

V 形三能级原子的辐射压力和激光冷却*

张琴^{1)†} 金康²⁾ 唐远河¹⁾ 屈光辉¹⁾

1) (西安理工大学应用物理系, 西安 710054)

2) (西北大学物理系, 西安 710069)

(2009年12月28日收到; 2010年8月16日收到修改稿)

研究了压缩真空中 V 形三能级原子在单色行波场中的辐射压力和激光冷却. 从系统的哈密顿量出发, 利用玻恩-马尔科夫近似, 推导出了原子的光学布洛赫方程. 利用绝热近似, 给出了平均辐射压力的表达式. 通过量子回归定理和爱因斯坦关系, 给出了系统所达到的平衡温度的表达式. 讨论了量子相干强度、平均光子数和拉比频率对原子的自发辐射压力和冷却的最终温度的影响. 结果表明: 低于多普勒极限的温度可以获得.

关键词: 压缩真空, 自发辐射, 量子干涉

PACS: 32. 80. Qk, 37. 10. De, 37. 10. Vz, 42. 50. - p

1. 引言

近年来, 压缩光场与原子相互作用的研究引起了理论和实验工作者的广泛关注. 其中原子与光场相互作用取得的进展之一便是中性原子的激光冷却和玻色爱因斯坦凝聚的实现^[1].

自从 1976 年 Hansch 和 Schawlow^[2] 以及 Wineland 和 Dehmelt^[3] 各自独立地提出了激光冷却气体原子的思想以来, 激光冷却与捕陷等问题一直是人们研究的一个热点^[4-12], 且已经建立了多普勒冷却、偏振梯度冷却、速度选择相干布居俘获、拉曼冷却等激光冷却机理. 在对激光冷却的研究过程当中, 通常采用简单的二能级原子模型, 二能级原子冷却的多普勒极限是由原子的自然线宽决定的, 实际冷却原子的实验都是建立在多能级原子基础上的. 多能级原子和光场的相互作用与二能级原子和辐射场的相互作用有很大的不同. 对于多能级原子系统来讲, 扩展的能级结构提供了更多的跃迁通道. 正是基于这点, 一般情况下, 多能级原子可被冷却至比二能级原子更低的温度. 为此, 人们对三能级原子与光场相互作用的动力学行为, 激光冷却与捕陷等问题进行了大量的理论与实验研究. Kosachiov 等讨论了真空中 Λ 形三能级原子在双色驻波场中的激光冷却^[13]. Roijackers 等研究了真

空中梯形三能级原子在双色行波场中和双色驻波场中的自发辐射力和冷却温度^[14]. Tan 等对真空中梯形三能级原子在单色激光场中的激光冷却作了详细的理论研究^[15]. Yin 等对高阶贝塞尔光束中三能级原子的辐射压力作了研究, 进一步讨论了高阶贝塞尔光束中方位角对多普勒冷却极限的影响^[16].

一般情况下, 人们都研究真空中不同能级原子的激光冷却现象, 很少研究压缩真空场的激光冷却现象. 压缩真空场不仅反映了压缩态的本质属性, 而且在物质的相互作用中有着重要的作用. 压缩真空中除了具有与真空中相同的控制参量(失谐与拉比频率)外, 量子干涉效应以及压缩参量也将影响原子的辐射压力和冷却温度. Zoller 等讨论过压缩真空中二能级离子在驻波场的作用下的激光冷却^[17]. 何林生等研究了行波和驻波构成的组合光场对压缩真空中二能级原子的冷却作用^[18]. 本文将研究 V 形三能级原子在压缩真空中的激光冷却现象. 通过图示法详细讨论了原子的自发辐射压力和原子的冷却温度与量子相干强度、拉比频率、平均光子数等参数的关系.

2. 模型和公式

考虑一个运动的 V 形三能级原子(图 1), 其本

* 国家自然科学基金(批准号:10874138)资助的课题.

† E-mail: zhangqin@xaut.edu.cn

征态势分别为 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, 相应的能量本征值为 E_1, E_2, E_3 , 且 $E_3 < E_1, E_2$, 三能级原子处在宽带压缩真空中与两束同频激光场耦合, 两束激光场的频率都为 ω_a , 波矢值为 k_a , 此光场分别与原子的 $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ 和 $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ 状态之间的跃迁耦合. 态 $|1\rangle$ 和态 $|3\rangle$ 以及态 $|2\rangle$ 和态 $|3\rangle$ 之间的跃迁频率分别为 ω_{13} 和 ω_{23} , 且 $\hbar\omega_{ij} = E_i - E_j$.

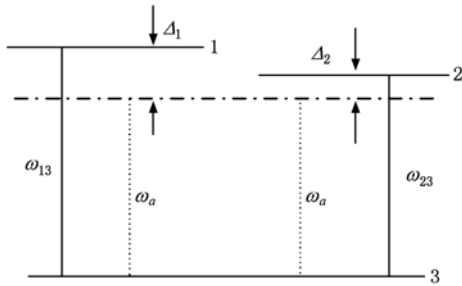


图1 V形三能级原子结构图

假设原子的电偶极矩为 μ_{ij} , 且 $\mu_{12} = 0$, 即态 $|1\rangle$ 和态 $|2\rangle$ 之间的直接跃迁是电偶极禁戒的. 在电偶极近似和旋波近似条件下, 描述此激光场与 V 形三能级原子相互作用系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + V_1 + V_R, \\
 H_0 &= \frac{P^2}{2M} + \sum_{i=1}^3 \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| + \hbar\omega_l (b_l^\dagger b_l + \frac{1}{2}), \\
 V_1 &= -\frac{1}{2} i\hbar\Omega_a \{ |1\rangle\langle 3| e^{-i(\omega_a t - k_a R)} \\
 &\quad - |3\rangle\langle 1| e^{i(\omega_a t - k_a R)} \} \\
 &\quad - \frac{1}{2} i\hbar\Omega_b \{ |2\rangle\langle 3| e^{-i(\omega_a t - k_a R)} \\
 &\quad - |3\rangle\langle 2| e^{i(\omega_a t - k_a R)} \}, \\
 V_R &= -\frac{1}{2} i\hbar \sum (\Omega_l^{(1)} b_l |1\rangle\langle 3| e^{-i(\omega_l t - k_l R)} \\
 &\quad - \Omega_l^{(1)*} b_l^\dagger |3\rangle\langle 1| e^{i(\omega_l t - k_l R)}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} i\hbar \sum (\Omega_l^{(2)} b_l |2\rangle\langle 3| e^{-i(\omega_l t - k_l R)} \\
 &\quad - \Omega_l^{(2)*} b_l^\dagger |3\rangle\langle 2| e^{i(\omega_l t - k_l R)}), \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中 P 和 R 分别为原子的动量算符和位置算符. H_0 为三能级原子与库场的哈密顿量的和. V_1 代表三能级原子与单模光场的相互作用哈密顿量, 而 V_R 则表示三能级原子与库场的相互作用能. 上式中的 M 表示原子的质量. $\Omega_a = \mu_{13} \cdot E_a / \hbar, \Omega_b = \mu_{23} \cdot E_b / \hbar$ 是由光场强度 E_a, E_b 和原子的电偶极矩所决定的两束光的拉比频率. b_l 和 b_l^\dagger 是辐射场第 l 场模的湮没

和产生算符. $\Omega_l^{(1)} = (\mu_{13} \hat{e}_l) \left(\frac{2\omega_l}{\hbar\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$ 以及 $\Omega_l^{(2)} = (\mu_{23} \hat{e}_l) \left(\frac{2\omega_l}{\hbar\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$ 为库场第 l 场模和原子的单光子耦合常数, 即单光子拉比频率. \hat{e}_l 是第 l 模光子的极化矢量.

在海森伯绘景当中, 位置算符 R 和动量算符 P 的运动方程分别满足:

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= \frac{1}{i\hbar} [R, H] = \frac{P}{M}, \\
 \dot{P} &= \frac{1}{i\hbar} [P, H] = -\nabla_R V_1(R, t) - \nabla_R V_R(R, t). \quad (2)
 \end{aligned}$$

根据上述表达式, 辐射压力可由动量算符的运动方程给出

$$\begin{aligned}
 F &= \dot{P} = \frac{1}{i\hbar} [P, H] \\
 &= -\nabla_R V_1(R, t) - \nabla_R V_R(R, t). \quad (3)
 \end{aligned}$$

因原子处在宽带压缩真空中, 因此所有与原子耦合的场模全部被压缩, 在马尔科夫近似下, 宽带压缩真空的算符具有下面的关联^[19,20]:

$$\begin{aligned}
 \langle b_l(t) b_m^\dagger(t') \rangle &= (N(\omega_l) + 1) \delta(t - t'), \quad \omega_l = \omega_m, \\
 \langle b_l^\dagger(t) b_m(t') \rangle &= N(\omega_l) \delta(t - t'), \quad \omega_l = \omega_m, \\
 \langle b_l(t) b_m(t') \rangle &= M(\omega_l) \delta(t - t'), \quad \omega_l + \omega_m = 2\omega_s, \\
 \langle b_l(t)^\dagger b_m^\dagger(t') \rangle &= M^*(\omega_l) \delta(t - t'), \quad \omega_l + \omega_m = 2\omega_s, \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中 ω_s 是压缩真空的载波频率. 而 N 和 M 为压缩参量, N 表示压缩真空的平均光子数, M 表示压缩真空的压缩强度. 由于压缩真空为宽带的, 因而 N 和 M 都与 ω_s 无关且遵循表达式

$$N^2(\omega_l) \leq |M(\omega_l)|^2 \leq N(\omega_l)(N(\omega_l) + 1), \quad (5)$$

其中 $M(\omega_l) = M(2\omega_s - \omega_l) = |M(\omega_l)| e^{i\Phi_s}$, 式中 Φ_s 为压缩真空的位相.

将位置算符 R 用它的期望值 r 来代替是合理的, 由于自发辐射的各项同性, 导致 $\langle \nabla_R V_R \rangle = 0$, 可求得平均辐射压力的表达式

$$\begin{aligned}
 f &= \langle F \rangle = \text{Tr}(\rho F) = -\langle \nabla_R V_1(R) \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \hbar k_a \Omega_a \{ e^{-i(\omega_a t - k_a r)} \rho_{31} + e^{i(\omega_a t - k_a r)} \rho_{13} \} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \hbar k_a \Omega_b \{ e^{-i(\omega_a t - k_a r)} \rho_{32} + e^{i(\omega_a t - k_a r)} \rho_{23} \}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中 ρ 是原子的约化密度算符, 其矩阵元为 $\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle$, 约化密度算符所满足的方程, 也就是主方

程由下式给出^[21, 22]：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2}(N+1) \\ & \times \sum_{ij} \Gamma_{ij} \{ [S_i^-, \rho S_j^+] + [S_i^- \rho, S_j^+] \} \\ & + \frac{1}{2}N \sum_{ij} \Gamma_{ij} \{ [S_i^+, \rho S_j^-] + [S_i^+ \rho, S_j^-] \} \\ & - \frac{1}{2}M \sum_{ij} \Gamma_{ij} \{ [S_i^+, \rho S_j^+] + [S_i^+ \rho, S_j^+] \} e^{-2i\omega_j t} \\ & - \frac{1}{2}M^* \sum_{ij} \Gamma_{ij} \{ [S_i^-, \rho S_j^-] + [S_i^- \rho, S_j^-] \} e^{2i\omega_j t}. \end{aligned} \quad (7)$$

为了简便, 上式引进了原子的升降算符, 即 $S_a^+ = |1\rangle\langle 3|$, $S_a^- = |3\rangle\langle 1|$, $S_b^+ = |2\rangle\langle 3|$, $S_b^- = |3\rangle\langle 2|$. 上式求和 i, j 只限于 a, b . 参量 Γ_{aa}, Γ_{bb} 分别表示状态 $|1\rangle$ 到状态 $|3\rangle$ 以及态 $|2\rangle$ 到态 $|3\rangle$ 跃迁的自发辐射率. 而 Γ_{ab} 为态 $|1\rangle$ 到态 $|3\rangle$ 和态 $|2\rangle$ 到态 $|3\rangle$ 跃迁的相干跃迁率

$$\Gamma_{ab} = \sqrt{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}}p, \quad (8)$$

参数 p 为量子相干强度, 定义为

$$p = \frac{\boldsymbol{\mu}_{13} \cdot \boldsymbol{\mu}_{23}}{|\boldsymbol{\mu}_{13}| |\boldsymbol{\mu}_{23}|} = \cos\theta, \quad (9)$$

θ 是两个偶极矩之间的夹角. 考虑到 $\mathbf{E}_a \cdot \boldsymbol{\mu}_{23} = 0$, $\mathbf{E}_b \cdot \boldsymbol{\mu}_{13} = 0$. 得到拉比频率与 p 的关系

$$\begin{aligned} \Omega_a &= \frac{|\boldsymbol{\mu}_{13}| |\mathbf{E}_a|}{\hbar} \sqrt{1-p^2} = \Omega_{a0} \sqrt{1-p^2}, \\ \Omega_b &= \frac{|\boldsymbol{\mu}_{23}| |\mathbf{E}_b|}{\hbar} \sqrt{1-p^2} = \Omega_{b0} \sqrt{1-p^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

利用绝热近似条件, 在讨论原子的内态运动时, 可以忽略主方程中的动能项的影响. 从主方程出发, 可以给出约化密度矩阵元 ρ_{ij} 所满足的运动方程. 但是由主方程所给出的 ρ_{ij} 的方程包含复指数形式的时间因子, 为了消除时间因子便于求解方程, 对 ρ_{ij} 作如下变换:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \rho_{ii}, \sigma_{13} = \rho_{13} e^{i(\omega_a t - k_a r)}, \\ \sigma_{23} &= \rho_{23} e^{i(\omega_a t - k_a r)}, \sigma_{12} = \rho_{12}, \end{aligned} \quad (11)$$

σ_{ij} 称为内态缓变密度矩阵元. σ_{ij} 所满足的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}\xi_a(\sigma_{31} + \sigma_{13}) - \frac{1}{2}(N+1)[2\gamma_a\sigma_{11} + \gamma_{ab}(\sigma_{12} + \sigma_{21})] + N\gamma_a\sigma_{33}, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}\xi_b(\sigma_{32} + \sigma_{23}) - \frac{1}{2}(N+1)[2\gamma_b\sigma_{22} + \gamma_{ab}(\sigma_{12} + \sigma_{21})] + N\gamma_b\sigma_{33}, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}\xi_a(\sigma_{31} + \sigma_{13}) + \frac{1}{2}\xi_b(\sigma_{32} + \sigma_{23}) + (N+1)[\gamma_b\sigma_{22} + \gamma_a\sigma_{11} + \gamma_{ab}(\sigma_{12} + \sigma_{21})] - N(\gamma_b + \gamma_a)\sigma_{33}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \tau} &= -i\left(\frac{\Delta - \delta}{2} + k_a v\right)\sigma_{13} + \frac{1}{2}\xi_a(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + \frac{1}{2}\xi_b\sigma_{12} - \frac{1}{2}(2N+1)\gamma_a\sigma_{13} - \frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab}\sigma_{23} \\ & - \frac{1}{2}N\gamma_b\sigma_{13} - |M|[\gamma_a\sigma_{31} + \gamma_{ab}\sigma_{32}]e^{-i\Phi}, \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \tau} &= -i\left(\frac{\Delta + \delta}{2} + k_a v\right)\sigma_{23} + \frac{1}{2}\xi_b(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \frac{1}{2}\xi_a\sigma_{21} - \frac{1}{2}(2N+1)\gamma_b\sigma_{23} - \frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab}\sigma_{13} \\ & - \frac{1}{2}N\gamma_a\sigma_{23} - |M|[\gamma_b\sigma_{32} + \gamma_{ab}\sigma_{31}]e^{-i\Phi}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} &= i\delta\sigma_{12} - \frac{1}{2}\xi_a\sigma_{32} - \frac{1}{2}\xi_b\sigma_{13} + N\gamma_{ab}\sigma_{33} - \frac{1}{2}(N+1)[\gamma_a\sigma_{12} + \gamma_b\sigma_{12} + \gamma_{ab}(\sigma_{11} + \sigma_{22})]. \end{aligned} \quad (12)$$

为了便于分析, 我们在上述表达式中定义了如下标度化的变量:

$$\begin{aligned} \tau &= (\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})t, \gamma_a = \frac{\Gamma_{aa}}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \gamma_b = \frac{\Gamma_{bb}}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \gamma_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \xi_a = \frac{\Omega_a}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \\ \xi_b &= \frac{\Omega_b}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \xi_a = \xi_{a0} \sqrt{1-p^2}, \xi_b = \xi_{b0} \sqrt{1-p^2}, \Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, \delta = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}}, v = \frac{dr}{d\tau}. \end{aligned} \quad (13)$$

上述方程中已令 $\Delta_1 = \omega_{13} - \omega_a$, $\Delta_2 = \omega_{23} - \omega_a$, 且光场的频率和压缩真空的载波频率相等, 即 $\omega_s = \omega_a$. 我

们还可以看出布洛赫方程中包含了一个重要的参量 Φ , 其定义为 $\Phi = 2k_a r - \Phi_s$, 是两倍的激光场的位

相与压缩真空位相差值. 用矩阵元 σ_{ij} 及标度化的变量, 平均辐射压力的表达式可以重新表述为

$$f = -\frac{1}{2}\hbar k_a(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})[\xi_a(\sigma_{31} + \sigma_{13}) + \xi_b(\sigma_{32} + \sigma_{23})]. \quad (14)$$

从而得到稳态情况下平均辐射压力的表达式

$$f_{st} = \hbar k_a(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})\{(N+1) \times [\gamma_a\sigma_{11} + \gamma_b\sigma_{22} + \gamma_{ab}(\sigma_{12} + \sigma_{21})] - N\sigma_{33}(\gamma_a + \gamma_b)\}. \quad (15)$$

令 $\alpha = \gamma_b/\gamma_a$, 定义为两个自发发射率的比值. 且 $\gamma_b + \gamma_a = 1, \gamma_{ab} = \sqrt{\gamma_a\gamma_b}p$, 上述方程可以变为

$$f_{st} = \hbar k_a(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})\frac{1}{1+\alpha}\{(N+1) \times [\sigma_{11} + \alpha\sigma_{22} + \sqrt{\alpha}p(\sigma_{12} + \sigma_{21})] - N\sigma_{33}(1+\alpha)\}. \quad (16)$$

利用 $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 1$, 且取布洛赫方程的左边为 0, 利用标准矩阵的数值解法求得布洛赫方程的稳态解.

3. V 形三能级原子在压缩真空中的辐射压力

由于布洛赫方程的复杂性, 本文采用数值计算方法讨论三能级原子在压缩真空中的辐射压力.

3.1. 真空中原子的自发辐射力

首先讨论真空中的情况, 即 $N=0$. 图 2 描述了真空中自发辐射率较大时量子相干强度对辐射压力的影响. 在图 2 中观察到辐射压力在 $\Delta = -\delta$ 附

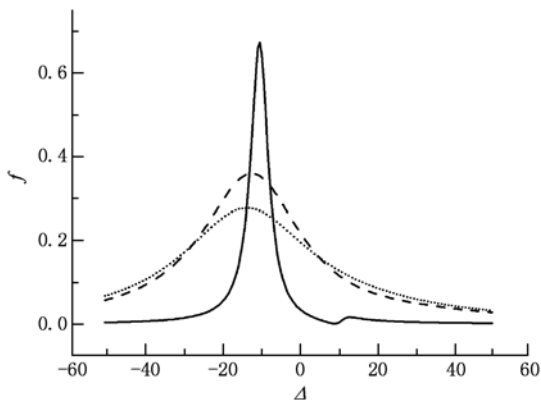


图 2 当参量为 $\xi_{a0} = \xi_{b0} = 8, \alpha = 100, \delta = 10, N = 0, kv = 0.05, p = 0$ (点线), $p = 0.5$ (虚线), $p = 0.98$ (实线), 标度化的辐射压力 $f = 2f_{st}/\hbar k_a(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})$ 与失谐 Δ 的关系

近有一峰值. 这是由于 $\gamma_b \gg \gamma_a$, 即 $\tau_b \ll \tau_a$, 由于能级 $|1\rangle$ 有很长的寿命, 所以能级 $|1\rangle$ 到能级 $|3\rangle$ 的自发辐射被抑制, 此时能级 $|2\rangle$ 到能级 $|3\rangle$ 的自发辐射过程对辐射压力起主导作用. 通过比较图 2 我们还发现随着量子跃迁相干强度的增大, $\Delta = -\delta$ 附近对应的辐射压力的最大值也逐渐增大. 这是由于当两个跃迁之间相干强度很大时, 强烈的量子相干跃迁作用使得能级 $|1\rangle$ 上的布居数在 $\Delta = -\delta$ 处较小, 并且此时能级 $|1\rangle$ 的寿命较长, 激发态 $|2\rangle$ 在 $\Delta = -\delta$ 处的稳态布居数较大, 从而能够自发辐射的原子数比较多, 因此量子相干强度较大时的辐射压力在 $\Delta = -\delta$ 处对应的自发辐射力也较大.

3.2. 压缩真空中原子的自发辐射压力

图 3 考察了压缩真空中不同的平均光子数对辐射压力的影响, 此时我们考虑最大压缩情况, 从图中观察到, 当平均光子数 N 比较小时, 辐射压力分别在 $\Delta = \delta$ 和 $\Delta = -\delta$ 附近呈现了双峰结构. 他们分别对应能级 $|1\rangle$ 到能级 $|3\rangle$ 和能级 $|2\rangle$ 到能级 $|3\rangle$ 之间的光子跃迁过程. 通过比较发现: 当 N 增大时, 原子的辐射压力减小, 并且双峰逐渐消失. 这是由于压缩真空中三能级原子的辐射压力强烈依赖于平均光子数 N , 随着 N 的增大, 原子的布居趋于饱和状态, 辐射场的效应被压缩效应湮没. 这点可以从公式中的得到解释. 此时 $f \propto N(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + (\sigma_{11} + \sigma_{22})$, 一般情况下 $\sigma_{11} < \sigma_{33}, \sigma_{22} < \sigma_{33}$, 所以上式的第一项提供的是一个负值, 显然随着 N 的增大, 辐射压力反而减小. 所以压缩真空中的辐射压力与平均光子数 N 有强烈的依赖关系.

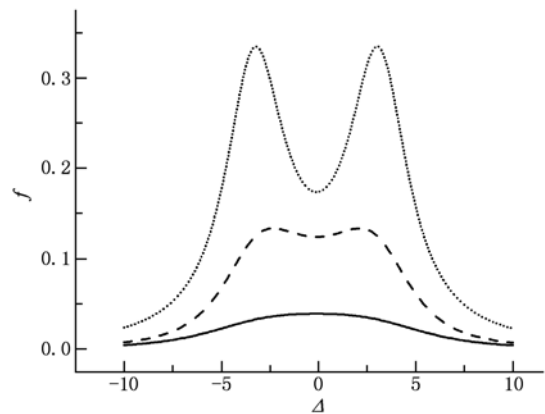


图 3 当参量为 $\xi_{a0} = \xi_{b0} = 10, \alpha = 1, \delta = 3, kv = 0.05, p = 0.98, \Phi = 0, N = 0.5$ (点线), $N = 2$ (虚线), $N = 5$ (实线), 标度化的辐射压力 $f = 2f_{st}/\hbar k_a(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb})$ 与失谐 Δ 的关系

4. V 形三能级原子在压缩真空中的激光冷却

本部分详细地讨论 V 形三能级原子在两束同频激光场中的激光冷却问题. 利用量子回归定理和给出的平均辐射压力的表达式, 我们求出了与动量涨落相关联的动量扩散系数. 通过爱因斯坦关系, 给出了系统所达到的平衡温度的表达式. 并讨论了原子冷却的最终温度和量子相干强度、拉比频率、平均光子数等参数的关系.

动量扩散系数 D 的定义由下式给出^[23]:

$$D = \text{Re} \int [\langle F_I(0) F_I(t) \rangle - \langle F_I(0) \rangle \langle F_I(0) \rangle] dt. \quad (17)$$

从主方程给出的原子的布洛赫方程可以写为如下

形式:

$$dX/dt = AX,$$

其中 $X = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32})$, 这里 A 是一个 8×8 的复系数矩阵. 为了数学求解上的方便, 引入下述变换及标度化的变量:

$$\begin{aligned} \langle u_a \rangle &= \sigma_{13} + \sigma_{31}, \quad \langle u_b \rangle = \sigma_{23} + \sigma_{32}, \\ \langle u_c \rangle &= \sigma_{12} + \sigma_{21}, \quad \langle v_a \rangle = -i(\sigma_{31} - \sigma_{13}), \\ \langle v_b \rangle &= -i(\sigma_{32} - \sigma_{23}), \quad \langle v_c \rangle = -i(\sigma_{21} - \sigma_{12}), \\ \langle w_a \rangle &= \sigma_{11} - \sigma_{33}, \quad \langle w_b \rangle = \sigma_{22} - \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (18)$$

利用上述表达式, 布洛赫方程可以改写成一种只含实变量的形式

$$\frac{\partial \langle \lambda \rangle}{\partial \tau} = A \langle \lambda \rangle + b, \quad (19)$$

其中 $\lambda \equiv (u_a, u_b, u_c, v_a, v_b, v_c, w_a, w_b)$.

具体为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_a \rangle}{\partial \tau} &= \left\{ -\frac{1}{2}(2N+1)\gamma_a - \frac{1}{2}N\gamma_b - \beta_1\gamma_a \right\} \langle u_a \rangle + \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} - \gamma_{ab}\beta_1 \right\} \langle u_b \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_b \langle u_c \rangle + \left\{ -\left(\frac{\Delta-\delta}{2} + k_a \cdot v\right) - \gamma_a\beta_2 \right\} \langle v_a \rangle - \gamma_{ab}\beta_2 \langle v_b \rangle + \xi_a \langle w_a \rangle, \\ \frac{\partial \langle u_b \rangle}{\partial \tau} &= \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} - \beta_1\gamma_{ab} \right\} \langle u_a \rangle + \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_b - \frac{1}{2}N(\gamma_a + \gamma_b) - \gamma_b\beta_1 \right\} \langle u_b \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_a \langle u_c \rangle + \left\{ -\left(\frac{\Delta+\delta}{2} + k_a \cdot v\right) - \gamma_b\beta_2 \right\} \langle v_b \rangle - \gamma_{ab}\beta_2 \langle v_a \rangle + \xi_b \langle w_b \rangle, \\ \frac{\partial \langle u_c \rangle}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}\xi_b \langle u_a \rangle - \frac{1}{2}\xi_a \langle u_b \rangle - \frac{1}{2}(N+1)(\gamma_a + \gamma_b) \langle u_c \rangle + \delta \langle v_c \rangle - \left(N + \frac{1}{3}\right) \gamma_{ab} \langle w_a \rangle \\ &\quad - \left(N + \frac{1}{3}\right) \gamma_{ab} \langle w_b \rangle - \frac{2}{3} \gamma_{ab}, \\ \frac{\partial \langle v_a \rangle}{\partial \tau} &= \left\{ -\frac{1}{2}(2N+1)\gamma_a - \frac{1}{2}N\gamma_b + \beta_1\gamma_a \right\} \langle v_a \rangle + \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} + \gamma_{ab}\beta_1 \right\} \langle v_b \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_b \langle v_c \rangle + \left\{ \left(\frac{\Delta-\delta}{2} + k_a \cdot v\right) - \gamma_a\beta_2 \right\} \langle u_a \rangle - \beta_2\gamma_{ab} \langle u_b \rangle, \\ \frac{\partial \langle v_b \rangle}{\partial \tau} &= \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_b - \frac{1}{2}N(\gamma_a + \gamma_b) + \beta_1\gamma_b \right\} \langle v_b \rangle - \frac{1}{2}\xi_a \langle v_c \rangle + \left\{ -\frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} + \beta_1\gamma_{ab} \right\} \langle v_a \rangle \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\Delta+\delta}{2} + k_a \cdot v\right) - \gamma_b\beta_2 \right\} \langle u_b \rangle - \gamma_{ab}\beta_2 \langle u_a \rangle, \\ \frac{\partial \langle v_c \rangle}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}(N+1)(\gamma_a + \gamma_b) \langle v_c \rangle + \frac{1}{2}\xi_a \langle v_b \rangle - \frac{1}{2}\xi_b \langle v_a \rangle - \delta \langle u_c \rangle, \\ \frac{\partial \langle w_a \rangle}{\partial \tau} &= -\xi_a \langle u_a \rangle - (N+1)\gamma_{ab} \langle u_c \rangle - \frac{1}{2}\xi_b \langle u_b \rangle - \frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} \langle u_c \rangle + \left\{ \left(-2N - \frac{4}{3}\right)\gamma_a + \frac{1}{3}\gamma_b \right\} \langle w_a \rangle \\ &\quad + \left\{ \frac{2}{3}\gamma_a + \left(-N - \frac{2}{3}\right)\gamma_b \right\} \langle w_b \rangle - \frac{2}{3}\gamma_a - \frac{1}{3}\gamma_b, \\ \frac{\partial \langle w_b \rangle}{\partial \tau} &= -\xi_b \langle u_b \rangle - (N+1)\gamma_{ab} \langle u_c \rangle - \frac{1}{2}\xi_a \langle u_a \rangle - \frac{1}{2}(N+1)\gamma_{ab} \langle u_c \rangle + \left\{ \left(-2N - \frac{4}{3}\right)\gamma_b + \frac{1}{3}\gamma_a \right\} \langle w_b \rangle \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{2}{3}\gamma_b + \left(-N - \frac{2}{3} \right) \gamma_a \right\} \langle w_a \rangle - \frac{2}{3}\gamma_b - \frac{1}{3}\gamma_a, \quad (20)$$

式中 $\beta_1 = |M| \cos \Phi, \beta_2 = |M| \sin \Phi$.

定义变量 $\langle \tilde{\lambda} \rangle = \langle \lambda \rangle - \lambda_{st}$, 其中 λ_{st} 为布洛赫方程的稳态解. 非奇次的布洛赫方程可以化为奇次的布洛赫方程

$$\frac{\partial \langle \tilde{\lambda} \rangle}{\partial \tau} = A \langle \tilde{\lambda} \rangle. \quad (21)$$

由辐射压力的表达式

$$f = -\frac{1}{2} \hbar k_a (\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}) [\xi_a (\sigma_{31} + \sigma_{13}) + \xi_b (\sigma_{32} + \sigma_{23})], \quad (22)$$

得出动量扩散系数 D 的表达式为

$$D = \frac{1}{4} \hbar^2 k_a^2 (\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}) \int [\xi_a^2 \langle \tilde{u}_a(0) \tilde{u}_a(\tau) \rangle + \xi_a \xi_b \langle \tilde{u}_a(0) \tilde{u}_b(\tau) \rangle + \xi_b \xi_a \langle \tilde{u}_b(0) \tilde{u}_a(\tau) \rangle + \xi_b^2 \langle \tilde{u}_b(0) \tilde{u}_b(\tau) \rangle] d\tau. \quad (23)$$

利用量子回归定理^[22,24], 双时关联函数 $\langle \tilde{\lambda}(0) \tilde{\lambda}(t) \rangle$ 的期望值所满足的方程为

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \tilde{\lambda}(0) \tilde{\lambda}(t) \rangle = A \langle \tilde{\lambda}(0) \tilde{\lambda}(t) \rangle. \quad (24)$$

积分上式, 并利用

$$\langle \tilde{\lambda}_i(0) \tilde{\lambda}_j(\infty) \rangle = \langle \tilde{\lambda}_i(0) \rangle \langle \tilde{\lambda}_j(\infty) \rangle = 0, \quad (25)$$

可以得到

$$\int \langle \tilde{\lambda}(0) \tilde{\lambda}(t) \rangle d\tau = -A^{-1} \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle \equiv G. \quad (26)$$

将上式代入(23)式中得到动量扩散系数 D 的表达式为

$$D = \frac{1}{4} \hbar^2 k_a^2 (\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}) (\xi_a^2 G_{11} + \xi_a \xi_b G_{21} + \xi_b \xi_a G_{12} + \xi_b^2 G_{22}). \quad (27)$$

由于方程给出的平均辐射压力是速率 v 的非线性函数, 当原子运动速率很小时, 可以把 v 看作变量, 将辐射压力进行级数展开, 并且只保留速率的一次项. 此时平均辐射压力具有线性特性, 可以定性地表示为 $\langle F \rangle = f_0 - \alpha v$, 这里 α 为阻尼系数. 三能级原子的最终温度由爱因斯坦关系式给出

$$k_B T = \frac{D}{\alpha}. \quad (28)$$

4.1. 真空中原子的激光冷却

图4 考察了真空中量子相干强度对原子冷却的最低温度的影响. 通过比较我们发现当两个跃迁之间的相干作用很强时, 我们可以实现低于多普勒极限的温度, 这说明量子相干强度对冷却的极限温度有着重要的影响. 这是由于存在很强的量子相干作用时, 原子的自发辐射力很小, 并且由于辐射压力

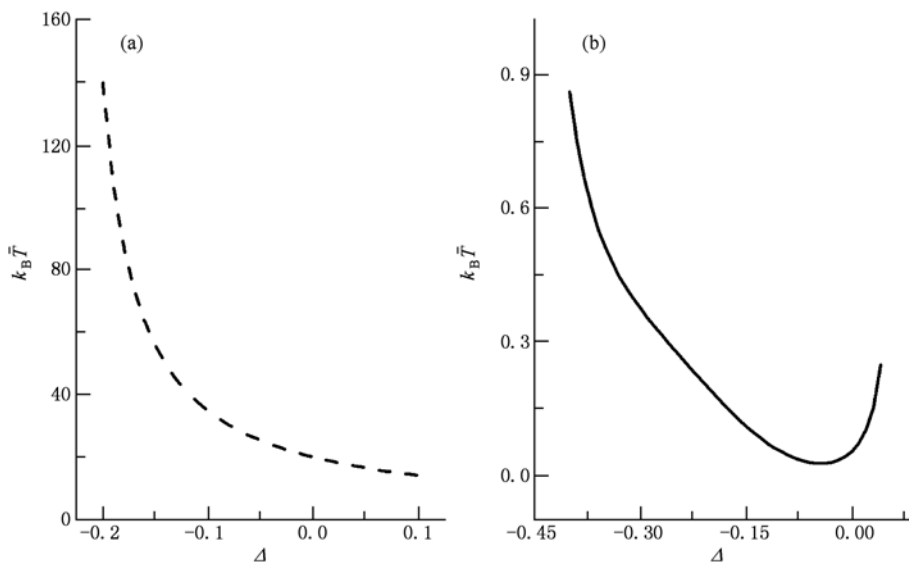


图4 当参数为 $N=0, \alpha=1, \xi_{a0}=1, \xi_{b0}=2, kv=0.05, \delta=0.4$, 真空中原子冷却温度 $k_B \bar{T} = k_B T / \frac{1}{2} \hbar \Gamma_{aa}$ 与失谐 Δ 的关系 (a) $p=0$ (虚线); (b) $p=0.99$ (实线)

的关联导致的原子动量的起伏也很小,即此时的动量扩散系数很小,而阻尼系数却较大,所以此时的 D/α 很小. 理论数值表明:当 $p = 0.99$ 时我们可以实现低于多普勒极限 $1/30$ 的温度.

图 5 考察了真空中不同的拉比频率对冷却的最终温度的影响. 通过观察,我们发现对不同的拉比频率值均可得到低于多普勒极限的温度. 这是因为三能级原子给光子跃迁提供了更多的跃迁方式,使得三能级原子的阻尼系数 α 和动量扩散系数 D 都增大,但扩散系数的增长幅度更大,所以三能级原子在光场强度不大时都可以被冷却至多普勒极限以下. 由图可知,拉比频率对冷却的极限温度有着一定的影响,当拉比频率 $\xi_{a0} > \xi_{b0}$ 时,在一定的失谐范围内,原子冷却的温度较低. 因为失谐较小时,由于强烈的量子跃迁相干作用使得此时动量扩散系数很小,而阻尼系数基本上保持不变,所以 $\xi_{a0} > \xi_{b0}$ 时更利于原子的冷却,可以得到更低的温度.

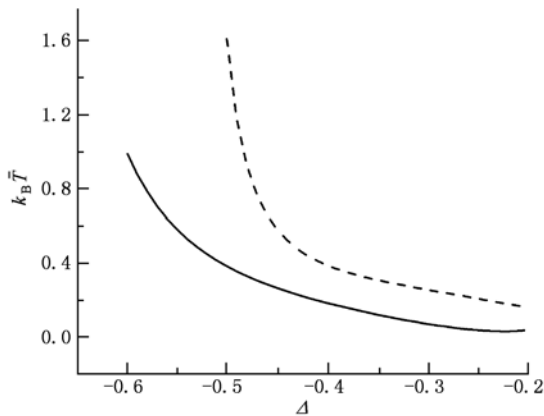


图 5 当参数为 $N=0, \alpha=1, kv=0.05, p=0.99, \delta=0.5, \xi_{a0}=2, \xi_{b0}=1$ (实线), $\xi_{a0}=1, \xi_{b0}=2$ (虚线), 真空中原子冷却温度 $k_B \bar{T} = k_B T / \frac{1}{2} \hbar \Gamma_{aa}$ 与失谐 Δ 的关系

4.2. 压缩真空中原子的激光冷却

图 6 考察了压缩真空中冷却的最终温度与不同的平均光子数 N 的关系. 这里考虑最大压缩的情况. 我们发现当平均光子数越大时越不利于原子的冷却,因为原子的自发辐射压力与平均光子数 N 有着很强的依赖关系,并且 N 越大,由辐射压力的关联引起的原子的动量的起伏很大,因此动量扩散系数就很大,而此时阻尼系数 α 较小,得到原子冷却

的最终温度值较大. 所以 N 较小时利于原子的冷却.

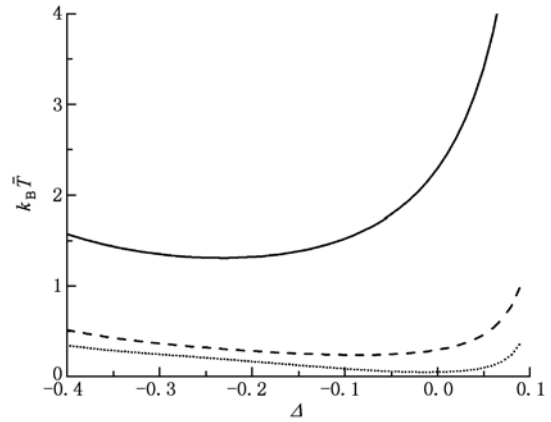


图 6 当参数为 $\alpha=1, p=0.99, \xi_{a0}=1, \xi_{b0}=2, kv=0.05, \Phi=\pi, \delta=0.5, N=0.01$ (点线), $N=0.1$ (虚线), $N=0.4$ (实线), 真空中原子冷却温度 $k_B \bar{T} = k_B T / \frac{1}{2} \hbar \Gamma_{aa}$ 与失谐 Δ 的关系

5. 结 论

本文主要研究了 V 形三能级原子在压缩真空中的辐射压力和激光冷却. 通过数值法讨论了原子的自发辐射压力和冷却温度与量子相干强度、平均光子数、拉比频率等参数的关系. 研究表明:

1. 量子相干强度对原子的自发辐射压力和冷却温度有着很大的影响. 量子相干效应消失后,原子的自发辐射压力很小,原子不能被冷却至多普勒极限以下,不利于原子的冷却,而当存在很强的量子相干强度时,原子的自发辐射压力增大且呈现一个尖峰,通过数值计算,原子可以实现低于多普勒极限 $1/30$ 的温度.
2. 平均光子数对原子的辐射压力和冷却温度也有着一定的影响. 随着平均光子数的增大,辐射场的效应被压缩场湮没,辐射压力从双峰结构变为单峰结构,且不利于原子的冷却,但参数合理的话我们可以在平均光子数较小时实现低于多普勒极限的温度.
3. 拉比频率对冷却的温度有着一定的影响. 如果参数选取合理,不同的拉比频率下我们均可得到低于多普勒极限的温度.

- [1] Anglin J R, Ketterle W 2002 *Nature* **416** 211
- [2] Haensvh T W, Schawlow A L 1975 *Opt. Commun.* **13** 68
- [3] Wineland D J, Dehmelt H 1975 *Bull. Am. Phys. Soc.* **20** 637
- [4] Thorsheim H R, Weiner J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2420
- [5] Jochm S, Bartenstein M, Altmeyer A, Hendl G, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 240402
- [6] Yin J P, Gao J W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4157 (in Chinese) [印建平、高建伟 2004 物理学报 **53** 4157]
- [7] Jia Y H, Ji X M, Yin J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1770 (in Chinese) [贾佑华、纪宪明、印建平 2007 物理学报 **56** 1770]
- [8] Jia Y H, Zhong B, Yin J P 2008 *Chin. Opt. Lett.* **6** 848
- [9] Ma H Y, Cheng H D, Wang Y Z, Liu L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4180
- [10] Ma H Y, Cheng H D, Zhang W Z, Liu L, Wang Y Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1569 (in Chinese) [马红玉、成华东、张文卓、刘亮、王育竹 2009 物理学报 **58** 1569]
- [11] Yu C, Yu D S, Chen J B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3395
- [12] Zhang Y Q, Tan L, Zhu Z H, Liu L W 2010 *Chin. Phys. B* **19** 033202-1
- [13] Kosachiov D V, Rozhdestvensky Y V, Nienhuis G 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 535
- [14] Rooijakkers W, Hogervorst W, Vassen W 1997 *Phys. Rev. A* **56** 3083
- [15] Wang Z C, Tan L 2003 *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** 2213
- [16] Wang Z L, Yin J P 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2466
- [17] Cirac J I, Zoller P 1993 *Phys. Rev. A* **47** 2191
- [18] He L S, Jiang H H, 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1904 (in Chinese) [何林生、江海河 1995 物理学报 **44** 1904]
- [19] Gardiner C W 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 1917
- [20] Dupertuis M A, Stenholm S J 1987 *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 1094
- [21] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley) p395
- [22] Gardiner C W 1983 *Handbook of Statistical Method in Physics Chemistry and Natural Science* (Berlin: Springer-Verlag) p435
- [23] Gordon J P, Ashkin A 1980 *Phys. Rev. A* **21** 1606
- [24] Lax M 1968 *Phys. Rev.* **172** 350

The radiation pressure and laser cooling of a V-type three level atom*

Zhang Qin^{1)†} Jin Kang²⁾ Tang Yuan-He¹⁾ Qu Guang-Hui¹⁾

1) (Department of Physics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

2) (Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

(Received 28 December 2009; revised manuscript received 16 August 2010)

Abstract

The radiation pressure and laser cooling of a V-type three level atom in coherent fields in a squeezed vacuum are considered. From the Hamiltonian of the atomic system, making use of Born-Markoff approximation, the optical Bloch equations are derived. Using the adiabatic approximation, the expression of the mean dissipative force are acquired. The achievable equilibrium temperature is given by the quantum regression theorem and Einstein relation. The dependence of the spontaneous radiation pressure and ultimate temperature on quantum interference, average photon number and Rabi frequency are analyzed. The result shows that temperatures lower than the Doppler limit can be achieved.

Keywords: squeezed vacuum, spontaneous radiation, quantum interference

PACS: 32.80.Qk, 37.10.De, 37.10.Vz, 42.50.-p

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874138).

† E-mail: zhangqin@xaut.edu.cn