便可以 EHM 进行等效, 进而能够利用 ECPs 即介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  来描述其宏观的电磁

特性.

目前主要有两种提取 MTM 的 ECPs 方法, 一是电磁场平均化方法<sup>[10]</sup>, 即首先通过全波电磁仿真或者解析计算求解出 MTM 中局部的电磁场分布, 然后通过电磁场均匀化过程将局部的电磁场分布转化为由本构方程支配的宏观场矢量关系, 从而求解出  $\epsilon$  和  $\mu$ , 然而该方法无法应用于实验测量的情况. 二是基于仿真或测量获取的反射和传输参数来提取 MTM 的 ECPs: 如首先根据已获取的散射参数计算出 EHM 的波阻抗  $z$  和折射率  $n$ , 随后再确定  $\epsilon = n/z$  和  $\mu = nz$ , 但是该方法并未深入探讨 EHM 的有效边界的定义、折射率实部分枝取值以及仿真或测量噪声对算法稳定性影响等问题<sup>[11]</sup>; 2003 年, Ziolkowski 等人改进了 Nicolson-Ross-Weir 方法提出了一种近似的 MTM 的 ECPs 提取方法, 该方法可定性判断出 MTM 的工作频段, 但计算精度相对较低<sup>[12]</sup>; 2004 年, Chen 等人在文献 [11] 的基础上进一步探讨了 EHM 的有效边界问题、折射率实部分枝取值问题以及测量、仿真噪声对算法稳定性的影响, 然而该方法仅适用于由 TEM 波照射 MTM 的情

\* 中央高校基本科研业务费专项基金 (批准号: JY10000902018) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jqgong@xidian.edu.cn

况<sup>[13]</sup>;2005年,Smith等人提出了非对称元胞MTM的ECPs提取方法,指出了折射率 $n$ 始终能够唯一确定而不论其元胞尺寸与其工作波长的比值大小,但波阻抗随着入射波方向的不同具有不同的定义,这也使得提取出的ECPs不具备唯一性<sup>[9]</sup>;同年,Mao等人提出了一种新型的一维微带传输线型MTM及其ECPs提取方法,但应用该方法提取SRR/Wire三维空间型MTM的ECPs时,仍会得到不稳定的提取结果<sup>[14]</sup>.此外,以上这些方法主要都是针对SRR/Wire MTM单元胞结构进行研究的,并直接将单元胞ECPs的提取值直接定义为多元胞的ECPs,事实上这种继承是须满足MTM单模传输条件的<sup>[15]</sup>.

本文在前述工作的基础上提出了一种基于TE<sub>10</sub>矩形波导的MTM ECPs提取算法,该算法适用于将对称多元胞MTM块状样品填充于TE<sub>10</sub>矩形波导时的情况,通过全波仿真或者实验测量获取的传输和反射参数,能够提取出有限大小样品EHM的 $\epsilon$ 和 $\mu$ .由于多元胞情形下 $\beta$ 实部的整数分枝取值较难判定,因此作者借鉴了测量理论中理论真值同测量值的相互关系概念,将较易提取出的单元胞 $\beta$ 值作为多元胞 $\beta$ 的测量值,反过来确定多元胞 $\beta$ 的真实值.此外,本文还分析了MTM谐振带产生的原因,指出这是由于MTM固有空间色散和小的传输损耗造成的,并从能耗角度给出了ECPs提取值有效性的判定关系.最后应用本文方法提取了铁氧体和金属线阵复合型异向介质(ferrite/wire metamaterial, FWM)的ECPs,从提取结果中可清楚地观察到随着元胞数目的增多ECPs趋于收敛的现象,并对这一现象产生的原因给出了详尽分析.

## 2. 算法描述

传输线中填充MTM结构的模型如图1所示,由周期性对称元胞构成的MTM加载于与参考线同类型的传输线中,参考线由其特性阻抗 $Z^{\text{TL}}$ 及传播常数 $\beta^{\text{TL}}$ 定义.入射波经由参考线对填充MTM的传输线段施加激励.当入射波波长远远大于元胞尺寸及元胞间隔时,由离散元胞构成的MTM可等效为EHM,其最左侧的有效边界位于第一个元胞的左侧边界,而最右侧的有效边界则与最后一个元胞的右侧重合<sup>[13]</sup>.假定电磁波传播的时谐因子为 $e^{j\omega t}$ , $\omega$ 为激励信号工作频率,则与图1相对应的信号流程图如图2

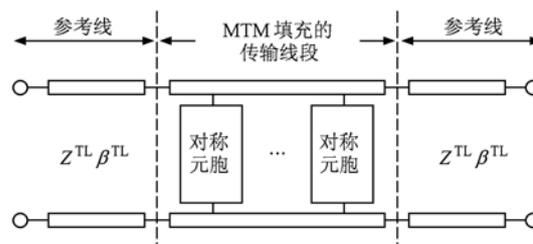


图1 传输线中填充周期性MTM结构模型图

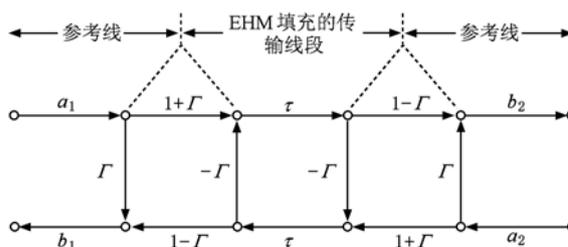


图2 与图1对应的信号流程图

所示,此时MTM填充的传输线段等效为EHM填充的传输线段,其中 $\Gamma$ 表示参考线与被填充传输线段之间的反射系数,而 $\tau$ 表示其传输因子,即

$$\Gamma = \frac{Z^{\text{M}} - Z^{\text{TL}}}{Z^{\text{M}} + Z^{\text{TL}}}, \quad (1)$$

$$\tau = e^{-j\beta d}, \quad (2)$$

其中 $Z^{\text{M}}$ 和 $\beta$ 分别为被填充传输线段的特性阻抗和传播常数,当参考线中主模为TEM模时, $Z^{\text{M}} = z \cdot Z_a^{\text{TL}}$ , $z$ 为EHM的归一化波阻抗, $Z_a^{\text{TL}}$ 为参考线填充空气时的特性阻抗, $\beta = nk_0$ , $n$ 为EHM的折射率, $k_0$ 为自由空间波数;而当参考线中主模为非TEM时, $Z^{\text{M}}$ 为 $z$ 和 $n$ 的函数, $\beta$ 为 $n$ 的函数,具体的函数关系由参考线的传输线类型确定,如本文中选定的参考线为TE<sub>10</sub>矩形波导,其 $Z^{\text{M}}$ 和 $\beta$ 将分别由(10)和(11)式定义.此外, $d$ 为有效均匀结构长度,其值等于元胞长度 $p$ 乘以元胞个数 $N$ .根据信号流程图可以计算出以 $\Gamma$ 和 $\tau$ 表示的传输和反射参数

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{\Gamma(1 - \tau^2)}{1 - \Gamma^2 \tau^2}, \quad (3)$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{\tau(1 - \Gamma^2)}{1 - \Gamma^2 \tau^2}. \quad (4)$$

联立(1)–(4)可求解出

$$z_{\text{T}} = \pm \sqrt{\frac{(1 + S_{11})^2 - S_{21}^2}{(1 - S_{11})^2 - S_{21}^2}}, \quad (5)$$

$$e^{-j\beta d} = \frac{S_{21}}{1 - S_{11} \frac{z_T - 1}{z_T + 1}}, \quad (6)$$

其中  $z_T = Z^M/Z^{TL}$ , 为被填充传输线段的归一化特性阻抗. 令  $z = z' + jz''$  和  $n = n' + jn''$ , 元胞的无源特性要求

$$z'_T \geq 0 \text{ 及 } z' \geq 0, \quad (7)$$

$$n'' \leq 0. \quad (8)$$

上面讨论的是参考线为任意传输线类型的情况, 具体而言, 当周期性 MTM 结构填充于  $TE_{10}$  矩形波导中时, 其 MTM EHM 模型如图 3 所示; EHM 两端是空气填充的  $TE_{10}$  波导段, 要求入射波频率限于  $TE_{10}$  模截止频率  $f_{c01}$  和  $TE_{20}$  模截止频率  $f_{c02}$  之间, 这使得空气填充的  $TE_{10}$  波导段能有效的移除高次模的影响, 同时能保证填充材料仅由  $TE_{10}$  主模式激励. 选取的参考面位于 EHM 同空气介质的交界处. 此时  $Z^{TL}$  为空气填充的  $TE_{10}$  波导的特性阻抗

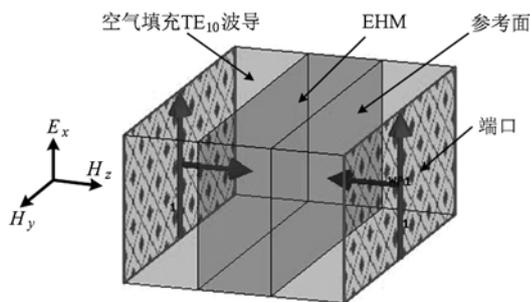


图3  $TE_{10}$  波导中填充 EHM 的模型

$$Z^{TL} = \frac{b}{a} \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}, \quad (9)$$

$a, b$  分别为矩形波导的宽度和高度,  $\eta_0$  为空气波阻抗,  $\lambda_0$  为自由空间波长,  $Z^M$  为 EHM 填充波导段的特性阻抗

$$Z^M = \frac{b}{a} \frac{\eta_0 \cdot z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2an}\right)^2}}. \quad (10)$$

$\beta$  为填充 EHM 波导段的主模传播常数, 其定义如下:

$$\beta = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2an}\right)^2}. \quad (11)$$

观察(5)式, 当  $S_{21}^2 \rightarrow 1$  且  $S_{11} \rightarrow 0$  时, (5)式中分母趋于零, 此时若直接利用(7)式来确定  $z_T$  的“ $\pm$ ”

符号取值可能会导致符号发生反转, 使得算法失效. 为此可首先选取一个门限值  $\delta_z, \delta_z$  为正数, 若  $|z'_T| \geq \delta_z$ , 则应用(7)式来确定  $z_T$  的符号取值; 若  $|z'_T| < \delta_z$ , 由(6)式知  $z_T$  的符号取值应使  $|e^{-j\beta d}| \leq 1$ , 即满足无源媒质因果率的要求. 一旦确定了  $z_T$  值, 再根据(6)式可将  $\beta$  表示为

$$\beta = \frac{1}{-jNp} \ln(e^{-j\beta d}) \pm \frac{2m\pi}{Np}. \quad (12)$$

可见各频点处的  $\beta$  实部均存在分枝选择问题,  $m$  为其整数分枝. 根据(11)式,  $n$  可表示为

$$n = \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\beta\right)^2} = \pm (n' + jn''). \quad (13)$$

由(9)和(10)式可得

$$z = z_T \frac{\sqrt{1 - (\lambda_0/2an)^2}}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} = (z' + jz''). \quad (14)$$

由于

$$\mu = \mu' - j\mu'' = nz, \quad (15)$$

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = n/z, \quad (16)$$

于是可得

$$\mu'' = -n'z'' - n''z', \quad (17)$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{|z|^2} (n'z'' - n''z'). \quad (18)$$

无源媒质因果律要求  $\mu'' \geq 0$  和  $\varepsilon'' \geq 0$ , 于是

$$|n'z''| \leq |n''z'|. \quad (19)$$

将(13)和(14)式代入(19)式中可以确定  $m$  的取值范围. 然而以往研究表明异向介质通常存在谐振带, 即存在  $\varepsilon''\mu'' < 0$  的频段, 此时(19)式将不再成立, 这似乎是反物理直觉的结论, 事实上这是周期性谐振 MTM ECPs 的一个特有现象<sup>[16]</sup>, 由(17)和(18)式可得

$$\varepsilon''\mu'' = \frac{1}{|z|^2} [(n'z'')^2 - (n''z')^2]. \quad (20)$$

尚未发现任何物理定律要求(20)式中等号右侧的值须大于零. 文献[16]指出小的  $|n''|$  值不仅可表明 MTM 具有良好的传输特性, 同时也是导致谐振带产生的原因. 当仅由电场或磁场分别作用于电介质或磁介质时, 要求  $\xi'' > 0$  ( $\xi$  表  $\varepsilon$  或  $\mu$ ) 是合理的, 因为能耗  $W$  正比于  $\xi''$ ; 然而 MTM 通常是由电场和磁场同时作用的, 此时能耗  $W$  可表示为

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu_0}{|\varepsilon|} \cdot [|\varepsilon''| |\mu| + |\mu''| |\varepsilon|] |H|^2 \omega d\omega, \quad (21)$$

式中  $\mu_0$  为真空磁导率,  $H$  为磁场强度. 可见由  $W > 0$  仅要求

$$[\varepsilon'' |\mu| + \mu'' |\varepsilon|] > 0, \quad (22)$$

而无须  $\varepsilon''$  和  $\mu''$  同时为正, 因此(22)式可作为对提取出 MTM 的 ECPs 是否合理的判定依据之一<sup>[17]</sup>.

谐振带的存在给  $\beta$  值的计算带来了困难, 为此我们可首先提取出 MTM 单元胞的  $\beta$  值. 对于单元胞, 总是能通过恰当的选择远离谐振带的起始频点, 使  $m$  的取值范围中只包含一个解, 此即为正确的  $\beta$  实部分支; 而后, 考虑到  $\beta$  的连续性, 我们可采用文献[13]中的递推方法去计算初始频点之后各频点的  $\beta$  实部分支, 从而最终提取出单元胞的  $\beta$ . 然后将所得出的单元胞  $\beta$  作为多元胞  $\beta$  的测量值, 误差源于多元胞 MTM 各元胞之间存在的耦合效应: 即当  $N > 1$  时, 合理选择(12)式中的  $m$  取值, 使多元胞各频点处的  $\beta$  实部尽量接近单元胞相应频点处的  $\beta$  实部, 从而最终确定出多元胞 MTM 的  $\beta$ . 然而当元胞数目越大时, ECPs 提取值往往越趋于收敛和稳定, 比如  $N = 5$  时, 可将单元胞的  $\beta$  作为其  $\beta$  的收敛值, 而当  $N$  进一步增大时, (12)式中的实部分支项在  $m$  取不同值时会比较接近, 同时考虑到多元胞之间的耦合效应引起的误差, 此时若再用单元胞  $\beta$  作为多元胞  $\beta$  的测量值, 会导致在个别频点处无法计算出正确的  $m$ , 此时更加合理的选择是将已计算出的  $N = 5$  时的  $\beta$  作为  $N > 5$  时  $\beta$  的测量值.

$\beta$  确定后, 可采用(13)式来计算  $n$ , 但  $n$  存在“ $\pm$ ”符号选择问题. 将计算出的  $n$  代入(11)式中, 可以反推出  $\beta$ , 正确的  $n$  仍应使得  $|e^{-i\beta d}| \leq 1$ , 至此  $n$  也得以确定. 随后将计算出的  $z_T$  和  $n$  代入(14)式可求解出  $z$ , 最终再通过(15)和(16)式便可以提取出 MTM 的 ECPs.

### 3. FWM 的 ECPs 提取

FWM 的 HFSS 仿真模型如图 4 所示, 模型物理参数采用与文献[18]中相同的参数设置, 激励波导端口位于矩形波导纵向的两端, 而相位参考面位于铁氧体片纵向的两端面上. 作者分别提取了单元胞、5 元胞、10 元胞和 15 元胞的 FWM 样品的  $\beta, z_T, n, z, \varepsilon$  和  $\mu$ , 结果如图 5 所示. 图 5(a) 示出了  $\beta$  的提取值, 其中 5 元胞的  $\beta$  是以单元胞  $\beta$  作为收敛值的,

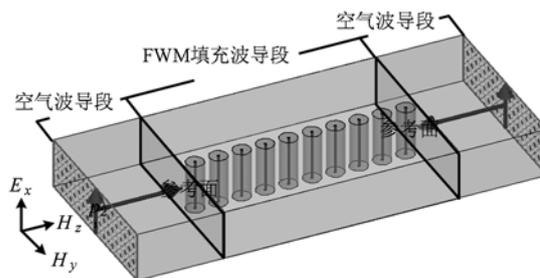


图 4 FWM 填充于  $TE_{10}$  矩形波导中

而 10 元胞和 15 元胞的  $\beta$  是以 5 元胞  $\beta$  作为测量值的, 提取结果表明 5 元胞  $\beta$  无论实部和虚部与单元胞  $\beta$  提取值最为接近, 且随着元胞数目的增大,  $\beta$  提取值趋于稳定和收敛. 文献[15]指出周期性 MTM 结构可提取出 ECPs 的前提是 MTM 结构中的主 Bloch 波模占据主导地位 (理想情况是单模传输), 而高次 Bloch 波模在传播过程中衰减程度须高于主 Bloch 波模, 即高次 Bloch 波模传播常数的虚部绝对值高于主 Bloch 波模传播常数的虚部绝对值, 也因此单元胞 ECPs 的提取结果一般不能作为多元胞情形下的 ECPs, 因为在单元胞中并不存在元胞间的耦合效应, 所以在本文中, 作者选择单元胞  $\beta$  值作为 5 元胞  $\beta$  的近似值, 而选用 5 元胞  $\beta$  值作为更多元胞数情形下的  $\beta$  近似值. 对于 FWM, 元胞数目越多,  $\beta$  提取值愈趋于稳定和收敛, 这正是因为高次 Bloch 波模随传播距离的增加而得到了更为有效的衰减, 使 FWM 填充波导管愈接近单模传输的条件. 图 5 (b) 显示的是  $z_T$  的提取值, 同样随着元胞数目的增大, 伴随着高次 Bloch 波模的有效衰减, 使得提取出的  $z_T$  趋于收敛. 折射率  $n$  和归一化波阻抗  $z$  如图 5 (c) 和图 5 (d) 所示, 5 元胞、10 元胞和 15 元胞的  $n$  和  $z$  提取结果接近重合, 且满足(7)式的要求, 但是对于单元胞而言, 存在  $z' < 0$  的频段, 这显然不符合无源媒质因果律的要求, 因此在本文中单元胞提取结果不具备真实的材料特性, 仅仅是将单元胞的  $\beta$  提取值作为多元胞  $\beta$  的测量值. 最终  $\varepsilon$  和  $\mu$  的提取值如图 5 (e) 和图 5 (f) 所示, 可见单元胞  $\varepsilon$  和  $\mu$  的提取值与多元胞  $\varepsilon$  和  $\mu$  的提取值具有显著差异, 而 5 元胞、10 元胞和 15 元胞情形下的  $\varepsilon$  和  $\mu$  的提取值比较一致, 且随着元胞数目的增加,  $\varepsilon$  和  $\mu$  的提取结果趋于收敛. 此外,  $\mu$  随频率的变化规律仍然符合典

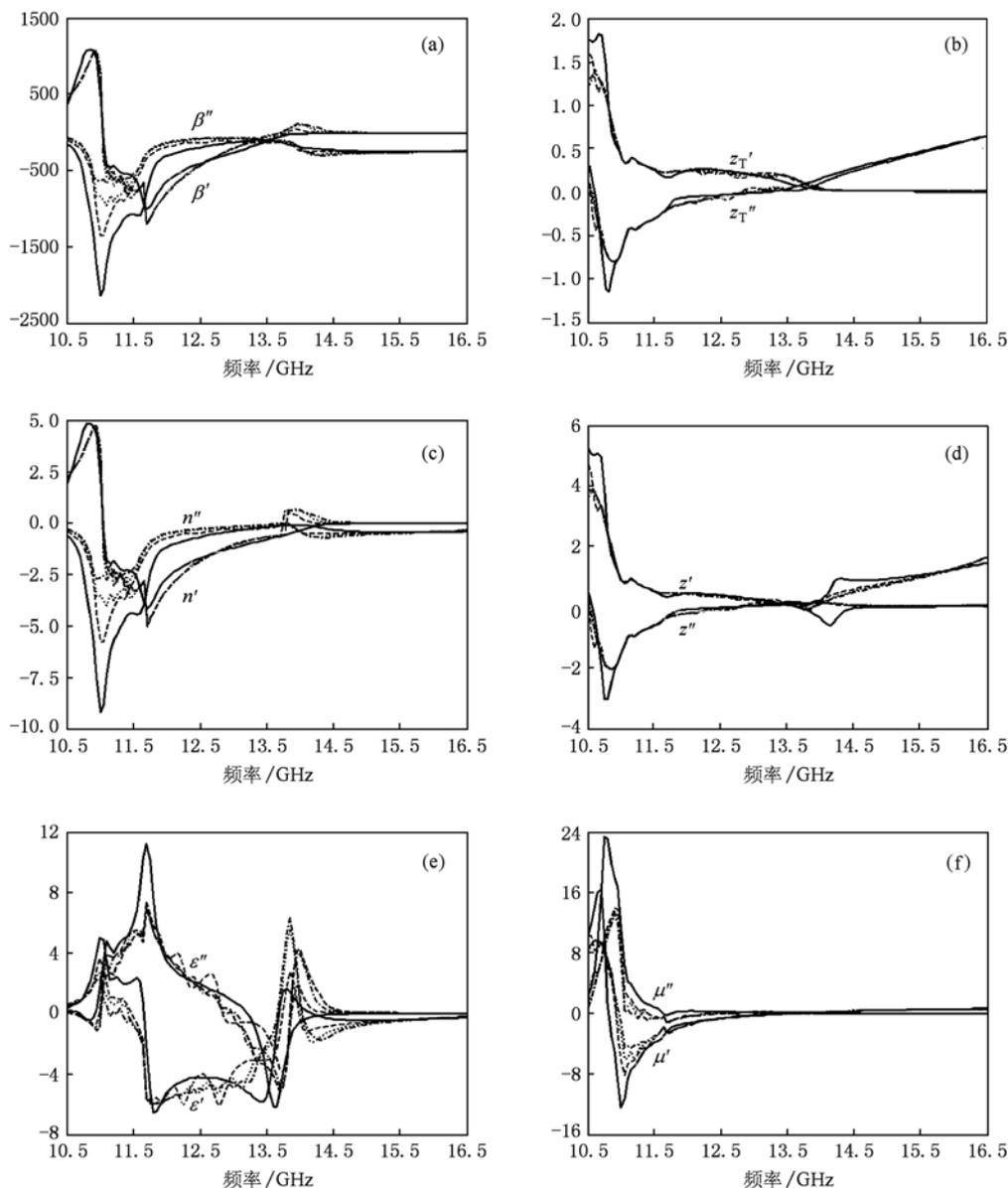


图5 提取出的 FWM 的 (a) 传播常数  $\beta$ 、(b) 归一化特性阻抗  $z_T$ 、(c) 折射率  $n$ 、(d) 波阻抗  $z$ 、(e) 有效介电常数  $\epsilon$ 、(f) 有效磁导率  $\mu$  (—— = 单元胞; - - - - = 5 元胞; ····· = 10 元胞; - · - · = 15 元胞)

型的 Lorentz 色散模型,且在  $\mu' \rightarrow 0$  的频段附近,  $\epsilon'$  存在较强的反谐振现象,这是由于 MTM 在有限空间周期性条件下折射率  $n$  有界引起的,同时  $\mu' \rightarrow 0$  的频点左侧存在  $\epsilon'' < 0$  的谐振带,在此谐振带内  $|n''|$  较小,使得 (20) 式等号右端的值小于零,由此导致谐振带的形成。

为进一步验证 ECPs 提取数值的正确性,作者作出了当  $TE_{10}$  模激励源频率为 13.0 GHz 时,10 元胞 FWM 的电场等值线的位移-相位曲线如图 6 所示,其中黑色线表示电场幅度的最小值所在,其斜

率为负值,表明电磁波在 FWM 中的传播常数  $\beta$  为负值,读出黑色线的斜率可求出  $\beta = -193.9$ ,再根据 (16) 式可计算出  $n' = -1.05$ ,而本文方法获得的提取值为  $n' = -1.08$ ,两种方法计算出的  $n'$  值非常接近,从而证明了折射率提取数值的精确性。

当 15 元胞的 FWM 结构及其 EHM 分别填充于  $TE_{10}$  矩形波导时,两种情形下的散射参数计算结果如图 7 所示,其中 EHM 的材料属性是以提取出的  $\epsilon$  和  $\mu$  来定义的,由图可知只有当传输幅度小于  $-130$  dB 时,即处于噪声级别时,传输参数的幅度和相位

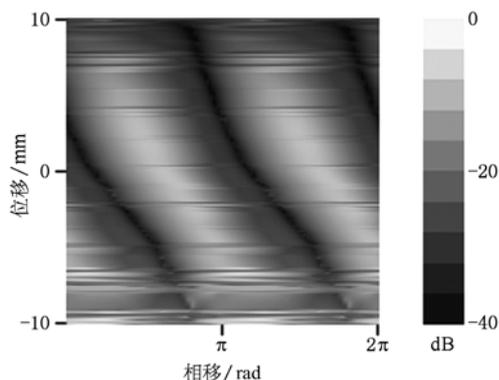


图6 电场等值线的相移-位移曲线

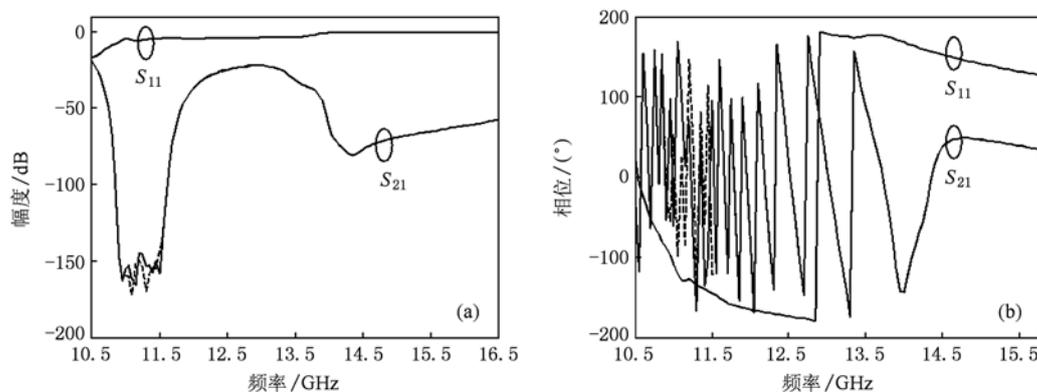


图7 15元胞FWM结构(实线)及其EHM(虚线)的散射参数仿真结果 (a)幅度;(b)相位

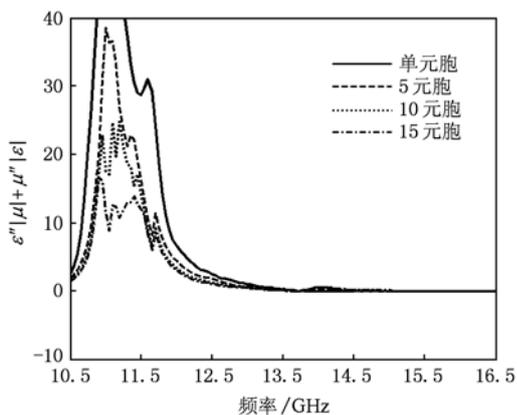


图8  $\epsilon''|\mu| + \mu''|\epsilon|$  随频率的变化关系曲线

#### 4. 结 论

本文提出了一种基于  $TE_{10}$  矩形波导的 MTM ECPs 提取算法,该算法根据填充 MTM 波导段的归一化特性阻抗  $Z_T$ 、传播常数  $\beta$ 、样品的波阻抗  $z$  及

才略有差异,在其他频点处两种情形下的散射参数无论是幅度和相位都非常一致,这说明了非均匀的 FWM 结构与其 EHM 之间存在良好的等效关系.

最后作出(22)式随频率的变化曲线,如图8所示,结果表明对于单元胞而言,在  $z' < 0$  的频段内,(22)式的计算结果略小于零,产生该现象的原因在于本文中的提取方法只考虑了 MTM 中的传播主模式,而在单元胞中存在的高次模式对传输参数的影响往往不能忽略.对于多元胞情形,在所研究的频率范围内(22)式的数值始终为正,因此从能耗的角度而言,提取出的多元胞 FWM 的 ECPs 是符合无源媒质因果律的要求的.

折射率  $n$  之间的相互关系并结合无源媒质因果律,可提取出填充样品的稳定的  $\epsilon$  和  $\mu$ . 算法着重阐述了以较易提取出的单元胞  $\beta$  值作为多元胞  $\beta$  的测量值进而求解出多元胞  $\beta$  正确实部分枝的方法,并指出单元胞 MTM 的 ECPs 往往不能直接定义为多元胞 MTM 的 ECPs,因为元胞之间往往存在着较强的耦合效应,并且多元胞 MTM 能提取出 ECPs 的前提是其中的高次 Bloch 波模的衰减常数要高于主 Bloch 波模的衰减常数,这样当元胞数目增大时,MTM 结构中越趋于单模传输,此时提取出的 ECPs 将随着元胞数目的增加而趋于收敛;分析了 MTM ECPs 存在谐振带的原因,并从能耗的角度给出了判定 ECPs 是否满足无源媒质因果律的条件.应用该算法提取了单元胞、5元胞、10元胞和15元胞的 FWM ECPs,提取结果中显示单元胞 ECPs 不具备真实的材料特性,仅仅是将其  $\beta$  提取值作为多元胞  $\beta$  的测量值,此外随着元胞数目的增多,可清晰的观察到 ECPs 收敛的现象;根据 13GHz 时的 10 元胞 FWM 的电场等值线的位移-相

位曲线求解出的折射率与提取值十分接近,证明了提取方法的精确性;比较了15元胞的FWM及其EHM分别填充于 $TE_{10}$ 矩形波导时的散射参数,两种情形下的散射参数计算结果非常一致,说明

了真实的MTM结构能够以EHM进行替换,并且EHM的材料属性应以提取出的ECPs定义;最后从能耗的角度证明了多元胞FWM ECPs符合无源媒质因果律的要求.

- 
- [1] Shelby R A, Smith D R, Schultz S 2001 *Science* **292** 77
- [2] Meng F Y, Wu Q, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2200 (in Chinese) [孟繁义、吴群、吴健 2006 物理学报 **55** 2200]
- [3] Dai X Y, Wen S C, Xiang Y J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 186
- [4] Wang J F, Qu S B, Xu Z, Zhang J Q, Ma H, Yang Y M, Gu C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3224 (in Chinese) [王甲富、屈绍波、许卓、张介秋、马华、杨一鸣、顾超 2009 物理学报 **58** 3224]
- [5] Lu W B, Cui T J, Yin X X, Qian Z G, Hong W 2005 *IEEE Trans. Micro. Theo. Tech.* **53** 1154
- [6] Ansoft Inc. High Frequency Structure Simulator (Pittsburgh, PA)
- [7] Li D, Sarris C D 2008 *IEEE Trans. Micro. Theo. Tech.* **56** 1928
- [8] Cheng Q, Liu R P, Huang D, Cui T J 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 234105
- [9] Smith D R, Vier D C, Koschny Th, Soukoulis C M 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036617
- [10] Smith D R, Pendry J B 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 391
- [11] Smith D R, Schultz S, Markos P, Soukoulis C M 2002 *Phys. Rev. B* **65** 195104
- [12] Ziolkowski R W 2003 *IEEE Trans. Micro. Theo. Tech.* **51** 1516
- [13] Chen X D, Grzegorzczak T M, Wu B-I, Jr. J P, Kong J A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016608
- [14] Mao S G, Chen S L, Huang C W 2005 *IEEE Trans. Micro. Theo. Tech.* **53** 1515
- [15] Rochstuhl C R, Paul T, Lederer F, Pertsch, T, Zentgraf T, Meyrath T P, Giessen H 2008 *Phys. Rev. B* **77** 035126
- [16] Koschny T, Markos P, Smith D R, Soukoulis C M 2003 *Phys. Rev. E* **68** 065602
- [17] Markos P, Soukoulis C M 2003 *Opt. Express* **11** 649
- [18] Chu Q X, Gong J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2925 (in Chinese) [褚庆昕、龚建强 2008 物理学报 **57** 2925]

# Extraction algorithm for retrieving the effective constitutive parameters of metamaterials based on $TE_{10}$ rectangular waveguide\*

Gong Jian-Qiang<sup>†</sup> Liang Chang-Hong

(National Key Laboratory of Science and Technology on Antennas and Microwaves, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 24 May 2010; revised manuscript received 11 July 2010)

## Abstract

A novel retrieval method of the effective constitutive parameters of metamaterials based on  $TE_{10}$  rectangular waveguide is proposed, which is adopted to extract effective relative permittivity  $\varepsilon$  and permeability  $\mu$  for the composite ferrite and wire array metamaterial in multiple symmetrical unit cell configuration. Much attention has been paid to choose the correct branch of the real part of the propagation constant  $\beta$  for the metamaterial with multiple unit cells, and in terms of the relationship between the measured values and theoretical values in the measurement theory,  $\beta$  values in the case of multiple unit cells are determined by taking the extracted  $\beta$  values for a single unit cell as the measured values for the multiple unit cells case. Owing to the coupling effect between the unit cells of the metamaterial with multiple unit cells, the electromagnetic wave mainly behaves as the periodic Bloch wave, which is usually negligible for a single unit cell, so the extracted effective constitutive parameters for a single unit cell generally can not be assigned as those for the metamaterial with multiple unit cells directly. However,  $\beta$  values for a single unit cell is generally prone to be extracted, which can be the first step to extract the  $\beta$  values in multiple unit cells case. It is pointed out that the extracted effective constitutive parameters can be physically meaningful only if attenuation coefficients of higher Bloch wave modes are larger than that of the fundamental Bloch mode in the periodic metamaterial, and under this condition, higher Bloch wave modes will get further attenuated with increase of the unit cell number, leaving only the fundamental mode propagation, which makes the extracted  $\varepsilon$  and  $\mu$  more stable and convergent.

**Keywords:**  $TE_{10}$  rectangular waveguide, metamaterial, extraction of effective constitutive parameters, ferrite and wire array metamaterial

**PACS:** 92.60.Ta

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. JY10000902018).

<sup>†</sup> E-mail: jqgong@xidian.edu.cn