

量子纠缠消相干对确定型远程制备的影响*

郭振[†] 闫连山 潘炜 罗斌 徐明峰

(西南交通大学信息科学与技术学院, 信息光子与通信研究中心, 成都 610031)

(2010年6月29日收到; 2010年9月23日收到修改稿)

研究了两种典型的量子纠缠消相干现象对确定型量子态远程制备方案的影响. 首先对该确定型远程制备方案进行了分析, 得到该方案确定性和比特消耗情况; 然后通过分析制备过程中纠缠消相干现象对系统的影响得出: 在极化消相干过程中, 该系统保真度与目标量子比特在 Bloch 球上的经度选择无关, 仅与目标比特的纬度和消相干的大小有关; 在相位消相干中, 该系统的保真度不会受到消相干的影响, 仅与目标量子态的纬度相关.

关键词: 远程制备, 纠缠消相干, 通信消耗, 保真度

PACS: 03.67.Hk, 03.65.Ud, 03.65.Yz, 42.50.Ar

1. 引言

量子隐形传态 (teleportation) 和远程制备 (remote state preparation) 是量子信息科学中两种重要的应用. 隐形传态^[1] 根据量子纠缠的特性, 借助于局域操作和经典通信, 发送端 Alice 可以将一个未知的量子比特经过量子通道传送到接收端 Bob; 远程制备^[2] 同样以传送量子态为目的, 不同点在于: 在远程制备过程中, 待发送量子态对于 Alice 是已知的, 即 Alice 知道目标量子态的经典描述. 隐形传态需要消耗 1 量子比特和 2 经典比特, 而远程制备的比特消耗与目标比特的选择和制备方法有关^[3-6]. Pati^[7] 证明了对于特定集合的目标比特, 仅消耗 1 量子比特和 1 经典比特. Leung 和 Shor^[8] 证明了如果要成功远程制备任意量子态, 经典比特和量子比特至少要和隐形传态的消耗一样. 文献[9] 提出利用部分纠缠态为量子信道, 仅需 1 经典比特即可远程制备多粒子的纠缠态方案. 在文献[9, 10] 提出的量子态制备方案中, Bob 需要对纠缠态操作, 例如对量子态进行垂直变换, 但并非对任意量子态存在此么正变换, 方案存在成功率的问题. 所以确定型远程制备^[11-14] 方案成为研究热点, 其中文献[14] 提出利用正算子取值测度 (positive operator-value measure, 简记为 POVM) 测量, 可以确定性地

远程制备任意量子态, 比特消耗和隐形传态相同, 结构与其他方案相比更简单, 具有较好的可行性.

隐形传态和远程制备都是利用纠缠对作为系统的量子信道, 但在实际系统中纠缠对是非常脆弱的, 会不可避免地受到环境影响, 引起纠缠的消相干^[15-18]. 根据研究对象和考虑因素不同, 消相干也分为很多种^[19-21]. 这里主要考虑的纠缠消相干为两类: 极化消相干 (depolarizing) 和相位消相干 (dephasing)^[22]. 本文首先分析该远程制备方案, 得到方案的确定性和比特的消耗情况. 然后通过分析处于不同消相干情况下的系统, 研究了消相干参数和目标比特选择对系统保真度的影响.

2. 确定型远程制备方案

2.1. 经典量子态远程制备

这里假定目标量子比特为

$$|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle. \quad (1)$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, 利用 Bloch 球表示如图 1 所示. 从图 1 中可以看出参数 θ 和 ϕ 分别表示量子态在球上的纬度和经度的参考量, 根据这两个参数可以在球上确定任意的量子纯态.

在经典的远程制备过程中, θ 和 ϕ 对于 Alice 是已知的. 为了实现将 $|\varphi\rangle$ 传送到 Bob 处, 两者需要享

* 国家自然科学基金 (批准号: 60972003) 和教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-08-0821) 资助的课题.

[†] E-mail: zhenguo.swjtu@hotmail.com

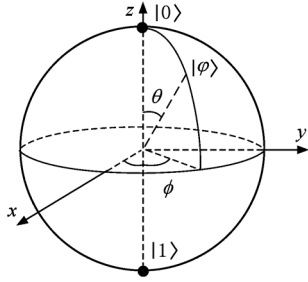


图1 量子态在 Bloch 球上的表示

有一个纠缠对作为量子通道. 这里选择 Bell 基中的一个

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)_{AB}. \quad (2)$$

纠缠对 $|\psi\rangle_{AB}$ 中粒子 A 位于 Alice 处, 粒子 B 位于 Bob 处. Alice 首先对自己的 A 粒子进行投影测量, 测量基选择为 $\{|\varphi\rangle, |\varphi_{\perp}\rangle\}$, 有

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |\varphi\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |\varphi_{\perp}\rangle, \\ |1\rangle &= \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |\varphi\rangle - \cos \frac{\theta}{2} |\varphi_{\perp}\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

根据上式可以将纠缠对展开为

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi\rangle_A |\varphi_{\perp}\rangle_B - |\varphi_{\perp}\rangle_A |\varphi\rangle_B). \quad (4)$$

Alice 对手中的粒子 A 进行投影测量后, 若得到结果为 $|\varphi\rangle_A$, 则 Bob 得到量子态 $|\varphi_{\perp}\rangle_B$; 若得到结果为 $|\varphi_{\perp}\rangle_A$, 则 Bob 得到目标量子态 $|\varphi\rangle_B$. 对于任意量子态而言, 不存在基本的么正变换使得 $|\varphi_{\perp}\rangle \rightarrow |\varphi\rangle$, 所以当 Alice 得到结果 $|\varphi\rangle_A$ 时, 远程制备失败, 成功率仅为 50%. 但在文献[7]中提到对于特定的集合量子态可以完成以上操作, 例如在 Bloch 球表象中, 目标量子态处于赤道圈或者通过极点的大圈上, 存在相应的么正变换使得 $|\varphi_{\perp}\rangle \rightarrow |\varphi\rangle$, Alice 仅需消耗 1 经典比特和 1 量子比特即可完成远程制备^[8].

2.2. 确定型远程制备

根据选择方案的不同, 远程制备存在着成功概率的问题. 目前, 制备方案的改进已经成为提高制备成功率的有效途径, 文献[13]中提出了一种简便的确定型制备方案, 结构如图 2 所示.

Alice 对手中的粒子 A 进行如图 2 所示的 POVM 测量. 这里设定纠缠对也为 Bell 基之一

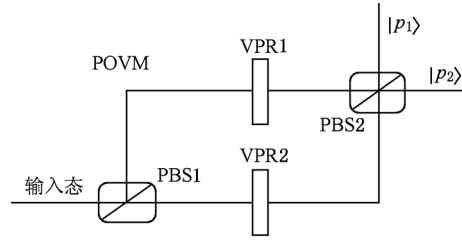


图2 确定型 POVM 测量示意图

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)_{AB}. \quad (5)$$

图 2 中 VPR 为可调的偏振旋转器, 用来改变输入偏振态; PBS 为偏振分束器. 经过 VPR1 和 VPR2 后, 量子态发生如下变化:

$$\begin{aligned} |H\rangle &\xrightarrow{\text{VPR1}} \cos \frac{\theta}{2} |H\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle, \\ |V\rangle &\xrightarrow{\text{VPR2}} \cos \frac{\theta}{2} |H\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

对于输入量子态经过图 2 所示 POVM 测量后, 纠缠对变化为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} |H\rangle_1 |V\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle_1 |H\rangle \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} |H\rangle_2 |H\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle_2 |V\rangle \right)_{AB}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中的下标 1 和 2 分别代表从 $|p_1\rangle$ 和 $|p_2\rangle$ 得到的测量结果. 得到的 POVM 可以表示为

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{bmatrix}, \\ M_2 &= \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

经过 POVM 测量以后, 各经过一个 45° 偏振分束器对 $|p_1\rangle$ 和 $|p_2\rangle$ 再次测量, (8) 式可以变换为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |D_A^2\rangle \left(\cos \frac{\theta}{2} |H\rangle_B + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle_B \right) \\ &+ \frac{1}{2} |A_A^2\rangle \left(\cos \frac{\theta}{2} |H\rangle_B - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |V\rangle_B \right) \\ &+ \frac{1}{2} |D_A^1\rangle \left(\cos \frac{\theta}{2} |V\rangle_B + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |H\rangle_B \right) \\ &+ \frac{1}{2} |A_A^1\rangle \left(\cos \frac{\theta}{2} |V\rangle_B - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |H\rangle_B \right). \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$, $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle -$

$|V\rangle$). Alice 对于自己手中的粒子进行上述测量后,将不同的测量结果通过经典通道发送给 Bob, Bob 对手中的另一半粒子进行相应的 $I, \sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ 操作即可得到 $|\varphi\rangle$, 经典通道需要消耗 2 经典比特. 由此可见,该方案通过消耗 2 经典比特和 1 量子比特可以确定性地远程制备任意态.

3. 纠缠消相干的影响分析

以上远程制备方案可以确定性地制备任意纯态,其中主要是基于纠缠对作为系统的量子信道. 在实际应用中纠缠对是非常不稳定的,由于环境的影响,很容易引起纠缠的消相干. 这里纠缠中的消相干主要考虑两类:极化消相干和相位消相干.

3.1. 极化消相干

下面首先考虑极化消相干

$$\rho'_{AB} = p |\psi\rangle_{AB} \langle\psi| + (1-p) \frac{I_A}{2} \otimes \frac{I_B}{2}. \quad (10)$$

极化消相干是最大纠缠态 ($|\psi\rangle_{AB} \langle\psi|$) 和最大混合态 ($I_A \otimes I_B$) 的叠加,其中 $p \in [0, 1]$.

经过 POVM 测量后,纠缠对的密度算子可以表示为

$$\rho''_{AB} = \frac{M_1 \rho'_{AB} M_1^\dagger}{\text{tr}(M_1^\dagger M_1 \rho'_{AB})}. \quad (11)$$

根据上式进行运算,其中 $I_A = |H\rangle_A \langle H| + |V\rangle_A \langle V|$, 得到测量后的纠缠对密度算子为

$$\begin{aligned} \rho''_{AB} = & p \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |HV\rangle \langle HV| + \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ & \times \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |HV\rangle \langle VH| \\ & + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |VH\rangle \langle HV| \\ & + \sin^2 \frac{\theta}{2} |VH\rangle \langle VH| \Big)_{AB} \\ & + (1-p) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |H\rangle \langle H| \right. \\ & \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} |V\rangle \langle V| \right)_A \otimes \frac{I_B}{2}. \quad (12) \end{aligned}$$

Bob 处得到的量子态为

$$\begin{aligned} \rho''_B = & p \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |V\rangle \langle V| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |H\rangle \langle H| \right)_B \\ & + (1-p) \frac{I_B}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \left(p \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1-p}{2} \right) |V\rangle_B \langle V| \\ & + \left(p \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1-p}{2} \right) |H\rangle_B \langle H|. \quad (13) \end{aligned}$$

根据保真度的定义,

$$F(\rho_0, \rho''_B) = \text{tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho''_B \sqrt{\rho_0}}) = \sqrt{\frac{1 - p \cos^2 \theta}{2}}. \quad (14)$$

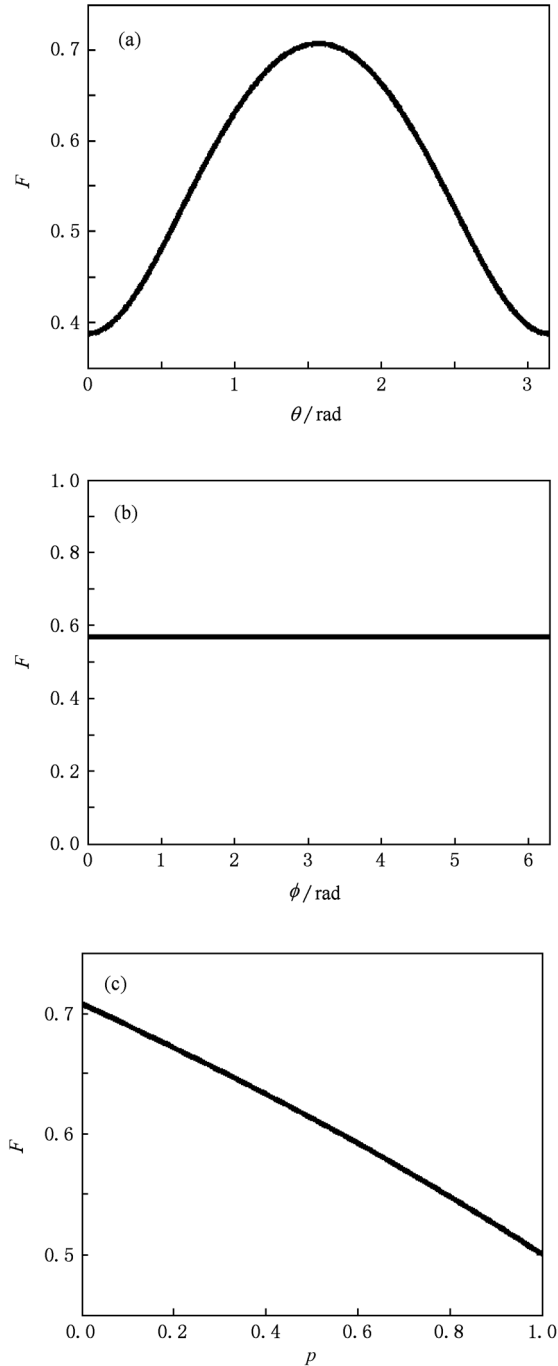


图3 极化消相干下保真度随着各参数的变化规律 (a) $p = 0.7, \phi = 0$ 时,保真度随 θ 的变化; (b) $p = 0.7, \theta = \pi/4$ 时,保真度随 ϕ 的变化; (c) $\theta = \pi/4, \phi = 0$ 时,保真度随着 p 的变化

从图 3(a)可以看出,在保持 p 和 ϕ 不变的情况下,在 Bloch 球表象中,当目标量子态位于极点时保真度最差,随着量子态向赤道移动保真度不断上升,直到抵达赤道时,即 $\theta = \pi/2$ 时,保真度最大,然后随着逐渐远离赤道点,保真度 F 呈现对称的下降趋势;图 3(b)表明保真度 F 与目标量子比特在 Bloch 球上的经度选择无关,这点可以从 (14) 式中明显看出;图 3(c) 表示消相干大小程度的量 p 和保真度 F 的关系,随着 $p \rightarrow 1$, F 随之减小,但可以看到尽管 $p = 0$, 系统的保真度仍然不为零. 通过以上分析得出,在极化消相干情况下保真度 F 随着制备态的变化规律和纠缠消相干参数 p 对 F 的影响.

3.2. 相位消相干

接下来考虑相位消相干

$$\rho''_{AB} = p |\psi\rangle_{ABAB} \langle \psi| + \frac{(1-p)}{2} (|0\rangle_A \times_A \langle 0| \otimes |1\rangle_{BB} \langle 1| + |1\rangle_{AA} \langle 1| \otimes |0\rangle_{BB} \langle 0|). \quad (15)$$

相位消相干是最大纠缠态 ($|\psi\rangle_{ABAB} \langle \psi|$) 和经典相干态 ($|0\rangle_{AA} \langle 0| \otimes |1\rangle_{BB} \langle 1| + |1\rangle_{AA} \langle 1| \otimes |0\rangle_{BB} \langle 0|$) 的叠加,其中 $p \in [0, 1]$.

经过 POVM 测量后,纠缠对密度算子可以表示为

$$\rho''_{AB} = \frac{M_1 \rho'_{AB} M_1^\dagger}{\text{tr}(M_1^\dagger M_1 \rho'_{AB})}. \quad (16)$$

计算后得到

$$\begin{aligned} \rho''_{AB} = & p \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |HV\rangle \langle HV| \right. \\ & + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |HV\rangle \langle HV| \\ & + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |VH\rangle \langle HV| \\ & \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} |VH\rangle \langle VH| \right)_{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sin^2 \frac{\theta}{2} |V\rangle_A \langle V| \otimes |H\rangle_B \langle H| \\ & + (1-p) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |H\rangle_A \langle H| \otimes |V\rangle_B \langle V| \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Bob 处得到的量子态为

$$\rho''_B = \cos^2 \frac{\theta}{2} |V\rangle_B \langle V| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |H\rangle_B \langle H|. \quad (18)$$

根据保真度的定义,

$$F(\rho_0, \rho''_B) = \text{tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho''_B \sqrt{\rho_0}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta. \quad (19)$$

从上面的推导中得到在相位消相干的影响下系统的保真度 F 同样不会随目标量子比特在 Bloch 球上的经度选择变化;同时和消相干的大小 p 没有关系,这点可以从图 2 中 POVM 的结构中加以理解,因为 POVM 具有典型的对称结构,对于相位消相干的影响可以相互抵消,所以相位的消相干大小对该 POVM 方案的保真度没有影响.

4. 结 论

在量子信息科学中,纠缠对起着至关重要的作用. 但在实际系统中,它很容易受到环境的影响引起纠缠消相干. 针对一种新型的确定性量子态远程制备方案,首先分析了该方案的量子比特和经典比特的消耗,得到结果和文献[8]一致. 同时还分析了两种纠缠消相干(极化消相干和相位消相干)对该方案的影响. 在极化消相干情况下,得到在 Bloch 球表象中,目标量子态经度的选择对保真度没有影响,保真度仅与目标比特的纬度选择和消相干的大小有关. 在相位消相干情况下,由于该方案中 POVM 测量的对称特性,相位消相干的大小不会影响量子态远程制备的保真度.

[1] Bennett C H, Brassard G, Claude C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
 [2] Lo H K 2000 *Phys. Rev. A* **62** 012313
 [3] Dai H Y, Chen P X, Zhang M, Li C Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 27
 [4] Lin X, Li H C, Lin X M, Li X H, Yang R C 2007 *Chin. Phys.* **16** 1209

[5] Chen L B, Jin R B, Lu H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 30
 [6] Guo Y, Chen Z G, Zeng G H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2549
 [7] Pati A K 2000 *Phys. Rev. A* **63** 014302
 [8] Leung D W, Shor P W 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 127905
 [9] Tao Y, Pan W, Luo B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2016 (in Chinese)[陶源、潘炜、罗斌 2008 物理学报 **57** 2016]
 [10] Ma P C, Zhan Y B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 445

- [11] Rosenfeld W, Berner S, Volz J, Weber M, Weinfurter H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 050504
- [12] Liu W T, Wu W, Ou B Q, Chen P X, Li C Z, Yuan J M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 022308
- [13] Wu W, Liu W T, Chen P X, Li C Z 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042301
- [14] Wu W, Liu W T, Chen P X, Li C Z 2009 *Opt. Commun.* **282** 2093
- [15] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [16] Melikidze A, Dobrovitski V V, De Raedt H A, Katsnelson M I, Harmon B N 2004 *Phys. Rev. B* **70** 014435
- [17] Liang H Q, Liu J M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3692 (in Chinese) [梁华秋、刘金明 2009 物理学报 **58** 3692]
- [18] Wang F Q, Zhang Z M, Liang R S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 597
- [19] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [20] Cucchietti F M, Sonia F V, Juan P P 2007 *Phys. Rev. A* **75** 032337
- [21] Sun Z, Wang X G, Sun C P 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062312
- [22] Xiang G Y, Li J, Yu B, Guo G C 2005 *Phys. Rev. A* **72** 012315

Influence of decoherence of entanglement on deterministic remote state preparation *

Guo Zhen[†] Yan Lian-Shan Pan Wei Luo Bin Xu Ming-Feng

(Center for Information Photonics and Communications, School of Information Science and Technology,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(Received 29 June 2010; revised manuscript received 23 September 2010)

Abstract

We investigate the influence of decoherence of entanglement on the deterministic remote state preparation. Firstly, the determinability and the depletion of entanglement bits and classical bits are obtained. Then two kinds of decoherent channels (depolarizing and dephasing) are analyzed. For the depolarizing channel, the fidelity is related only to the depolarization and the latitude of target quantum bits on the Bloch sphere, but is independent of longitude. For the dephasing channel, the fidelity is not affected by the quantum channel and only related to the latitude of target quantum bits.

Keywords: remote state preparation, decoherence of entanglement, cost, fidelity

PACS: 03.67.Hk, 03.65.Ud, 03.65.Yz, 42.50.Ar

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60972003) and the Program for the New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education, China (Grant No. NCET-08-0821).

[†] E-mail: zhenguo.swjtu@hotmail.com