

线性延时反馈 Josephson 结的 Hopf 分岔和混沌化*

张立森[†] 蔡理 冯朝文

(空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2010年10月29日收到; 2011年3月1日收到修改稿)

考虑线性延时反馈控制下电阻-电容分路的 Josephson 结, 运用非线性动力学理论分析了受控系统平凡解的稳定性. 理论分析表明, 随着控制参数的改变, 系统的稳定平凡解将会通过 Hopf 分岔失稳, 并推导了发生 Hopf 分岔的临界参数条件. 对不同参数条件下受控系统的动力学进行了数值分析. 结果显示, 系统由 Hopf 分岔产生的稳定周期解, 将进一步通过对称破缺分岔和倍周期分岔通向混沌.

关键词: 约瑟夫森结, 线性延时反馈, Hopf 分岔, 混沌

PACS: 03.75.Lm, 02.30.Oz

1. 引言

Josephson 结是超导物理中的一种重要器件, 由于它的高频率、低功耗和高灵敏度等优良性能, 因此具有很好的应用潜力^[1-4]. Josephson 结是一种非线性器件, 其高度的非线性使其成为了一种研究复杂非线性现象的理想物理模型^[5]. Huberman 等首先对交流驱动的约瑟夫森结中的混沌现象进行了数值分析^[6]. 此后, Josephson 结及相关电路中的非线性动力学行为引起了许多学者的研究兴趣^[7-12]. 这些研究成果使我们对 Josephson 结工作的物理机理有了较多的认识.

最近, Josephson 结的混沌控制问题受到了研究者的关注^[13-15], 他们采用延时反馈、Backstepping 等方法对 Josephson 结中混沌运动进行了抑制. 在 Josephson 结的应用中, 如果混沌是有害的, 就需要采取一些控制措施来抑制它. 另一方面, 由于 Josephson 结的高度非线性和极高的工作频率 (THz 级), 可以用来产生高频的混沌振荡, 所以在混沌通信等领域有非常好的应用前景^[9]. 在这种情况下, 就需要人为地产生或加强 Josephson 结中的混沌行为. 因此, Josephson 结的混沌反控制 (即混沌化) 研究就是一件有意义的工作. 然而, 目前关于 Josephson 结反控制的研究尚不多见.

关于动力系统的混沌反控制问题, Chen 和 Wang 等^[16-18]进行了开创性的研究工作, 采用非线性反馈控制技术, 成功地实现了离散和连续时间系统的混沌化. 在此基础上, 任海鹏等^[19]提出了一种更为简单易行的混沌反控制方法. 该方法与 Pyragas^[20]提出的用于抑制混沌的延时反馈法具有相同的控制器结构. 他们采用数值仿真的手段验证了该混沌反控制方法的有效性, 但没有对控制机理进行完备的理论分析.

本文深入分析了线性延时反馈下电阻-电容分路 Josephson 结中的平凡解、Hopf 分岔和混沌行为. 其中, 延时反馈可以是以混沌化为目的而人为施加的, 也可能来自 Josephson 结电路中互连线上延时耦合等因素的影响^[21]. 因此, 这一类含延时反馈的 Josephson 结系统随参数改变时的动力学演化过程是亟待研究的问题.

2. Josephson 结线性延时反馈控制模型

直流偏置的电阻-电容分路 Josephson 结的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\alpha}{dt_0} &= V, \\ C \frac{dV}{dt_0} &= I_d - I_c \sin\alpha - \frac{V}{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2008AAJ225) 和空军工程大学研究生科技创新计划 (批准号: Dx2010405) 资助的课题.

[†]E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn

其中, α, V 分别为 Josephson 结的超导序参数位相差和结电压, C, R 分别为分路电容和电阻. $\Phi_0 = h/2e$ 为磁通量子, I_c, I_d 分别为 Josephson 结的临界电流和直流偏置电流. 方程(1)描述的是一个二阶自治系统, 根据非线性动力学理论可知, 它的动力学行为是平庸的.

为了对系统(1)实施反控制, 现引入一个线性的延时反馈, 其控制原理图如图 1 所示. 图 1 中虚线框内为 Josephson 结的等效电路, 其他为控制电路, 其中 D 代表延时单元.

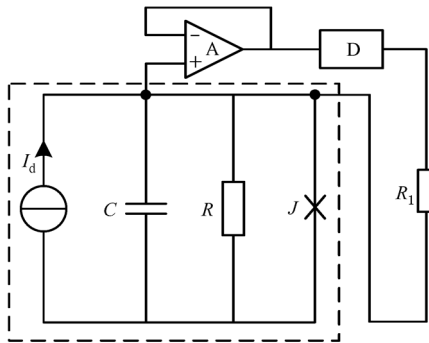


图 1 Josephson 结的线性延时反馈原理图

由图 1 可得受控 Josephson 结系统状态方程的无量纲形式为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\sin x_1(t) - \beta x_2(t) + i_d \\ &\quad + k[x_2(t - \tau) - x_2(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $x_1 = \alpha, x_2 = V/(I_c R), t = \omega_c t_0, \omega_c = 2\pi I_c R/\Phi_0, \beta = 2\pi I_c R^2 C/\Phi_0 > 0, i_d = I_d/I_c. \tau \geq 0$ 为时间延时量, k 为反馈增益, $k > 0$ 时为正反馈, $k < 0$ 时为负反馈.

3. 理论分析

下面分析延时反馈控制参数 k, τ 对系统动力学的影响. 由方程(2)可知, 延时反馈项不改变系统原有的平衡点. 即当 $|i_d| < 1$ 时, 系统有稳定的平衡点(平凡解)为

$$Q = (2m\pi + \arcsin i_d, 0),$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots$. 系统(2)在平衡点处的特征方程为

$$\lambda^2 + (\beta + k)\lambda + c - k\lambda e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3)$$

其中 $c = \sqrt{1 - i_d^2} > 0$.

首先考虑平衡点 Q 的稳定性变化情况. 当 $\tau = 0$ 时, 方程(2)退化成未受控系统, 同时注意到 $\beta > 0, c > 0$, 所以此时特征方程(3)具有两个实部小于零的特征根, 即 Q 是稳定(或渐近稳定)平衡点. 当 $\tau > 0$ 时, 设 $\lambda = \rho + \omega i$ 为特征方程(3)的一个特征根, 其中 ρ, ω 均为实数. 由于复特征根总是以共轭对出现, 这里不妨假设 $\omega > 0$. 将 $\lambda = \rho + \omega i$ 代入(3)式, 并分离实部和虚部, 得

$$\begin{aligned} \rho^2 + (\beta + k)\rho + c - \omega^2 \\ - k e^{-\rho\tau} [\rho \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)] &= 0, \\ 2\rho\omega + (\beta + k)\omega \\ - k e^{-\rho\tau} [\omega \cos(\omega\tau) - \rho \sin(\omega\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

当稳定平凡解 Q 随着延时量 τ 的增加而失稳时, 必然伴随着方程(3)的一个特征根的实部由负数变为正数. 考虑临界状态, 即实部变为零时的情形, 将 $\rho = 0$ 代入(4)式得

$$\begin{aligned} c - \omega^2 - k\omega \sin(\omega\tau) &= 0, \\ (\beta + k)\omega - k\omega \cos(\omega\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式消去 τ , 经整理得到

$$\omega^4 + (\beta^2 + 2\beta k - 2c)\omega^2 + c^2 = 0. \quad (6)$$

方程(6)的根有以下两种情形:

1) 没有正实根, k 满足 $\beta^2 + 2\beta k - 2c \geq 0$ 或 $(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2 < 0$, 即

$$k > -\beta/2, \quad (7)$$

此时特征方程(3)没有纯虚根. 而方程(3)中具有负实部特征根的个数仅当特征根变为纯虚数时才会发生改变^[22], 所以当 k 满足(7)式时, 平凡解的稳定性保持不变.

2) 存在正实根, k 满足 $\beta^2 + 2\beta k - 2c < 0$ 且 $(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2 \geq 0$, 即

$$k \leq -\beta/2. \quad (8)$$

此时特征方程(3)存在纯虚根, 其虚部为

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{-(\beta^2 + 2\beta k - 2c) \pm \sqrt{(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2}}{2}}. \quad (9)$$

注意到 $k < 0$, 且

$$c - \omega^2 = \begin{cases} \frac{\beta^2 + 2\beta k - \sqrt{(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2}}{2} < 0, \\ (\omega = \omega_1), \\ \frac{\beta^2 + 2\beta k + \sqrt{(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2}}{2} > 0, \\ (\omega = \omega_2), \end{cases}$$

为了便于分析并且不失一般性, 这里取 $0 < \omega\tau < 2\pi$.

于是,由(5)式可解得

$$\tau_i = \begin{cases} \frac{1}{\omega_1} \arccos \frac{\beta + k}{k}, & (i = 1), \\ \frac{1}{\omega_2} (2\pi - \arccos \frac{\beta + k}{k}), & (i = 2). \end{cases} \quad (10)$$

同时,由(3)式可计算得

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-\lambda^2[\lambda^2 + (\beta + k)\lambda + c]}{\lambda(2\lambda + \beta + k) + (\lambda\tau - 1)[\lambda^2 + (\beta + k)\lambda + c]}$$

从而有

$$\left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{\rho=0} = \begin{cases} \frac{\omega^2 \sqrt{(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2}}{A} > 0, & (\omega = \omega_1), \\ \frac{-\omega^2 \sqrt{(\beta^2 + 2\beta k - 2c)^2 - 4c^2}}{A} < 0, & (\omega = \omega_2), \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$A = [-k + (\beta + k)\cos(\omega\tau) - 2\omega\sin(\omega\tau)]^2 + [\omega\tau k + 2\omega\cos(\omega\tau) + (\beta + k)\sin(\omega\tau)]^2.$$

由以上的分析可知,当 k 满足(8)式时,特征方程(3)存在纯虚根,而且(11)式表明此时系统满足横截条件.根据 Hopf 分岔理论^[23],当 $k \leq -\beta/2$ 时,受控系统(2)将在 (k, τ_1) 和 (k, τ_2) 处发生 Hopf 分岔.进一步根据平衡点在临界(分岔)点处的稳定性以及 $\left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{\rho=0}$ 的符号可判断:系统(2)在 (k, τ_1) 处发生超临界 Hopf 分岔,产生出稳定的极限环;在 (k, τ_2) 处发生亚临界 Hopf 分岔,产生不稳定的极限环.

综上所述,平凡解 Q 稳定的参数区域 S 为

$$S = \{(k, \tau) | k > -\frac{\beta}{2}, \tau > 0\} \cup \{(k, \tau) | k \leq -\frac{\beta}{2}, 0 < \tau < \tau_1\} \cup \{(k, \tau) | k \leq -\frac{\beta}{2}, \tau_2 < \tau < 2\pi/\omega_2\}. \quad (12)$$

不稳定的参数区域 U 为

$$U = \{(k, \tau) | k \leq -\frac{\beta}{2}, \tau_1 < \tau < \tau_2\}. \quad (13)$$

发生超临界、亚临界 Hopf 分岔的参数边界 L_1, L_2 分别为

$$L_1 = \{(k, \tau) | k \leq -\frac{\beta}{2}, \tau = \tau_1\},$$

$$L_2 = \{(k, \tau) | k \leq -\frac{\beta}{2}, \tau = \tau_2\}. \quad (14)$$

由以上分析结果可得平凡解 Q 在控制参数平面 (k, τ) 上的稳定性分布情况如图 2 所示,其中系统参数取 $\beta = 1.0, i_d = 0$. 图 2 中实线、虚线分别代表 τ_1, τ_2 的取值.当选取参数在 S 区域内时,系统有稳定的平凡解;当选取参数在边界 L_1 右侧且靠近 L_1 时,系统在稳定平凡解周围通过超临界 Hopf 分岔产生出稳定的极限环;当选取参数在边界 L_2 右侧且靠近 L_2 时,系统有稳定的平凡解和由亚临界 Hopf 分岔产生的不稳定极限环.值得注意的是,如果取参数在边界 L_1 右侧且离 L_1 较远(但仍然在区域 U 内)时,极限环还可能逐渐演化成混沌振荡,下面的数值计算结果证实了这一点.

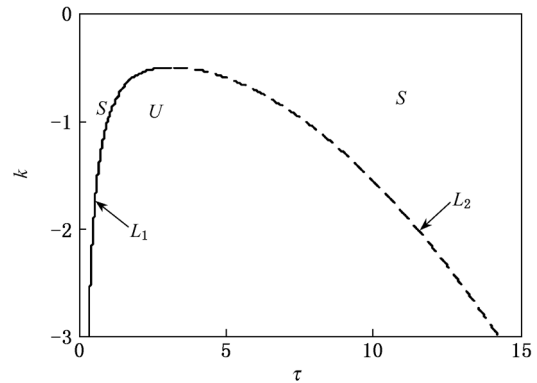


图 2 平凡解在参数平面 (k, τ) 上的稳定性分布

4. 数值仿真实验

以上解析分析了线性延时反馈 Josephson 结系统中平凡解的稳定性,以及平凡解由 Hopf 分岔产生周期解(甚至混沌解)的参数区域.下面将进一步通过数值计算来验证理论分析结果.在数值计算中, β, i_d 的取值同上,采用四阶 Runge-Kutta 积分算法,积分步长取 $\Delta t = 0.001$.

系统随延时反馈控制参数 τ, k 变化的分岔图分别如图 3(a)和图 3(b)所示,图中纵轴 $x_{2, \min}$ 表示取系统状态变量 x_2 的局部极小值.

4.1. Hopf 分岔

首先分析系统中的超临界 Hopf 分岔.图 3(a)所示为固定 $k = -0.7 < -\beta/2$, 延时量 τ 对系统动力学的影响.从图中可知,当 τ 位于 p_1 点之前,系统运行在稳定的平衡点;当 τ 越过 p_1 点后,系统中出

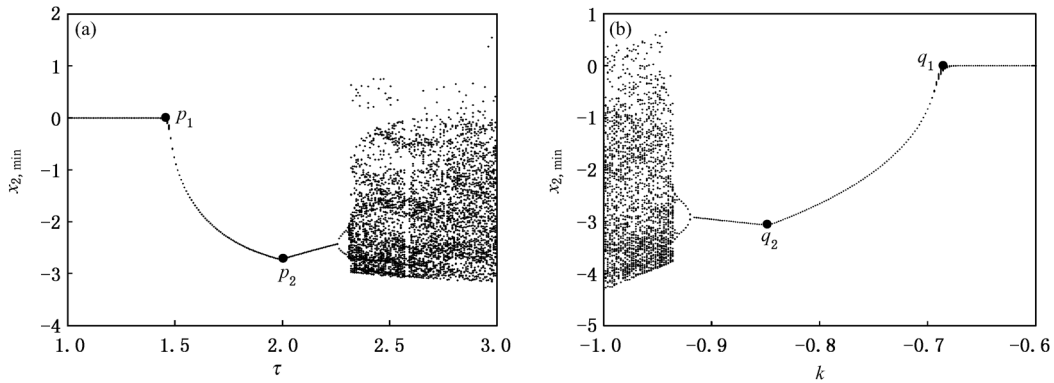


图3 系统随反馈控制参数变化的分岔图 (a) τ 为分岔参数; (b) k 为分岔参数

现稳定的周期振荡. 通过放大坐标横轴可得临界点 p_1 对应的参数值为 $\tau \approx 1.455$, 同时由(10)式计算得系统发生超临界 Hopf 分岔参数的理论值为 $\tau_1 = 1.4752$, 两者近似相等. 系统状态变量在分岔点 p_1 附近的时域波形和相图如图4所示. 当取 $\tau = 1.375 < \tau_1$ 时, 系统经过暂态过程后逐渐收敛到平衡点; 当取 $\tau = 1.575 > \tau_1$ 时, 系统经过暂态过程后运行在稳定的极限环上. 可见, 数值结果与理论分析结果保持了一致.

另外, 当 τ 在图2中边界 L_2 右侧附近取值时, 系统将发生亚临界 Hopf 分岔. 当 $k = -0.7$ 时, 通过(10)式求得 $\tau_2 = 5.8280$, 所以这里取 $\tau = 5.928$, 其数值结果如图5所示. 当初值较小时, 系统的状态逐渐趋于平衡点, 如图5(a)所示; 当初值较大时, 系统开始运行在一个不稳定的极限环上, 其幅值不断增大, 系统逐渐失稳, 如图5(b)所示.

同样, 如图3(b)所示, 当固定 $\tau = 1.50$, 随着 k 值的减小系统也会在 q_1 点发生 Hopf 分岔. 此时, 通

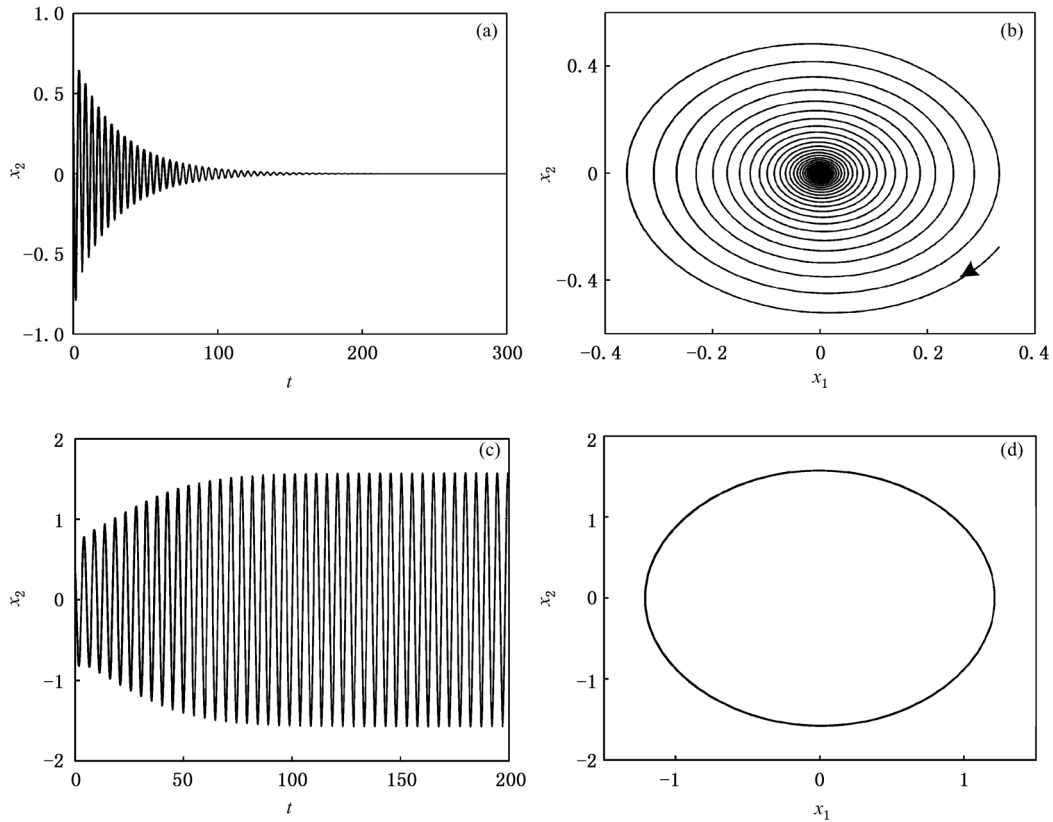


图4 系统的超临界 Hopf 分岔 $k = -0.7$, (a) $\tau = 1.375$ 时平凡解的时域波形和(b)相图; (c) $\tau = 1.575$ 时周期解的时域波形和(d)相图

过(10)式可计算得发生超临界 Hopf 分岔时 k 的理论值为 $k = -0.6912$. 而数值计算得到的分岔点为 $k = -0.686$, 与理论分析结果相符. 与图 4 的结果

类似, 在 q_1 点前后, 系统也会出现由稳定平衡点向稳定周期振荡状态的过渡.

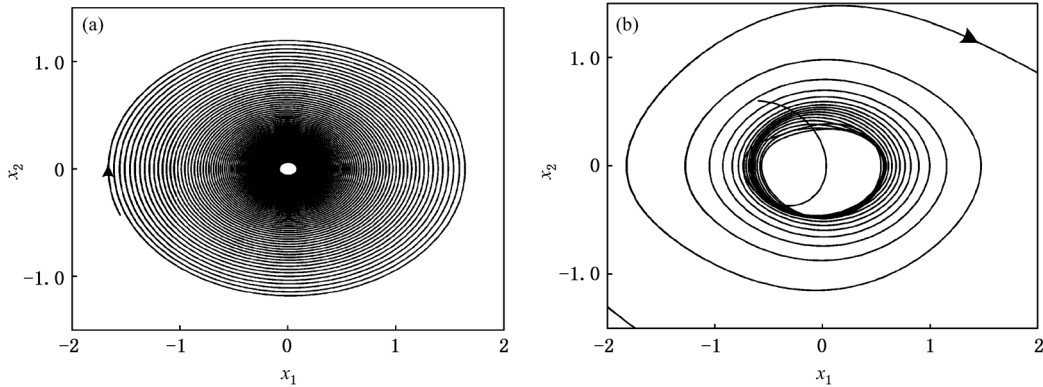


图 5 系统的亚临界 Hopf 分岔 $\tau = 5.928$, (a) 初值取 (0.1, 0.1); (b) 初值取 (0.5, 0.5)

4.2. 系统混沌化的道路

图 3 (a) 的结果表明, 在系统发生 Hopf 分岔后, 随着 τ 值的进一步增加, 稳定的极限环会逐渐演化成为混沌振荡. 而且, 在进入混沌状态之前, 系统经历了两种分岔过程: 对称破缺分岔和倍周期分岔.

从图 3(a) 可以看到, 分岔曲线在 p_2 点出现了

转折, 系统状态的这种转折往往意味着分岔现象的发生. 实际上, 我们发现系统在 p_2 点处发生了对称破缺分岔, 分岔点的参数值为 $\tau \approx 1.99$. 在 p_1 点和 p_2 点之间, 系统的周期解都是关于原点对称的, 如图 4(d) 所示. 而在 p_2 点之后, 系统由对称破缺分岔产生出一对共轭的非对称的周期解, 其中的一个如图 6(a) 所示. 对比图 4(d) 可以看出, 分岔后周期解的对称性明显降低了.

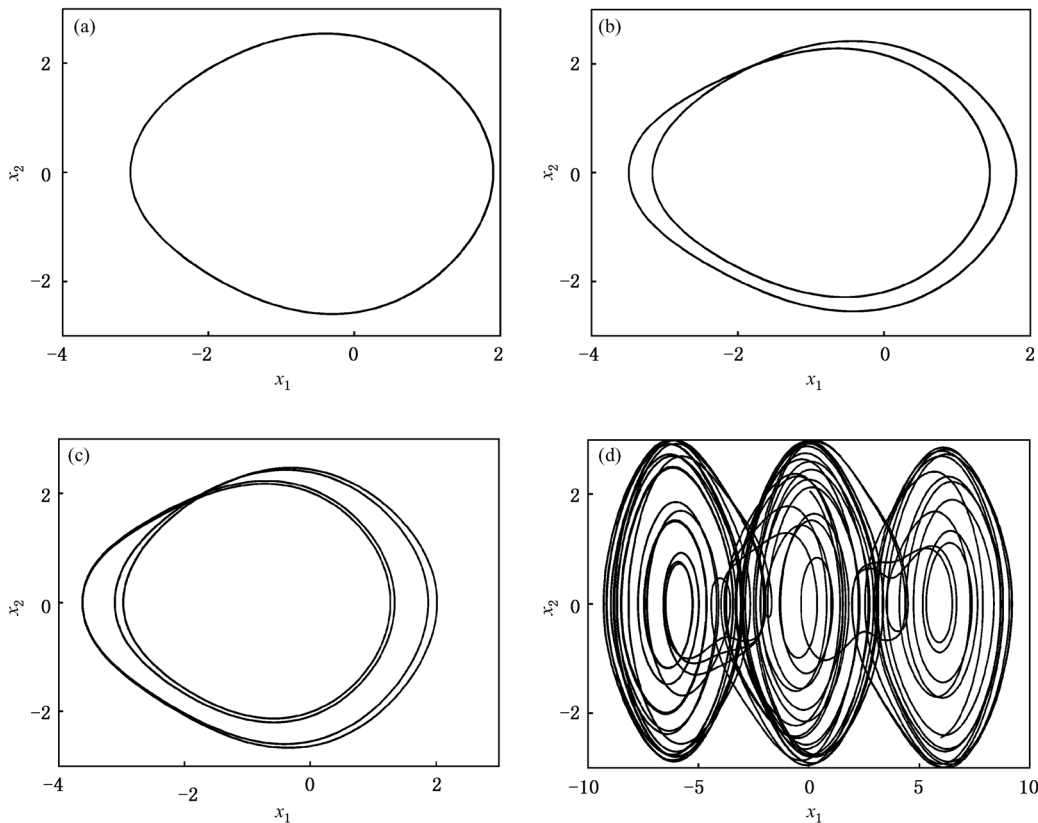


图 6 系统混沌化的倍周期分岔过程 (a) 周期 1, $\tau = 2.10$; (b) 周期 2, $\tau = 2.27$; (c) 周期 4, $\tau = 2.30$; (d) 混沌, $\tau = 2.40$

在对称破缺分岔之后,随着 τ 的增加,非对称周期解在较窄的参数范围内又经历了一个倍周期级联过程,直至进入混沌状态.系统状态倍周期分岔过程中的典型相图分别如图6(b)—(d)所示.同样,如图3(b)所示,如果固定 τ 值,系统会随着 k 的减小而相继发生对称破缺分岔和倍周期分岔,最终也会进入混沌状态.

综上所述,随着延时反馈参数的变化,系统混沌化的过程为:首先,稳定的平凡解通过Hopf分岔产生出稳定的周期振荡;然后,周期解再经历对称破缺分岔和倍周期分岔过程进入混沌.

5. 结 论

采用线性延时反馈方法,对直流偏置下电阻-电

容分路的Josephson结进行了反控制研究.首先,通过理论推导分析了控制参数(延时量和反馈增益)对系统平凡解稳定性的影响,得到了平凡解保持稳定的参数范围,以及系统发生Hopf分岔的条件和临界参数值.对Josephson结受控系统的分岔情况,以及分岔点附近的动力学进行了数值分析.结果表明,线性延时反馈控制的Josephson结随控制参数的改变呈现出丰富的动力学行为.在一定的参数条件下,系统的平凡解会通过超临界或亚临界Hopf分岔失稳.其中,由超临界Hopf分岔产生出的稳定周期解会进一步经历对称破缺分岔和倍周期分岔而通向混沌.研究结果对含线性延时反馈Josephson结的动力学有了深刻认识,并且对Josephson结的混沌反控制及其应用提供了理论基础.

- [1] Winkler D 2003 *Supercond. Sci. Technol.* **16** 1583
- [2] Chiorescu I, Nakamura Y, Harmans C J P M, Mooij J E 2003 *Science* **299** 1869
- [3] Bens S P, Hamilton C A 2004 *Proc. IEEE* **92** 1617
- [4] Golod T, Rydh A, Krasnov V M 2010 *Physica C* **470** 890
- [5] Nayak C R, Kuriakose V C 2008 *Chaos* **18** 013125
- [6] Huberman B A, Crutchfield J P, Packard N H 1980 *Appl. Phys. Lett.* **37** 750
- [7] Octavio M 1984 *Phys. Rev. B* **29** 1231
- [8] Wang Z Y, Liao H Y, Zhou S P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1996 (in Chinese) [王震宇、廖红印、周世平 2001 物理学报 **50** 1996]
- [9] Dana S K, Sengupta D C, Edoh K D 2001 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **48** 990
- [10] Lei Y M, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3342 (in Chinese) [雷佑铭、徐伟 2008 物理学报 **57** 3342]
- [11] Zhang L S, Cai L, Feng C W 2010 *Acta Elec. Sin.* **38** 1311 (in Chinese) [张立森、蔡理、冯朝文 2010 电子学报 **38** 1311]
- [12] Zhang L S, Cai L, Feng C W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030308 (in Chinese) [张立森、蔡理、冯朝文 2011 物理学报 **60** 030308]
- [13] Feng Y L, Shen K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 111
- [14] Vincent U E, Ucar A, Laoye J A, Kareem S O 2008 *Physica C* **468** 374
- [15] Njah A N, Ojo K S, Adebayo G A, Obawole A O 2010 *Physica C* **470** 558
- [16] Chen G, Lai D 1998 *Int. J. Bifur. Chaos* **8** 1585
- [17] Wang X F, Chen G, Yu X 2000 *Chaos* **10** 771
- [18] Wang X F, Chen G 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **50** 812
- [19] Ren H P, Liu D, Han C Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2694 (in Chinese) [任海鹏、刘丁、韩崇昭 2006 物理学报 **55** 2694]
- [20] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [21] Nayak C R, Kuriakose V C 2008 *Chaos* **18** 023129
- [22] Belair J, Campbell S A 1994 *SIAM J. Appl. Math.* **54** 1402
- [23] Liu C X 2007 *Nonlinear Circuit Theory and its Applications* (Xi'an; Xi'an Jiaotong University Press) p98 (in Chinese) [刘崇新 2007 非线性电路理论及应用(西安:西安交通大学出版社)第98页]

Hopf bifurcation and chaotification of Josephson junction with linear delayed feedback^{*}

Zhang Li-Sen[†] Cai Li Feng Chao-Wen

(School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

(Received 29 October 2010; revised manuscript received 1 March 2011)

Abstract

In this paper, a resistive-capacitive-shunted Josephson junction with linear delayed feedback is considered. The stability of trivial solution of the controlled system is analyzed using nonlinear dynamics theory, and the theoretical results show that the stable trivial solution of the system will lose its stability via Hopf bifurcation as control parameter varies. The critical parameter condition of Hopf bifurcation is also derived. Numerical analysis of the controlled system is carried out under different parameter conditions, and the results show that the stable periodic solution generated by supercritical Hopf bifurcation may transit to chaos gradually through a process of symmetry-breaking bifurcation and period-doubling bifurcation.

Keywords: Josephson junction, linear delayed feedback, Hopf bifurcation, chaos

PACS: 03.75.Lm, 02.30.Oz

^{*} Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AAJ225) and the Science and Technology Innovation Program for Graduates of Air Force Engineering University, China (Grant No. Dx2010405).

[†] E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn