

光晶格中超流费米气体的能隙孤子*

杨树荣 蔡宏强 漆伟 薛具奎†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

(2010年9月19日收到; 2010年11月3日收到修改稿)

研究了一维光晶格中超流费米气体的能隙孤子. 应用平均场理论和超流费米气体的流体动力学模型, 利用变分法得到了在整个跨越区超流费米气体在光晶格中存在带隙孤子的条件, 即原子间的非线性相互作用项与系统化学势以及晶格深度的相互关系. 通过对超流费米气体的基态能隙孤子空间分布的分析与对比, 揭示了在一维情况下超流费米气体能隙孤子的存在并发现超流费米气体能隙孤子在整个跨越区当系统从 Bose-Einstein 凝聚端跨越到 BCS 端时孤子存在的条件与孤子空间分布存在明显的差别.

关键词: 超流费米气体, 光晶格, 能隙孤子

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 03.75.Ss

1. 引言

光晶格中超流费米气体^[1,2]的实现激发了人们对超冷原子的研究热情, 使超流费米气体在光晶格中的研究发展成为一个人们非常关注的焦点之一. 在实验中人们借助费施巴赫(Feshbach)共振技术^[3]通过改变磁场强弱可以对原子间的相互作用以及晶格参数(如晶格周期和强度)等物理参数进行控制和调节^[4-7], 利用费施巴赫共振技术改变原子间的散射长度实现了 BCS 超流体和分子 Bose-Einstein 凝聚(BEC)之间的转换^[8], 从而提供了研究 BCS-BEC 渡越过程的独特平台. 近年来在理论方面对光晶格中 BCS-BEC 渡越区的一些性质诸如布洛赫振荡^[9], 超流-绝缘体相变^[10,11], 集体激发^[12-16], 原子对的能隙^[17]等方面做了大量的研究, 其中超流费米气体在光晶格中的自囚禁、稳定性、局域化结构-能隙孤子特性^[18,19]等很多问题需要进一步探讨, 特别对在光晶格中超流费米气体的运输特性在 BEC 超流体和 BCS 超流体的差异还有待于深入研究.

本文主要研究在一维光晶格中超流费米气体的能隙孤子. 应用平均场理论和超流费米气体的流

体动力学模型, 采用分离变量法把三维方程化简到一维方程进行讨论. 通过变分法得到了超流费米气体在光晶格中存在带隙孤子的条件, 即原子间的非线性相互作用项与系统化学势以及晶格深度的相互关系, 并给出了超流费米气体的基态能隙孤子的布洛赫带的结构以及一些孤子空间分布, 通过变分与数值分析, 揭示了在一维情况下超流费米气体能隙孤子的存在性, 并发现超流费米气体能隙孤子在整个跨越区当系统从 BEC 端跨越到 BCS 端时孤子存在的条件与孤子空间分布存在明显的差别.

2. 物理模型

考虑一定数目的⁶Li 超流费米气体的原子, 将这些数目相等的不同自旋态的费米气体原子装载到一维光晶格中, 如果囚禁的原子数目足够多, 假定库珀对的空间尺度小于光晶格的空间尺度, 运用平均场理论和光晶格中超流费米气体在零温下系统从分子 BEC 超流体渡越到 BCS 超流体的流体动力学模型来描述^[20-25]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + C |\psi|^{2\gamma} + V(r) \right] \psi, \quad (1)$$

其中 ψ 是序参量, $M = 2m$, m 为单原子的质量, 库珀对的数目是费米原子数的一半. C 是依赖于原子

* 国家自然科学基金(批准号:10774120, 10975114)、甘肃省自然科学基金(批准号:1010RJA012)和西北师范大学科技创新工程基金(批准号:NWNU-KJXGC-03-17, NWNU-KJXGC-03-48)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn

相互作用的常数, γ 是相互作用参数 ζ 的函数, $\zeta = 1/k_F a_s$, k_F 是费米波矢, a_s 为原子间的散射长度. $V(r) = V_0 E_R \cos(2\pi x/d) + \frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2)$, $V(r)$ 为光晶格势, $E_R = \hbar^2 \pi^2 / 2M d^2$ 为光晶格的反冲能量, d 是晶格常数. 本文取 $d = 532 \text{ nm}$. V_0 为光晶格强度. 对于无量纲的物理量 $\zeta = 1/k_F a_s$, $\zeta \ll -1$ 为弱相互作用的 BCS 区域, $\zeta \gg 1$ 为弱相互作用的 BEC 区域, $|\zeta| < 1$ 为强关联区域. 在分子 BEC 一侧, $\gamma = 1$, $C = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}$; 在 BCS 一侧, $\gamma = 2/3$, $C = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} \beta}{2M}$; 其中在么正区 $\beta = 0.44$, 在 BCS 端 $\beta = 1$. $a = 0.6 a_s$ 是分子间的有效散射长度, 本文取 $a = 10 \text{ nm}$.

简化方程 (1) 到一维形式有几种不同的方法, 当原子处于基态时把波函数 ψ 分离变量, $\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, t) \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2a_{\perp}^2}\right)$, ω_{\perp} 指的是相应谐振子的频率, 其中 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(M\omega_{\perp})}$, a_{\perp} 为横向谐振子长度. 分离变量后把 ψ 代入到 (1) 中, 然后在横向平面内进行积分, 得到一维非线性薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \varphi_{xx} + \frac{C}{1+\gamma} |\varphi|^{2\gamma} \varphi - V_0 E_R \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right) \varphi, \quad (2)$$

其中 $\lambda = 2d$, φ 为波函数. 我们进一步把所有的有量纲的量无量纲化

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \sqrt{\frac{2N}{\lambda}} a_{\perp}^{-1} \tilde{\varphi}, \\ t &\equiv \frac{\lambda^2 M}{4\pi^2 \hbar} \tilde{t}, \\ x &\equiv \frac{\lambda}{2\pi} \tilde{x}, \end{aligned}$$

N 指的是原子数 ($N = \iiint |\psi|^2 dx dy dz$), 通过无量纲代换后得到

$$i\varphi_t = -\frac{1}{2} \varphi_{xx} + g |\varphi|^{2\gamma} \varphi - V_0 \cos(2x), \quad (3)$$

其中 $g = \frac{MC\lambda^{2-\gamma}}{4(\gamma+1)\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{2N}{a_{\perp}^2}\right)^{\gamma}$ 是原子之间有效的非线性相互作用, 对于方程 (3), 为了得到系统的基态解, 令 $\varphi(x, t) = \phi(x) \exp(-i\mu t)$, μ 是体系的化学势, 将其代入方程 (3) 可得基态方程

$$\mu\phi + \frac{1}{2} \phi'' - g\phi^{2\gamma}\phi + V_0 \cos(2x)\phi = 0. \quad (4)$$

方程 (4) 当非线性项 $g=0$ 时, 就是熟知的经典的马修方程. 基于马修方程的带隙能谱人们已经很了解了. 在图 1 中展示了在线性情况下费米气体的带隙结构. 虚线指的是 $V_0 = 5$. 在 I 与 II 区域内波函数不存在周期解. 光晶格强度 V_0 较小时在竖直方向布洛赫带相对较宽, 当 V_0 逐渐增大时带隙越来越窄, 说明化学势 μ 对光晶格强度 V_0 的变化比较敏感.

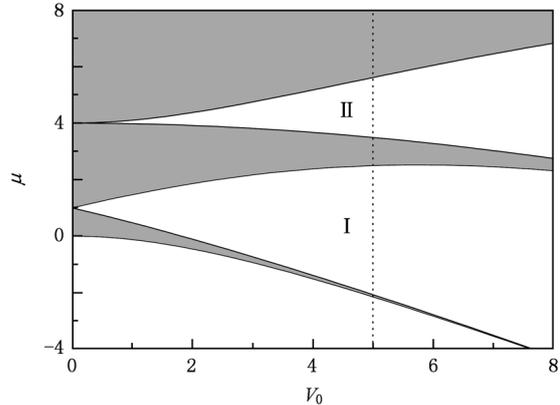


图 1 化学势 μ 随光晶格强度 V_0 变化的带隙图

在平均场理论的框架下, 我们在数值模拟时, 只要 (4) 解是收敛的, 我们就可以对费米气体做相应的分析. 对于费米超流体, 目的就是找到方程 (4) 的稳定的基态解 (包括化学势 μ). 我们知道要求解 (4) 的解析解是比较复杂的. 变分法是物理学中常用而且是比较有效的方法之一, 本文通过变分法找到费米原子的非线性相互作用项与化学势的关系, 进一步分析能隙孤子存在的条件.

3. 变分与数值分析

为了运用变分近似, 得到系统的能隙孤子的近似解, 我们采用高斯试探函数的形式^[26,27]

$$\phi(x) = \pi^{-1/4} \sqrt{\rho/W} \exp(-x^2/2W^2), \quad (5)$$

其中 $\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx$, W 是孤子的宽度. 把解 (5) 代入到方程 (3) 对应的拉格朗日函数

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\phi^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 - \frac{1}{\gamma+1} g\phi^{2(\gamma+1)} + V_0 \cos(2x)\phi^2 \right\} dx - \mu, \quad (6)$$

再进行积分, 得到

$$L = \mu(\rho - 1) - \frac{\rho}{4W^2} + V_0 \rho \exp(-W^2) - \frac{g}{\gamma+1} \left(\frac{\rho}{W\sqrt{\pi}}\right)^{(\gamma+1)} \sqrt{\frac{W^2\pi}{\gamma+1}}. \quad (7)$$

对 (7) 进行变分^[26,27], 即令 $\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$, 得到

$$1 + \frac{2\gamma g W^{2-\gamma}}{(\gamma + 1)^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{\gamma}{2}}} = 4V_0 W^4 \exp(-W^2), \quad (8)$$

$$\mu = \frac{1}{4W^2} + \frac{g}{(W\sqrt{\pi})^{\gamma+1}} \sqrt{\frac{W^2 \pi}{\gamma+1}} - V_0 \exp(-W^2). \quad (9)$$

方程 (8) 和 (9) 式是本文得到的非常重要的结果, 是带隙孤子对应的非线性作用项 g 与化学势 μ 和晶格深度 V_0 的关系式, 即存在带隙孤子的重要条件, 这也是分析孤子的布洛赫带隙结构和孤子分布的重要条件. 从 g 的表达式中可以看到, 给定一个 N 的值就对应一个 g 的值, 同时由 (8) 和 (9) 式可以确定对应的 μ 值. 当给定 V_0 时, 非线性项作用项 g 随系统化学势 μ 的变化而变化. 通过方程 (8) 和 (9), 以 W 为中间变量, 运用牛顿迭代法即可得到在整个 BEC-BCS 跨越区存在带隙孤子的非线性作用项 g 与化学势 μ 的关系曲线, 如图 2 所示.

图 2 中阴影部分是图 1 中当 $V_0 = 5$ 时所对应的带隙宽度. 在图 2 中也绘出了由条件 (8) 和 (9) 确定的带隙孤子对应的参数曲线. 从图 2 中我们看到

非线性相互作用项 g 的变化随着化学势 μ 和参数 γ 的变化非常明显, 在 BEC 端 ($\gamma = 1$) g 的变化曲率明显大于么正区 ($\gamma = 2/3$), 而且随着化学势 μ 的增大, 曲率变化的越明显. 对于给定的 μ , 显然存在带隙孤子的 g 在 BEC 端大于么正区.

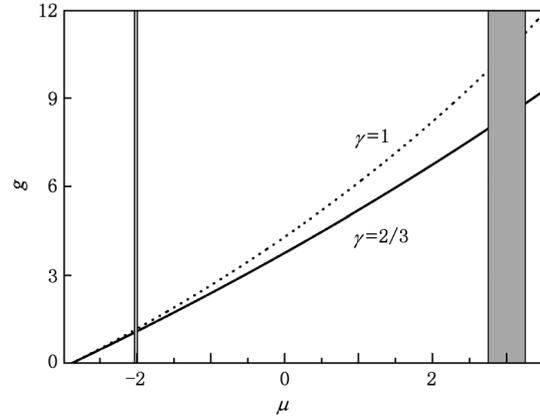


图 2 非线性项 g 随化学势 μ 变化曲线 ($V_0 = 5$)

作为例子, 图 3 中给出了利用变分法得到的在不同原子数 N 时所对应的孤子空间分布, 同时也给出了直接数值求解方程 (3) 所得结果. 显然变分

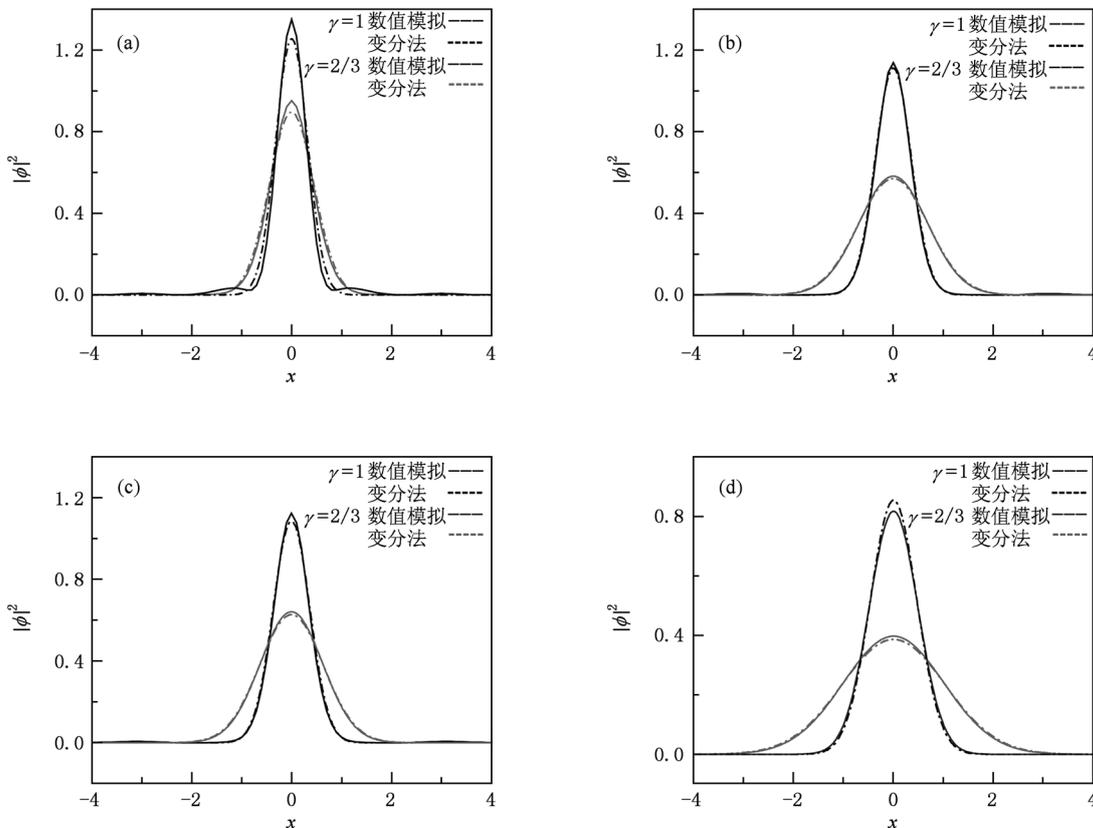


图 3 不同原子数下能隙孤子空间分布 (a) $N = 100$; (b) $N = 200$; (c) $N = 800$; (d) $N = 1200$

结果与数值结果符合的比较, 这进一步肯定了变分结果的可行性. 另外, 从图 3 中可以看出, 无论在 BEC 端还是在 BCS 端, 当原子数增加时, 孤子的空间分布越扩展. 对给定的原子数, 由于费米压力, 超流费米气体在 BCS 端的基态原子分布比 BEC 端较扩展, 而且在波包中心及其附近 BEC 端的原子数总是大于 BCS 端的原子数.

需要说明的是, 本文重点讨论超流费米气体在晶格势阱中的基本能隙孤子. 研究表明^[26,27], 在带隙深处 (远离带隙边界) 和弱非线性相互作用下, 高斯试探解可很好地描述束缚在单晶格势阱中的基本能隙孤子. 在带隙边界附近, 或当非线性相互作用足够强时, 能隙孤子将偏离高斯分布, 此时需要对高斯试探解进行修正^[26]. 另外, 能隙孤子的稳定性也是一非常重要的问题, 只有稳定的能隙孤子

才可在实验中观测到. 关于能隙孤子的稳定性分析, 一方面可以通过对能隙孤子添加微扰对方程 (3) 进行线性稳定性分析, 另一方面也可以通过对能隙孤子添加微扰对方程 (3) 进行数值求解验证能隙孤子的稳定性. 本文利用数值分析法来验证能隙孤子的稳定性. 对方程 (3), 采用 Crank-Nicholson 离散格式离散, 取时间和空间步长分别为 0.0001 和 0.025 进行数值计算. 发现本文变分法所得基本能隙孤子是稳定的 (这也是基本能隙孤子的特点^[26,27]). 以 $N=200$ 和 $N=800$ 为例图 4 展示了能隙孤子在扰动后随时间的演化. 从图 4 中可以看出, 这些基本能隙孤子是稳定的, 即能隙孤子在受到扰动后得以维持. 对更复杂的能隙孤子的变分分析以及对其稳定性的理论分析将另文做进一步深入讨论.

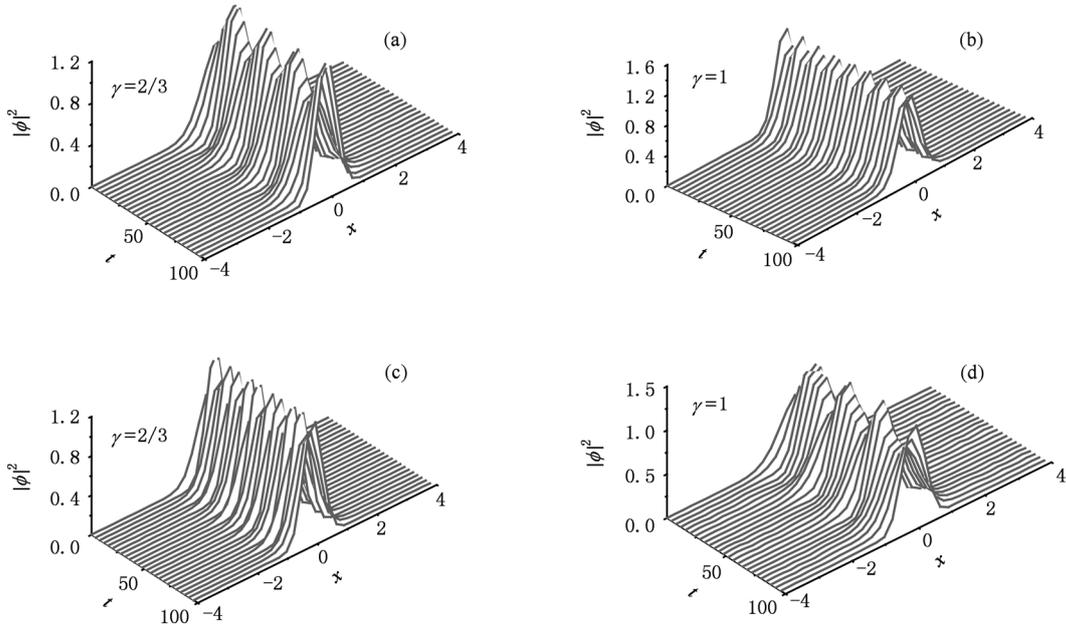


图 4 能隙孤子随时间的演化 (a) $\gamma=2/3, N=200$; (b) $\gamma=1, N=200$; (c) $\gamma=2/3, N=800$; (d) $\gamma=1, N=800$

4. 结 论

研究了在一维光晶格中超流费米气体的能隙孤子. 应用平均场理论和费米气体的流体动力学模型, 通过分离变量把三维方程简化到一维方程进行讨论. 利用变分法得到了在整个跨越区超流费米气体在光晶格中存在带隙孤子的条件, 即原子间的非线性相

互作用项与系统化学势以及晶格深度的相互关系. 通过变分与数值计算对超流费米气体的基态能隙孤子空间分布的分析与对比, 不仅揭示了在一维情况下超流费米气体能隙孤子的存在性, 而且发现超流费米气体能隙孤子在整个跨越区当系统从 BEC 端跨越到 BCS 端时存在带隙孤子的条件以及孤子空间分布存在明显的差异. 这对进一步认识超流费米气体在光晶格中的基态特性具有重要意义.

- [1] Greiner M 2003 *Nature* **426** 537
- [2] Regal C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040403
- [3] Hara K M, Hemmer S L, Gehm M E 2002 *Science* **298** 5601
- [4] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东、些征微、张卫平 2007 物理学报 **56** 6358]
- [5] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [6] Zhou L, Kong L B, Zhan M S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1601
- [7] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳、刘彬、傅立斌、赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
- [8] Chin J K 2006 *Nature* **443** 961
- [9] Rodriguez M, Torma P 2004 *Phys. Rev. A* **69** 041602 (R)
- [10] Zhai H, Ho T L 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 10042
- [11] Moon E G, Nikolić P, Sachdev S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 230403
- [12] Pitaevskii L P, Stringari S, Orso G 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053602
- [13] Kim Y E, Zubarev A L 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033612
- [14] Manini N, Salasnich L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033625
- [15] Wen W, Zhou Y, Huang G X 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033623
- [16] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0715
- [17] Chin C, Bartenstein M, Altmeyer A 2004 *Science* **305** 5687
- [18] Zhang A X, Xue J K 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043617
- [19] Xue J K, Zhang A X 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 180401
- [20] Kim Y E, Zubarev A L 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033612
- [21] Hu H, Minguzzi, Liu X J, Tosi M P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 190413
- [22] Heiselberg H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 040402
- [23] Bulgac A, Bertsch G F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 070401
- [24] Manini N, Salasnich L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033625
- [25] Astrakharchik G E, Combescot R, Leyronas X, Stringari S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 030404
- [26] Adhikari S K, Malomed B A 2007 *Europhys. Lett.* **79** 50003
- [27] Perez-Garcia V M, Michinel H, Cirac J I, Lewenstein M, Zoller P 1997 *Phys. Rev. A* **56** 1424

Gap solitons of a superfluid fermion gas in optical lattices*

Yang Shu-Rong Cai Hong-Qiang Qi Wei Xue Ju-Kui[†]

(Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Materials of Gansu Province, College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 19 September 2010; revised manuscript received 3 November 2010)

Abstract

Based on the hydrodynamic model, gap soliton of a superfluid fermion gas in optical lattices was discussed. By using the variational method, the condition for existing gap soliton is obtained. It is found that, when the system crosses from Bose-Einstein condensation side to the BCS side, the condition for existing gap soliton and the structure of gap soliton are very different.

Keywords: superfluid Fermi gas, optical lattices, gap solitons

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 03.75.Ss

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 10774120, 10975114), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (No. 1010RJZA012), and the Innovation Foundation of Science and Technology of Northwest Normal University, China (Grant Nos. NWNNU-KJXCXGC-03-17, NWNNU-KJXCXGC-03-48).

[†] Corresponding author. E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn