

极端相对论快电子分布等离子体中 横振荡色散关系*

刘三秋[†] 国洪梅

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2010年5月7日收到; 2010年7月25日收到修改稿)

本文对各向同性极端相对论快电子呈幂律分布等离子体中横振荡色散关系进行了解析和数值研究. 得到长波支和短波支色散关系的解析表达式. 由于解析近似对波数的限制, 无法得到全波数空间色散曲线, 因此对色散方程进行了数值求解. 研究表明, 在满足长波支和短波支条件时, 解析色散曲线与数值色散曲线完全符合. 此外, 利用多项式回归的方法对数值结果进行拟合, 得到不同参数下快电子分布等离子体横振荡色散关系近似表达式, 该结果为进一步研究快电子分布等离子体的性质提供了重要的理论依据.

关键词: 相对论性等离子体, 快电子分布, 色散关系, 数值计算

PACS: 52.27.Ny, 11.55.Fv

1. 引言

等离子体中许多现象和过程都与波的不稳定性有关, 而等离子体的色散关系是研究等离子体不稳定性基础. 色散关系给出了波频率 ω 与波矢量 k 之间的关系, 决定了波的模式. 利用色散关系, 不但可以研究波的不稳定性问题, 还可以研究波的传播和衰减问题^[1,2]. 波的色散关系与等离子体中粒子的分布密切相关, 满足不同分布的等离子体中波的色散关系将发生变化. 目前, 人们对相对论性 Maxwell 分布以及经典 Maxwell 分布并考虑量子效应中各种情况下色散关系进行了研究并得到了重要的结果^[3-6]. 但是, 当等离子体中荷电粒子的碰撞频率很小或粒子的速度远大于它的热速度时, 粒子的分布将不再满足经典的 Maxwell 分布^[7]. 大量的观测资料表明, 在宇宙等离子体中, 高能粒子的分布为幂律形式. 这种分布形式广泛存在于宇宙天体中, 如太阳耀斑^[8]、脉冲星^[9]、早期的宇宙射线^[10] 和超热辐射带^[11] 等. 具有幂律分布形式的相对论性等离子体已经成为当今等离子体物理研究的重要课题.

在核聚变反应堆和天体物理中, 等离子体波可加速电子形成相对论性的高能快电子. 在高速区, 粒子分布函数随能量的增加按幂律形式逐渐衰减, 即 $f_e \propto \varepsilon^{-\alpha}$. 高能电子采用幂律分布的形式来研究天体物理中的加速和辐射等问题时, 都有足够高的精度. 相对论快电子的分布函数类似于平衡的 Maxwell 分布, 常存在于等离子体的康普顿湍动反应堆^[12-14] 和同步加速湍动反应堆中. Kaplan 和 Tsytovich^[15] 基于快电子分布的幂律形式对 Silin 和 Rukhadze^[16] 所得到的相对论 Maxwell 分布的结果作了数值上的定性修正, 而没有给出快电子分布等离子体色散关系的解析形式. 本文将从等离子体动理论方程出发, 在理论分析的基础上, 对快电子分布等离子体超光速横振荡的色散关系进行解析和数值求解, 得到完整的色散曲线, 完善了快电子分布等离子体中横振荡色散关系的研究. 基于极端相对论性快电子的平均能量所满足的约束条件 $\varepsilon_* \gg m_e c^2$ (m_e 为电子的静止质量, c 为光速), 探讨有效温度对色散关系的影响. 研究这种极端相对论性快电子分布等离子体的色散关系能为解释星系核、射电星系和类星体电磁辐射方面的问题提供理论参考.

* 中国科学技术部国际科技合作项目 (批准号: 2009DFA02320), 国家自然科学基金 (批准号: 10963002) 和国家重点基础研究计划 (批准号: 2010CB635112) 资助的课题.

[†] E-mail: sqlgroup@ncu.edu.cn

2. 横振荡色散方程

从等离子体动理论出发,联立相对论性 Vlasov 方程、流密度方程及 Maxwell 方程得到等离子体(我们假定离子不动,此时可看做纯电子等离子体)的横振荡介电常数^[17]

$$\varepsilon_k^t = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\zeta}, \quad (1)$$

其中 f_p 为相对论粒子在动量 \mathbf{p} 空间的分布函数, $i\zeta$ 来自朗道约定. $\varepsilon, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}$ 和 e 分别是相对论电子的能量、振荡频率、波矢、粒子运动的速度和电子电量.

当粒子分布各向同性时,假定扰动沿 z 方向,即 $\mathbf{k} = k\hat{z}$, 则(1)式可化为

$$\varepsilon_k^t = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} \frac{k^2 v_\perp^2}{\omega - kv_\parallel + i\zeta}, \quad (2)$$

这里 v_\perp 和 v_\parallel 分别表示垂直和平行于波矢 \mathbf{k} 的速度分量. 在球坐标下, 可将(2)式化为

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^t = 1 - \frac{4\pi^2 e^2 c}{\omega k} (m_e c)^3 \int_0^\infty du \frac{u^3}{\gamma} \frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} \\ \times \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{x - \gamma v_p/u - i\varepsilon} dx, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $v_p = \omega/kc$, $x = \cos\theta$, 约化速度, $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m_e c = \gamma\mathbf{V}/c$, $\gamma = \sqrt{1+u^2}$ 为相对论因子.

利用 Plemelj 公式: $\frac{1}{z \pm i0} = \mathcal{L} \frac{1}{z} \mp i\pi\delta(z)$, 将(3)式对 x 积分可得

$$\varepsilon_k^t = 1 + \frac{8\pi^2 e^2}{k^2} (m_e c)^3 \int_0^\infty H \frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} u^2 du, \quad (4)$$

这里

$$\begin{aligned} H = 1 + \frac{u}{\gamma v_p} \left[1 - \left(\frac{\gamma v_p^2}{u} \right) \right] \\ \times \left[\frac{1}{4} \ln \left(\frac{v_p + u/\gamma}{v_p - u/\gamma} \right)^2 - \frac{i\pi}{2} \theta \left(1 - \frac{\gamma}{u} v_p \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\theta(\xi)$ 为阶跃函数: 当 $\xi > 0$ 时, $\theta(\xi) = 1$; $\theta(\xi) < 0$ 时, $\theta(\xi) = 0$.

等离子体中横波色散关系的一般形式为

$$\text{Re}\varepsilon_k^t = k^2 c^2 / \omega^2. \quad (6)$$

我们这里只研究超光速横振荡 ($v_p > 1$), 即(5)式的虚部为零. 在极端相对论情况下, $u/\gamma \approx 1$, 则等离子体横振荡的色散方程可化为

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{8\pi^2 e^2}{k^2} (m_e c)^3 \int_0^\infty H_0 \frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} u^2 du, \quad (7)$$

其中

$$H_0 = 1 + \frac{1}{2v_p} (1 - v_p^2) \ln \left(\frac{v_p + 1}{v_p - 1} \right). \quad (8)$$

3. 相对论性快电子分布

在宇宙天体中, 根据观测资料及定性的理论分析, 快电子在能量空间的分布函数满足如下的近似公式^[15]:

$$f_\varepsilon = \frac{a_0 (a_0^2 - 1) n_0 \varepsilon_*^{a_0-1} \varepsilon^2}{2(\varepsilon_* + \varepsilon)^{a_0+2}}, \quad (9)$$

其中 n_0 为电子数密度, a_0 为常数 ($2.5 < a_0 < 2.7$), 电子能量为 $\varepsilon = c \sqrt{m_e^2 c^2 + p^2}$, 从(9)式可得到快电子的平均能量

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f_\varepsilon d\varepsilon \sim \varepsilon_*. \quad (10)$$

由上式可知, ε_* 越大, 电子的平均能量越大, 等离子体的相对论性越强.

在 高能 ($\varepsilon \gg \varepsilon_*$) 区, 快电子分布函数随能量的增加按幂律形式逐渐衰减, 即

$$f_\varepsilon \propto \varepsilon^{-a_0}. \quad (11)$$

(9)式满足归一化条件

$$\int_0^\infty f_\varepsilon d\varepsilon = \int_0^\infty 4\pi p^2 f_p dp = n_0. \quad (12)$$

在极端相对论情况下, 电子的能量和动量的关系为

$$\varepsilon \approx cp. \quad (13)$$

令 $d = \varepsilon_*/m_e c^2$, $\mu = [a_0(a_0^2 - 1)d^{a_0-1}]/2$, 联立(9), (12) 和(13) 式得到极端相对论性快电子在动量空间的分布函数

$$f_p = \frac{\mu n_0}{4\pi (m_e c)^3} \frac{1}{(\alpha + \gamma)^{a_0+2}}. \quad (14)$$

4. 极端相对论性横振荡的色散关系

从(14)式可得

$$\frac{\partial f_p}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{m_e c^2} \frac{\mu n_0}{4\pi (m_e c)^3} \left[- \frac{(a_0 + 2)}{(\alpha + \gamma)^{a_0+3}} \right]. \quad (15)$$

将(15)式代入(7)式, 得到快电子分布等离子体在极端相对论情况下横振荡色散方程

$$\begin{aligned} \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{(a_0 + 2)\mu}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} \\ \times \int_0^\infty H_0 \left[- \frac{1}{(\alpha + \gamma)^{a_0+3}} \right] u^2 du, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_e}$ 是电子等离子体频率.

当波的相速度远大于光速, 即 $v_p \gg 1$ 时, (8)式

化简为

$$H_0 \approx \frac{2}{3}v_p^2 \left(1 + \frac{1}{5}v_p^2\right). \quad (17)$$

联立(16)式和(17)式,得到快电子分布等离子体横振荡长波支的色散关系

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{6}{5}k^2c^2, \quad (\omega \gg kc), \quad (18)$$

其中, $\omega_p = \sqrt{\beta/3}\omega_{pe}$ 为相对论修正的电子等离子体频率. 这里

$$\begin{aligned} \beta &= (a_0 + 2)\mu \int_0^\infty \frac{1}{(d + \gamma)^{a_0+3}} u^2 du \\ &= (a_0 + 2)\mu \left(\frac{1}{a_0} - \frac{2}{a_0 + 1} + \frac{1}{a_0 + 2} \right) d^{-a_0}. \end{aligned} \quad (19)$$

当波的相速度接近于光速,即 $v_p > 1$ 且 $v_p \sim 1$ 时,有 $H_0 \approx 1$, 则快电子分布等离子体横振荡短波支的色散关系为

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\omega_p^2 + c^2k^2, \quad (\omega \sim kc). \quad (20)$$

以上我们得到了超光速 ($v_p > 1$) 的情况下,极端相对论快电子分布等离子体横振荡在长波支和短波支的色散关系,它们分别为(18)式和(20)式. 从解析解我们可看出:快电子分布等离子体横振荡色散关系与 Maxwell 分布等离子体有相似的解析形式^[3]. d 值越大,即 β 值越小,则修正的电子等离子体频率越小,这与相对论性 Maxwell 分布对等离子体频率的修正结果一致,只是修正频率的系数不同.

5. 数值计算及分析

引入无量纲参量

$$\Omega = \omega/\omega_{pe}, \quad K = kc/\omega_{pe}, \quad v_p = \Omega/K, \quad (21)$$

则极端相对论快电子分布等离子体横振荡色散关系的解析式(18)和(20)可化为如下的无量纲形式:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta}{3} + \frac{6}{5}K^2}, \quad (\Omega \gg K), \quad (22)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta}{2} + K^2}, \quad (\Omega \sim K). \quad (23)$$

以上解析表达式给出了长波支 ($\Omega \gg K$) 和短波支 ($\Omega \sim K$) 横振荡的色散关系. 为了得到完整的相对论快电子分布等离子体中横振荡的色散曲线,我们将(8)式直接代入(16)式,并联合(21)式,得到快电子分布等离子体无量纲化的横振荡一般色散方程

$$\frac{K^2}{\Omega^2} = 1 - \frac{\beta}{2K^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{K}{\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{K^2} \right) \right]. \quad (24)$$

数值求解色散方程(24)式,即可得到横振荡完整的色散曲线.

在等离子体的康普顿湍动反应堆和同步加速湍动反应堆中,等离子体波可加速电子到很高的能量 ($\varepsilon \gg m_e c^2$), 这里取 $d = \varepsilon_*/m_e c^2 = 10$, 常数 $a_0 \approx 2.6$ ^[15]. 为了比较解析色散曲线与数值色散曲线,我们给出了长波支与短波支横振荡解析解和数值解色散曲线,如图 1 所示. 其中,实曲线 a, b 分别为长波支(22)式和短波支(23)式解析色散曲线,虚曲线 c 为数值求解(24)式得到的色散曲线. 为了能够显示长波支解析曲线和数值曲线的差别,特将长波支色散曲线放大,如图 1 插图所示.

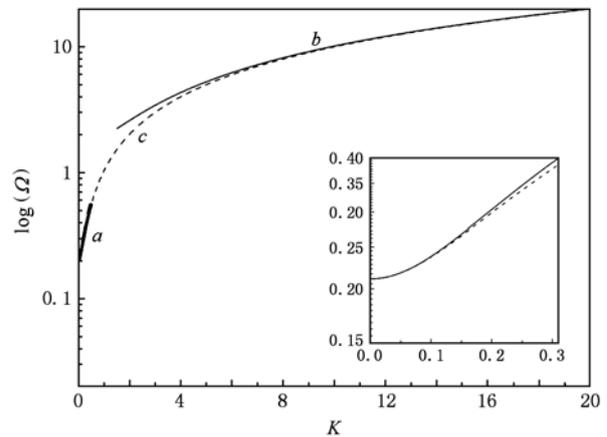


图 1 $d = 10$ 时,横波色散关系的解析解和数值解

从图 1 可见,快电子分布等离子体横振荡色散关系的解析解是不完整的,即在长波支和短波支之间出现了截断;数值计算得到的色散曲线比解析结果更完整更直观. 此外,长波支与短波支色散曲线在满足解析条件 $\Omega \gg K$ 与 $\Omega > K$ 且 $\Omega \sim K$ 时与数值色散曲线完全符合.

从(10)式可知, ε_* 越大,电子的平均能量越大,等离子体的有效温度越高,则相对论性越强. 为了说明有效温度对快电子分布等离子体横振荡色散关系的影响,分别取 d 为 10, 50, 100, 500 和 1000,对无量纲化色散方程(24)式进行数值求解,得到图 2 所示的色散曲线.

从图 2 中色散关系的数值解可以看到, α 值越大(即有效温度越高),相对论修正的等离子体频率越小,这是由相对论效应引起电子质量的变化而导致的.

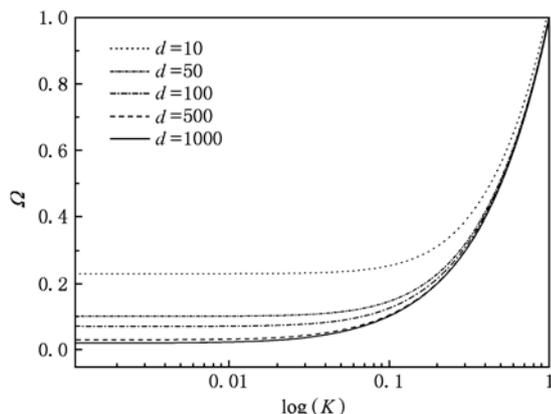


图2 d取不同值时,横振荡的色散曲线

表1 快电子分布下等离子体横振荡在d取不同值时的参数表

$d = \epsilon_* / m_e c^2$	A_0	B_0	C_0	D_0
10	0.21615	0.35029	0.88734	-0.42452
50	0.08282	0.65906	0.53777	-0.27743
100	0.05292	0.76063	0.39289	-0.20688
500	0.01729	0.90859	0.15996	-0.08706
1000	0.01035	0.94259	0.10241	-0.05630

因数值计算的过程非常复杂,现利多项式拟合的方法,对图2中横振荡色散关系的数值解进行拟合,得到简单的函数表述来代替复杂的数值计算.其一般式为 $\Omega = A_0 + B_0 K + C_0 K^2 + D_0 K^3$, 参数为 A_0, B_0, C_0, D_0 , 拟合还原后的色散关系参数如表1.

6. 结 论

本文从横介电常数表达式出发,对无磁化、无碰撞、各向同性极端相对论快电子呈幂律分布等离子体中横振荡色散关系进行了解析研究和数值分析.通过数值计算得到了全面且直观的色散曲线.从数值结果(图2)可看出,有效温度(ϵ_*)对快电子分布等离子体横振荡色散关系的影响很大,温度越高,快电子的相对论性就越强,波场的基频越小.这与电子-离子等离子体中横波的色散关系有相似的性质.文中还列出了d取一定值时横振荡色散关系的参数表,可根据所考虑的不同条件查阅参数,代入一般式即可得到相应横振荡的色散关系.以上所得结果为研究快电子分布等离子体中波的振荡模式、传播特性、等离子体对波的吸收、折射、波与粒子间的相互作用等物理问题提供理论参考.

[1] Xue J K, Lang H 2003 *Physics of Plasmas* **10** 339
 [2] Drummond W E 2004 *Physics of Plasmas* **11** 552
 [3] Mikhailovskii A B 1980 *Plasma Physics* **22** 133
 [4] Bergmana J, Eliasson B 2001 *Physics of Plasmas* **8** 1482
 [5] Schlickeiser R 2004 *Physics of Plasmas* **11** 5532
 [6] Ji P Y, Lu N, Zhu J 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 7473 (in Chinese) [季沛勇、鲁楠、祝俊 2009 物理学报 **58** 7473]
 [7] Hellberg M A, Mace R L 2002 *Physics of Plasmas* **9** 1495
 [8] Achterberg A, Norman C A 1980 *Astron. Astrophys.* **89** 353
 [9] Jones F C, Ellison D C 1991 *Space Sci. Rev.* **58** 259
 [10] Hasegawa A, Mima K, Duong-van M 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2608
 [11] Scholer M 1990 *Geophys. Res. Lett.* **17** 1821
 [12] Kaplan S A 1976 *Radiophysics and Quantum Electronics* **19** 592
 [13] Tsytovich V N 1976 *Radiophysics and Quantum Electronics* **19** 582
 [14] Kaplan S A 1977 *Astrophysics and Space Science* **57** 271
 [15] Kaplan S A, Tsytovich V N (Translated by Zhang Z D, Li X Q) 1982 *Plasma Astrophysics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [卡普兰、齐托维奇著,章振大、李晓卿译 1982 等离子体天体物理(北京:科学出版社)]
 [16] Silin V P, Rukhadze A A 1961 *Electromagnetic properties of plasma and plasma-like media* (Moscow: Atomizdat) (in Russian)
 [17] Li X Q 2004 *Collapsing dynamics of plasmons* (Beijing: Chinese Science and Technology Press) p43 (in Chinese) [李晓卿 2004 等离激元坍塌动力学(北京:中国科学技术出版社)第43页]

Transverse dispersion laws in ultra-relativistic plasma with fast electron distribution *

Liu San-Qiu[†] Guo Hong-Mei

(*Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

(Received 7 May 2010; revised manuscript received 25 July 2010)

Abstract

Analytic and numerical study of electromagnetic oscillations of isotropic relativistic plasma with fast electron distribution is presented. Different analytic formulas for the long-wavelength and short-wavelength branches are obtained. The numerical study gives the dispersion curve in the whole wavenumber range. It is shown that analytical dispersion curves in the long-wavelength and short-wavelength regions are coincident with the numerical ones. Furthermore, the approximate expression of the dispersion law for the different parameters is given by fitting numerical curves with the polynomial regression method, which provides a reference for further study.

Keywords: relativistic plasma, fast electron distribution, dispersion law, numerical calculation

PACS: 52.27.Ny, 11.55.Fv

* Project supported by the Program for International S&T Cooperation Program of China (Grant No. 2009DFA02320), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10963002) and the National Basic Research Program of China (973 Program) (Grant No. 2010CB635112).

[†] E-mail: sqlgroup@ncu.edu.cn