# 广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量*

姜文安 罗绍凯†
(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)
(2010 年 9 月 10 日收到;2010 年 9 月 25 日收到修改稿)

研究广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的守恒量. 首先,在群的一般无限小变换下给出广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性的定义、判据和确定方程;其次,研究系统的 Mei 守恒量存在的条件和形式,得到 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量; 而后,进一步给出带附加项的广义 Hamilton 系统 Mei 守恒量的存在定理; 最后,研究一类新的三维广义 Hamilton 系统,并研究三体问题中 3 个涡旋的平面运动.

**关键词**: 广义 Hamilton 系统, Mei 对称性, Mei 守恒量, 三体问题
**PACS**: 02.20.Sv, 11.30.-j, 45.20.Jj, 03.50.-z

## 1. 引 言

Hamilton 系统动力学不但在现代物理学中扮演着相当重要的角色,而且在数理科学、工程科学、生命科学乃至社会科学的诸多领域发挥着基础支撑作用,特别是在非线性科学、天体力学、航天科学和生物工程等分支上备受重视. 但传统的 Hamilton 系统理论是在偶数维相空间上定义的,这种结构虽然具有很好的性质,但也限制了它的应用范围. 为了使得 Hamilton 系统理论能应用于实际研究中含有奇数维的常微分方程组以及无穷维系统,20 世纪 50 年代科学家们利用广义 Poisson 括号来定义广义 Hamilton 系统,从而推动了 Hamilton 系统的进一步发展[1]. 近 50 年来,广义 Hamilton 系统的研究受到数学、力学和物理学家的重视,在理论和应用方面取得了一系列重要进展[1—12].

对称性原理是物理学中更高层次的法则. 用对称性理论来寻求系统的守恒量是近代数理科学研究中的一个方向,主要有 Noether 对称性方法[13—21]和 Lie 对称性方法[5,6,19—31]. 2000 年,梅凤翔[32]提出一类新的对称性方法——形式不变性,即 Mei 对称性[33,34],近 10 年来,Mei 对称性与 Mei 守恒量的研究被迅速拓展或应用于诸多类型的力学和物理学系统,已成为利用对称性寻求系统守恒量的一种新的通用性的方法[20,21,32—47].

2003 年,文献[5]研究了广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性, 得到系统的 Hojman 守恒量. 2006 年,文献[6]研究了带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性间接导致的 Hojman 守恒量. 但是,广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性能否直接导致守恒量呢? 本文主要研究广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量,给出其存在的条件与形式; 进一步推广到带附加项的广义 Hamilton 系统,给出相应的 Mei 守恒量. 最后,应用本文的方法研究一类新的三维广义 Hamilton 系统,并研究三体问题中 3 个涡旋的平面运动.

## 2. 广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的定义、判据与确定方程

广义 Hamilton 系统的微分方程为[1]

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,m), \qquad (1)$$

其中 $J_{ij}$ 满足

$$J_{ij} = -J_{ji},$$

* 国家自然科学基金(批准号:10372053)资助的课题.
† 通讯联系人. E-mail: mmmplsk@163.com

 

$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}=0. \tag{2}$$

而 $H=H(t,x_i)$ 为 Hamilton 函数.

Mei 对称性是指力学系统的动力学函数在群的无限小变换下,仍然保持系统运动微分方程原有形式的一种不变性[32].

引进无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,$$
$$x_i^*(t^*)=x_i(t)+\Delta x_i, \tag{3}$$

展开得

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,x_i),$$
$$x_i^*(t^*)=x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t,x_i), \tag{4}$$

其中 $\varepsilon$ 为无限小参数,$\xi_0$ 和 $\xi_i$ 为无限小生成元.

**定义**　对于广义 Hamilton 系统(1),如果动力学函数 $H=H(t,x_i)$ 在无限小变换(4)式下有

$$H^*(t^*,x_i^*)=H+\varepsilon X^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

使得广义 Hamilton 方程(1)保持其形式不变,即

$$\dot{x}_i=J_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial x_j}, \tag{6}$$

那么这种不变性称为广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性. 这里

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**判据**　对于广义 Hamilton 系统(1),如果动力学函数 $H=H(t,x_i)$ 在无限小变换(4)式下的生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_i$ 满足方程

$$J_{ij}\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}=0, \tag{7}$$

那么广义 Hamilton 系统(1)具有 Mei 对称性.

事实上,把(5)式代入(6)式,忽略 $\varepsilon^2$ 及更高阶小量,并利用(1)式,即可得方程(7).

我们把方程(7)称为广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的确定方程.

## 3. 广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

下面给出广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量存在的条件与形式.

**定理 1**　对于广义 Hamilton 系统(1),如果动力学函数 $H=H(t,x_i)$ 在无限小变换(4)式下的生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_i$ 满足确定方程(7),并且存在函数 $\mu=\mu(t,x_i)$ 满足条件

$$\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}(\xi_j-\alpha_j\xi_0)-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0$$
$$-X^{(0)}[X^{(0)}(H)]+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=0, \tag{8}$$

那么广义 Hamilton 系统存在并直接导致如下形式的守恒量:

$$I_{\mathrm{M}}=-X^{(0)}(H)\xi_0+\mu=\mathrm{const}, \tag{9}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j},$$
$$\alpha_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

**证明**　对(9)式求导,并利用确定方程(7)和守恒量存在的条件(8)式,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}}&=-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}X^{(0)}(H)\xi_0-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu\\&=-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}X^{(0)}(H)\xi_0-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\\&\quad+X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+X^{(0)}[X^{(0)}(H)]\\&\quad-\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}(\xi_j-\alpha_j\xi_0)\\&=-\left(\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t}+\alpha_j\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}\right)\xi_0\\&\quad+\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0+\xi_i\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_i}\\&\quad-\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}(\xi_j-\alpha_j\xi_0)\\&=\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}[(\xi_j-\alpha_j\xi_0)-(\xi_j-\alpha_j\xi_0)]\\&=0.\end{aligned} \tag{10}$$

我们把(9)式称为广义 Hamilton 系统的 Mei 守恒量.

## 4. 带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

带附加项的广义 Hamilton 系统的微分方程为

$$\dot{x}_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+F_i\qquad(i,j=1,2,\cdots,m), \tag{11}$$

其中 $J_{ij}$ 满足

$$J_{ij}=-J_{ji},$$
$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}=0. \tag{12}$$

而 $H=H(t,x_i)$ 为 Hamilton 函数, $F_i=F_i(t,x_i)$ 是广义 Hamilton 系统的附加项.

对于广义 Hamilton 系统(11),在无限小变换(4)式下 Mei 对称性的确定方程为[6]

$$J_{ij}\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}+X^{(0)}(F_i)=0. \tag{13}$$

下面给出带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量存在的条件与形式.

**定理 2**　对于带附加项的广义 Hamilton 系统(11),如果动力学函数 $H=H(t,x_i)$ 和附加项 $F_i=F_i(t,x_i)$ 在无限小变换(4)式下的生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_i$ 满足确定方程(13),并且存在函数 $\mu=\mu(t,x_i)$ 满足条件

$$\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_j}[\xi_j-(\alpha_j+F_j)\xi_0]-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0$$

$$-X^{(0)}[X^{(0)}(H)]+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=0, \tag{14}$$

那么带附加项的广义 Hamilton 系统存在并直接导致如下形式的守恒量:

$$I_{\mathrm{M}}=-X^{(0)}(H)\xi_0+\mu=\mathrm{const}, \tag{15}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\alpha_j+F_j)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

事实上,对(15)式求导,并利用确定方程(13)和守恒量存在的条件(14)式,容易得到 $\bar{\mathrm{d}}I_{\mathrm{M}}/\mathrm{d}t=0$.

我们把(15)式称为带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 守恒量.

## 5. 一类新的三维广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量

我们构造一类含有时间变量 $t$ 的三维广义 Hamilton 系统,其动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=t+x_2,\\ \dot{x}_2&=-t-x_1,\\ \dot{x}_3&=-2t(x_1+x_2)-4x_1x_2,\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$H=(x_1+x_2)t+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&2x_2\\-1&0&2x_1\\-2x_2&-2x_1&0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

下面研究三维广义 Hamilton 系统(16)的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

对于系统(16),由 Mei 对称性的确定方程(7),可得

$$\begin{aligned}\xi_0+\xi_1&=0,\\ \xi_0+\xi_2&=0.\end{aligned} \tag{18}$$

(18)式有下列解:

$$\begin{aligned}\xi_0&=1,\\ \xi_1&=\xi_2=-1.\end{aligned} \tag{19}$$

把(19)式代入 Mei 守恒量存在的条件(8)式,可得

$$\mu=-2t+x_1^2-x_2^2+x_3. \tag{20}$$

把(19),(20)式代入(9)式,得到广义 Hamilton 系统(16)的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量

$$I_{\mathrm{M}}=x_1^2-x_2^2+x_3=\mathrm{const}. \tag{21}$$

## 6. 三体问题中 3 个涡旋平面运动的 Mei 对称性与 Mei 守恒量

三体问题是数理科学、特别是天体力学中经典而又重要的难题. 三体问题中 3 个涡旋的平面运动的相对运动方程为[48]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=k_3\delta_{123}A(x)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}\right),\\ \dot{x}_2&=k_2\delta_{132}A(x)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right),\\ \dot{x}_3&=k_1\delta_{231}A(x)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right),\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\delta_{\alpha\beta\gamma}(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ 为 $\alpha,\beta,\gamma$ 对应的 3 个点决定的三角形的定向,当 $\alpha,\beta,\gamma$ 反时针时, $\delta_{\alpha\beta\gamma}=1$,否则 $\delta_{\alpha\beta\gamma}=-1$; $A(x)$ 为此三角形的面积. 文献[2]把系统(22)广义 Hamilton 化,得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=k_3A(x)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}\right),\\ \dot{x}_2&=-k_2A(x)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right),\\ \dot{x}_3&=k_1A(x)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right),\end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$H(x)=k_1k_2\ln x_1+k_1k_3\ln x_2+k_2k_3\ln x_3,$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{k_1}A(x)&\frac{1}{k_2}A(x)\\ \frac{1}{k_1}A(x)&0&-\frac{1}{k_3}A(x)\\ -\frac{1}{k_2}A(x)&\frac{1}{k_3}A(x)&0\end{pmatrix}. \tag{24}$$

下面研究三维广义 Hamilton 系统(23)的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

对于系统(23),由 Mei 对称性的确定方程(7),可得

$$
\begin{aligned}
&k_3 A(x)\left(\frac{\xi_2}{x_2^2}-\frac{\xi_3}{x_3^2}\right)=0,\\
&k_2 A(x)\left(-\frac{\xi_1}{x_1^2}+\frac{\xi_3}{x_3^2}\right)=0,\\
&k_1 A(x)\left(\frac{\xi_1}{x_1^2}-\frac{\xi_2}{x_2^2}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(25)式有下列解:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = x_1^2,\\
&\xi_2 = x_2^2,\\
&\xi_3 = x_3^2.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

把(26)式代入 Mei 守恒量存在的条件(8)式,可得

$$\mu=\frac{1}{k_3}x_1+\frac{1}{k_2}x_2+\frac{1}{k_1}x_3+1. \tag{27}$$

把(26),(27)式代入(9)式,我们得到广义 Hamilton 系统(23)的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量

$$I_{\mathrm{M}}=\frac{1}{k_3}x_1+\frac{1}{k_2}x_2+\frac{1}{k_1}x_3=\text{const}. \tag{28}$$

## 7. 结　　论

提出了广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性方法,得到广义 Hamilton 系统、带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的守恒量,给出其存在的条件与形式,丰富并发展了广义 Hamilton 系统的动力学理论以及约束系统的对称性理论.

构造了一类新的含时三维广义 Hamilton 系统,应用本文的方法研究了其对称性与守恒量. 对于这类新的广义 Hamilton 系统,有待于物理学、力学和工程科学界将其应用于实际问题.

应用本文的方法研究了经典而又重要的三体问题,给出了研究 3 个涡旋平面运动的对称性方法. 对于著名的三体问题,有待于利用其他的对称性方法开展进一步的研究工作.


[1] Li J B, Zhao X H, Liu Z R 1994 *Theory and Application of Generalized Hamilton Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[李继彬、赵晓华、刘正荣 1994 广义哈密尔顿系统理论及其应用(北京: 科学出版社)]

[2] Zhao X H 1994 *Acta Math. Appl. Sin.* **17** 182(in Chinese)[赵晓华 1994 应用数学学报 **17** 182]

[3] Olver P J 1986 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Spring-Verlag)

[4] Marsden J E, Ratiu T S 1994 *Introduction to Mechanics and Symmetry* (New York: Spring-Verlag)

[5] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048(in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[6] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829(in Chinese)[贾利群、郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]

[7] Wu H B 2004 *J. Beijing Inst. Technol.* **24** 20(in Chinese)[吴惠彬 2004 北京理工大学学报 **24** 20]

[8] Zhang S Y, Deng Z C 2004 *J. Compt. Mech.* **21** 571 (in Chinese)[张素英、邓子辰 2004 计算力学学报 **21** 571]

[9] Huang Z L 2005 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University)(in Chinese)[黄志龙 2005 博士学位论文(杭州: 浙江大学)]

[10] Wang Y Z, Cheng D Z, Li C W 2002 *Acta Autom. Sin.* **28** 745 (in Chinese)[王玉振、程代展、李春文 2002 自动化学报 **28** 745]

[11] Cheng D Z, Xi Z R, Lu Q, Mei S W 2000 *Sci. China* E **30** 341 (in Chinese)[程代展、席在荣、卢　强、梅生伟 2000 中国科学 E **30** 341]

[12] Liu C, Liu S X, Mei F X, Guo Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6709(in Chinese)[刘　畅、刘世兴、梅凤翔、郭永新 2008 物理学报 **57** 6709]

[13] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen: Math. Phys.* **2** 235

[14] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese)[李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[15] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properies* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性(北京: 北京工业大学出版社)]

[16] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456

[17] Liu D 1990 *Sci. China* A **11** 1189 (in Chinese)[刘　端 1990 中国科学 A **11** 1189]

[18] Luo S K 1991 *Chin. Sci. Bull.* **36** 1930

[19] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京:科学出版社)]

[20] Mei F X 2004 *Symmetry and Conserved Quantity of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[21] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京: 科学出版社)]

[22] Lutzky M 1979 *J. Phys.* A **12** 973
[23] Lutzky M 1979 *J. Math. Phys.* A **19** 105
[24] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]
[25] Mei F X 1998 *Chin. Sci. Bull.* **43** 1937
[26] Zhang Y, Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816 (in Chinese) [张 毅、薛 纭 2001 物理学报 **50** 816]
[27] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W, Gu S L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2489 (in Chinese) [张宏彬、陈立群、刘荣万、顾书龙 2005 物理学报 **54** 2489]
[28] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181
[29] Luo S K, Jia L Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 265
[30] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597
[31] Fan J H 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040301
[32] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
[33] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[34] Fan J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269
[35] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 47 (in Chinese) [陈向炜、罗绍凯、梅凤翔 2002 应用数学与力学 **23** 47]
[36] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373
[37] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
[38] Luo S K 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 257
[39] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]
[40] Ge W K, Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4985 (in Chinese) [葛伟宽、张 毅 2006 物理学报 **55** 4985]
[41] Fang J H, Liao Y P, Peng Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 496 (in Chinese) [方建会、廖永潘、彭 勇 2005 物理学报 **54** 496]
[42] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1969 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **54** 1969]
[43] Xia L L, Li Y C, Wang J, Hou Q B 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 415
[44] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]
[45] Ding N, Fang J H 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1550
[46] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1312
[47] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304
[48] Qian M, Jiang Y P 1984 *Acta Math. Sci.* **3** 441 (in Chinese) [钱 敏、蒋云平 1984 数学物理学报 **3** 441]

# Mei symmetry leading to Mei conserved quantity of generalized Hamiltonian system*

Jiang Wen-An Luo Shao-Kai†

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 10 September 2010; revised manuscript received 25 September 2010)

Abstract

For a generalized Hamiltonian system, Mei conserved quantity derived by using Mei symmetry is studied. First, the definition, the criterion and the determining equations of Mei symmetry of generalized Hamiltonian system are given under infinitesimal transformations of group. Second, the conditions and the forms for existence of Mei conserved quantity are directly obtained by using the Mei symmetry of the system. Then, the theorem for existence of Mei conserved quantity of generalized Hamiltonian system with additional terms is given. Finally, a new three-dimensional generalized Hamiltonian system and the plane motion of the three vortices of three-body problem are studied by using the method presented in the paper.

**Keywords**: generalized Hamiltonian system, Mei symmetry, Mei conserved quantity, three-body problem

**PACS**: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj, 03.50.−z

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372053).

† Corresponding author. E-mail: mmmplsk@163.com