无截断薄膜模型与 Dirac 场的黑洞熵*

杨学军[1)†] 赵 峥[2)]

1)(绍兴文理学院物理与电子信息系,绍兴 312000)

2)(北京师范大学物理系,北京 100875)

(2010 年 7 月 21 日收到;2010 年 8 月 6 日收到修改稿)

计算黑洞熵的砖墙模型被改进为薄膜模型后其物理思想更直接而明了,且突出了事件视界作为静态或稳态黑洞特征面的重要性. 但为避免发散,薄膜模型同样需要引入紫外截断因子. 截断因子的引入非常人为,至今没有给以合理的解释. 有文献将广义不确定关系引入黑洞熵的计算而不需要任何截断便可避免发散. 本文以静态球对称黑洞 Dirac 场的熵的计算为例,阐述了无截断薄膜模型及其与有截断薄膜模型的本质区别.

关键词: 黑洞熵, 无截断薄膜模型, 广义不确定关系, Dirac 场

PACS: 04.70.Dy, 04.62.+v, 97.60.Lf

1. 引 言

1985 年,t'Hooft 提出的砖墙模型[1]给出了黑洞熵的一种统计解释. 后来砖墙模型被改进为薄膜模型[2—8],其物理思想比砖墙模型直接而明了,更突出了事件视界作为静态或稳态黑洞特征面的重要性. 但为避免发散,薄膜模型同样需要引入紫外截断因子. 无论砖墙模型还是薄膜模型,人为引入截断因子,至今没有给以合理的解释. 李[9]的工作表明,在统计量子态密度时若考虑了广义不确定关系的影响将不需要任何截断便可避免砖墙模型或薄膜模型的态密度发散. 本文以静态球对称黑洞 Dirac 场的熵的计算为例,阐述了无截断薄膜模型及其与有截断的薄膜模型的本质区别. 先简单介绍广义不确定原理,而后给出考虑广义不确定关系后对静态球对称黑洞 Dirac 场的熵的计算,最后讨论了无截断薄膜模型和有截断薄膜模型.

2. 广义不确定关系

广义不确定关系的提出缘于量子引力理论和微扰弦理论. 微扰量子引力理论的主要问题之一是: 将引力场作为一种给定背景下的物质场引入量子场论时有源情况下会出现不可重整化的困难. 长期以来,人们相信引力效应会导致一个最小可观测距离的存在,这个最小长度的尺度为 Planck 长度的量级,而且认为如果真是这样,引力重整化的问题会迎刃而解. 非微扰量子引力理论也得出空间能被量子化为 Planck 网格的结论[10]. 弦理论与此类似[11—14],认为不能探测到比弦尺度 $l_S \equiv \sqrt{\lambda}$ 更小的空间距离,l_S 也为 Planck 长度的量级. 因此,人们普遍认定最小空间距离的存在而且认为这个最小空间长度应该用量子理论描述为空间位置的最小不确定量,为此而提出了广义的正则变量的对易关系

$$[\hat{x},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\left(1 + \frac{\lambda}{\hbar^2}\hat{p}^2\right), \tag{1}$$

由(1)式能得到广义不确定关系

$$\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{\lambda}{\hbar}\Delta p, \tag{2}$$

上式以 Δp 为自变量求 Δx 的极值可得

$$\Delta x \geqslant 2\sqrt{\lambda}, \tag{3}$$

即存在最小空间不确定量,也就是最小空间长度 $2\sqrt{\lambda}$.

广义不确定关系受到人们的普遍重视并得到一系列令人满意的结果[15—17],特别需要提到其对量子场态密度的计算[17]和黑洞熵计算[6,9,18,19]的影响.

众所周知,用半经典方法描述量子态时,若采

* 国家自然科学基金(批准号:10873003,11045005)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090739)资助的课题.

† E-mail:yang_xue_jun@163.com

用通常的不确定关系 $\Delta x\Delta p\geqslant 2\pi\hbar$,则在粒子相空间中的体元 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$ 内的量子态数为

$$\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{4}$$

若用广义不确定关系式(2),文献[17]给出如下的量子态数

$$\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3}, \tag{5}$$

其中,$p^2\equiv p_1^2+p_2^2+p_3^2$;当用于弯曲时空时 $p^2\equiv p_ip^i=g^{i\mu}p_ip_\mu$,$g^{i\mu}$ 为度规的逆变分量,$i=1,2,3$,$\mu=0,1,2,3$.

3. 静态球对称黑洞 Dirac 场的黑洞熵

先通过计算静态球对称黑洞视界面上的 Planck 薄层内质量为 μ 的 Dirac 场的熵来得到黑洞熵. 由如下静态球对称度规:

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{6}$$

可以求得非零联络如下:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{00}=\frac{1}{2}f(r)f'(r),\\
&\Gamma^1_{11}=-\Gamma^0_{10}=-\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)},\\
&\Gamma^1_{22}=-f(r)r,\\
&\Gamma^1_{33}=-f(r)r\sin^2\theta,\\
&\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^3_{23}=\cot\theta,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $f'(r)\equiv\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$. 选取如下的零标架:

$$\begin{aligned}
&l^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-f(r),0,0],\\
&n^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}[f^{-1}(r),1,0,0],\\
&m^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0,0,-1,-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\right),\\
&\bar{m}^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0,0,-1,\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

弯曲时空中 Dirac 旋量场方程为[20—22]

$$\begin{aligned}
&(D+\varepsilon-\rho)F_1+(\bar{\delta}+\pi-\alpha)F_2=\mathrm{i}\frac{\mu}{\sqrt{2}}G_1,\\
&(\Delta+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=\mathrm{i}\frac{\mu}{\sqrt{2}}G_2,\\
&(D+\bar{\varepsilon}-\bar{\rho})G_2-(\delta+\bar{\pi}-\bar{\alpha})G_1=\mathrm{i}\frac{\mu}{\sqrt{2}}F_2,\\
&(\Delta+\bar{\mu}-\bar{\gamma})G_1-(\bar{\delta}+\bar{\beta}-\bar{\tau})G_2=\mathrm{i}\frac{\mu}{\sqrt{2}}F_1,
\end{aligned} \tag{9}$$

其中,F_1,F_2,G_1,G_2 为 Dirac 场的 4 个旋分量;$\varepsilon,\alpha,\gamma,\beta,\rho,\pi,\mu,\tau$ 均为 Newman-Penrose 旋系数,其定义分别如下[20,21]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon=\frac{1}{2}(l_{\mu;v}n^\mu l^v-m_{\mu;v}\bar{m}^\mu l^v),\\
&\alpha=\frac{1}{2}(l_{\mu;v}n^\mu\bar{m}^v-m_{\mu;v}\bar{m}^\mu\bar{m}^v),\\
&\gamma=\frac{1}{2}(l_{\mu;v}n^\mu n^v-m_{\mu;v}\bar{m}^\mu n^v),\\
&\beta=\frac{1}{2}(l_{\mu;v}n^\mu m^v-m_{\mu;v}\bar{m}^\mu m^v),\\
&\rho=l_{\mu;v}m^\mu\bar{m}^v,\pi=-n_{\mu;v}\bar{m}^\mu l^v,\\
&\mu=-n_{\mu;v}\bar{m}^\mu m^v,\tau=l_{\mu;v}m^\mu n^v,
\end{aligned} \tag{10}$$

$\bar{\varepsilon},\bar{\alpha},\bar{\gamma},\bar{\beta},\bar{\rho},\bar{\pi},\bar{\mu},\bar{\tau}$ 分别为相应的复共轭;$D,\Delta,\delta,\bar{\delta}$ 均为零标架内禀导数算子,其定义由下式给出[20,21]

$$\begin{aligned}
&D:=l^\mu\partial_\mu,\\
&\Delta:=n^\mu\partial_\mu,\\
&\delta:=m^\mu\partial_\mu,\\
&\bar{\delta}:=\bar{m}^\mu\partial_\mu,
\end{aligned} \tag{11}$$

将联络(7)式和零标架(8)式代入(10)式可求得非零旋系数

$$\begin{aligned}
&\varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}}f'(r),\\
&\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}r}f(r),\\
&\alpha=-\beta=-\frac{1}{2\sqrt{2}r}\cot\theta,\\
&\mu=-\frac{1}{\sqrt{2}r},
\end{aligned} \tag{12}$$

将零标架(8)式代入导数算子定义式(11)式可得到

$$\begin{aligned}
&D=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\sqrt{2}}f(r)\frac{\partial}{\partial r},\\
&\Delta=\frac{1}{\sqrt{2}}f^{-1}(r)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial r},\\
&\delta=-\frac{1}{\sqrt{2}r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
&\bar{\delta}=-\frac{1}{\sqrt{2}r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned} \tag{13}$$

将(12),(13)式代入 Dirac 旋量方程(9)可得

$$\left[r\frac{\partial}{\partial t}-rf(r)\frac{\partial}{\partial r}+B\right]F_1-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)F_2=\mathrm{i}\mu rG_1,$$
$$\left[rf^{-1}(r)\frac{\partial}{\partial t}+r\frac{\partial}{\partial r}-1\right]F_2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)F_1=\mathrm{i}\mu rG_2,$$
$$\left[r\frac{\partial}{\partial t}-rf(r)\frac{\partial}{\partial r}+B\right]G_2+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)G_1=\mathrm{i}\mu rF_2,$$
$$\left[rf^{-1}(r)\frac{\partial}{\partial t}+r\frac{\partial}{\partial r}-1\right]G_1+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)G_2=\mathrm{i}\mu rF_1, \tag{14}$$

其中 $B\equiv\frac{1}{2}rf'(r)+f(r)$. 令

$$F_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_1(r,\theta,\varphi),$$
$$F_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_2(r,\theta,\varphi),$$
$$G_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g_1(r,\theta,\varphi),$$
$$G_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g_2(r,\theta,\varphi). \tag{15}$$

将(15)式代入(14)式得

$$\left[-\mathrm{i}\omega r-rf(r)\frac{\partial}{\partial r}+B\right]f_1-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)f_2=\mathrm{i}\mu rg_1,$$
$$\left[-\mathrm{i}\omega rf^{-1}(r)+r\frac{\partial}{\partial r}-1\right]f_2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)f_1=\mathrm{i}\mu rg_2,$$
$$\left[-\mathrm{i}\omega r-rf(r)\frac{\partial}{\partial r}+B\right]g_2+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)g_1=\mathrm{i}\mu rf_2,$$
$$\left[-\mathrm{i}\omega rf^{-1}(r)+r\frac{\partial}{\partial r}-1\right]g_1+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\cot\theta\right)g_2=\mathrm{i}\mu rf_1, \tag{16}$$

再令

$$f_1\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{11}(r,\theta,\varphi)},$$
$$f_2\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{12}(r,\theta,\varphi)},$$
$$g_1\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{21}(r,\theta,\varphi)},$$
$$g_2\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{22}(r,\theta,\varphi)}, \tag{17}$$

将(17)式代入(16)式并用 WKB 近似得到

$$A_1f_1-A_2f_2=Eg_1,$$
$$B_1f_2-B_2f_1=Eg_2,$$
$$C_1g_2+C_2g_1=Ef_2,$$
$$D_1g_1+D_2g_2=Ef_1, \tag{18}$$

其中

$$A_1\equiv-\omega r-rf(r)p_{11r},$$
$$A_2\equiv p_{12\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}p_{12\varphi},$$
$$B_1\equiv-\omega rf^{-1}(r)+rp_{12r},$$
$$B_2\equiv p_{11\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}p_{11\varphi},$$
$$C_1\equiv-\omega r-rf(r)p_{22r},$$
$$C_2\equiv p_{21\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}p_{21\varphi},$$
$$D_1\equiv-\omega rf^{-1}(r)+rp_{21r},$$
$$D_2\equiv p_{22\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}p_{22\varphi},$$
$$E\equiv\mu r, \tag{19}$$

而

$$p_{11r}\equiv\frac{\partial S_{11}(r,\theta,\varphi)}{\partial r},$$
$$p_{11\theta}\equiv\frac{\partial S_{11}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta},$$
$$p_{11\varphi}\equiv\frac{\partial S_{11}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi},\cdots$$
$$p_{22r}\equiv\frac{\partial S_{22}(r,\theta,\varphi)}{\partial r},$$
$$p_{22\theta}\equiv\frac{\partial S_{22}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta},$$
$$p_{22\varphi}\equiv\frac{\partial S_{22}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}. \tag{20}$$

分别为出现在 4 个旋分量中的波矢,即动量的 r,θ,φ 分量. 由(18)式可得

$$\left(E-A_1\frac{C_2}{E}+A_2\frac{D_1}{E}\right)g_1=\left(A_1\frac{C_1}{E}-A_2\frac{D_2}{E}\right)g_2, \tag{21}$$

$$\left(B_1\frac{D_1}{E}-B_2\frac{C_2}{E}\right)g_1=\left(E-B_1\frac{D_2}{E}+B_2\frac{C_1}{E}\right)g_2, \tag{22}$$

$$\left(\frac{B_1}{B_2}-\frac{E^2}{C_1B_2}-\frac{D_2}{C_1}\right)f_2=\left(\frac{D_1}{E}-\frac{D_2C_2}{C_1E}-\frac{C_2}{C_1B_2}\right)g_1, \tag{23}$$

$$\left(A_1\frac{D_1}{E}-\frac{D_2C_2}{C_1E}-\frac{C_2}{C_1B_2}\right)f_1=\left[A_2\left(\frac{D_1}{E}-\frac{D_2C_2}{C_1E}-\frac{C_2}{C_1B_2}\right)+E\left(\frac{B_1}{B_2}-\frac{E^2}{C_1B_2}-\frac{D_2}{C_1}\right)\right]f_2. \tag{24}$$

(21),(23),(24)式分别对 r,θ,φ 求偏导并再次用 WKB 近似,然后与(21),(23),(24)式联立求解而得到

$$\begin{aligned}p_{11r}&=p_{12r}=p_{21r}=p_{22r},\\ p_{11\theta}&=p_{12\theta}=p_{21\theta}=p_{22\theta},\\ p_{11\varphi}&=p_{12\varphi}=p_{21\varphi}=p_{22\varphi}.\end{aligned} \tag{25}$$

由(21),(22)和(19)式可求得

$$\omega^2r^2f^{-1}(r)-r^2f(r)(p_{11r})^2-(p_{11\theta})^2-\frac{1}{\sin^2\theta}(p_{11\varphi})^2=E^2=\mu^2r^2, \tag{26}$$

即

$$\begin{aligned}(p_{11})^2&=(p_{12})^2=(p_{21})^2=(p_{22})^2=g^{i\mu}p_{11\mu}p_{11i}\\ &=f(r)(p_{11r})^2+\frac{1}{r^2}(p_{11\theta})^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(p_{11\varphi})^2\\ &=\omega^2f^{-1}(r)-\mu^2.\end{aligned} \tag{27}$$

(25)和(27)式表明,出现在4个旋分量中的波矢相同. 这在意料之中. 因为这4个波矢是同一个波矢,即 Dirac 粒子的波矢. 如经典电磁波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, 出现在 3 个分量 $E_x=E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\cdots, E_z=E_{0z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ 中的波矢均为 $\boldsymbol{k}$. 在计算量子态数目的(5)式中,描述量子态用的是半经典方法,即用粒子相空间中的点 $(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi)$ 来描述粒子状态. 既然出现在4个旋分量中的波矢为同一波矢,即4个旋分量中的波矢描述的是粒子的同一状态,那么用统计方法求量子态数目,进而求自由能和熵的时候,就不应该由4个旋分量的波矢分别求出量子态数目,然后求出自由能和熵,最后对4个旋分量的量求和进而认为是所需要的结果,而应该只由一个旋分量中的波矢来进行计算. 因此,下面只需考虑出现在任一旋分量中的波矢即可. 例如,$p_{11r},p_{11\theta},p_{11\varphi},p_{11}$ 并令 $p_r\equiv p_{11r},p_\theta\equiv p_{11\theta},p_\varphi\equiv p_{11\varphi},p\equiv p_{11}$.

对 Dirac 场,有两个自旋态 $S_z=\pm1/2$,即相空间每一点对应于两个态,故由(5),(26)和(27)式可计算出视界面上薄层 $[r_0,r_0+\varepsilon]$(r_0 给出视界面的位置,由 $f(r_0)=0$ 决定)内能量小于 ω 的 Dirac 场的量子态数目为

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega)&=2\times\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\mathrm{d}r\int\frac{\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1+\lambda p^2)^3}\\ &=\frac{2}{(2\pi)^3}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\mathrm{d}r\int\frac{\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{[1+\lambda(\omega^2/f-\mu^2)]^3}\\ &\quad\times\int 2f^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega^2}{f}-\frac{1}{r^2}p_\theta^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2-\mu^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi.\end{aligned} \tag{28}$$

注意,(28)式中 r 的积分下限取在视界面上,因而没有紫外截断. p_θ,p_φ 的积分范围要保证上式被积函数的根号有意义,故而得出

$$\Gamma(\omega)=\frac{4}{3\pi}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2(\omega^2/f-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r}{f^{\frac{1}{2}}[1+\lambda(\omega^2/f-\mu^2)]^3}. \tag{29}$$

由量子统计理论可求得薄层内量子场的自由能

$$\begin{aligned}F&=-\frac{1}{\beta}\int\mathrm{d}\Gamma(\omega)\ln[1+\mathrm{e}^{-\beta\omega}]\\ &=-\int_{\sqrt{f}\mu}^{\infty}\frac{\Gamma(\omega)}{\mathrm{e}^{\beta\omega}+1}\mathrm{d}\omega\\ &=-\frac{4}{3\pi}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}r^2f^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\\ &\quad\times\int_{\sqrt{f}\mu}^{\infty}\frac{(\omega^2/f-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}+1)[1+\lambda(\omega^2/f-\mu^2)]^3}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{30}$$

进一步,可得到薄层内 Dirac 场的统计熵

$$\begin{aligned}S&=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}\\ &=\frac{4\beta^2}{3\pi}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}r^2f^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\\ &\quad\times\int_{\sqrt{f}\mu}^{\infty}\frac{(\omega^2/f-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}+1)^2[1+\lambda(\omega^2/f-\mu^2)]^3}\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{4\beta^3}{3\pi\lambda^3}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}r^2f(r)\mathrm{d}r\int_{\sqrt{f}\beta\mu}^{\infty}(x^2-\beta^2f\mu^2)^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}x\\ &\quad\times\{(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+1)[\beta^2f/\lambda+(x^2-\beta^2f\mu^2)]^3\}^{-1}.\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $x=\beta\omega$,ε 为薄层的坐标厚度. 取薄层的固有厚度为广义不确定关系中的最小长度 $2\sqrt{\lambda}$,其为 Planck 尺度,则 ε 满足

$$2\sqrt{\lambda}=\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}}\approx\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r-r_0)}}=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa}},$$

即

$$\varepsilon = 2\lambda\kappa,$$
$$\kappa = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{32}$$

因为$f(r) \approx 2\kappa(r - r_0)$,(31)式的积分中在 r 的积分范围内 $\beta^2 f(r) \approx 16\pi^2\lambda$. 因而

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{4\beta^3}{3\pi\lambda^3}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon} r^2 f(r)\,\mathrm{d}r \int_{4\pi\sqrt{\lambda}\mu}^{\infty}(x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2)^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}x \\ &\quad \times \{(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+1)[16\pi^2 + (x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2)]^3\}^{-1} \\ &= \frac{4\beta^3}{3\pi\lambda^3}B(\lambda,\mu)\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon} r^2 f(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{128\pi^2 B(\lambda,\mu)}{3\lambda}r_0^2. \end{aligned} \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned} B(\lambda,\mu) &= \int_{4\pi\sqrt{\lambda}\mu}^{\infty}[x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2]^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}x \\ &\quad \times \{(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+1)[16\pi^2 \\ &\quad + (x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2)]^3\}^{-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

与 r_0 无关. 由关系式 $1 + \mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^{-x}$ 和 $\mathrm{e}^x + 1 > \mathrm{e}^x$ 得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} < \mathrm{e}^x, \\ &\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} < \mathrm{e}^{-x}, \end{aligned} \tag{35}$$

从而

$$\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+1)} < \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}. \tag{36}$$

又因为在 Planck 单位制中,$\lambda \sim 1$,$\mu \ll m_{\mathrm{P}} = 1$($m_{\mathrm{P}}$ 为 Planck 质量),所以,$16\pi^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2 > 0$. 于是,

$$x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2 < x^2, \tag{37}$$

$$\frac{1}{[16\pi^2 + (x^2 - 16\pi^2\lambda\mu^2)]^3} < \frac{1}{(x^2)^3}. \tag{38}$$

将(35),(37)和(38)式代入(34)式得

$$B(\lambda,\mu) < \int_{4\pi\sqrt{\lambda}\mu}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}\mu}. \tag{39}$$

即 $0 < B(\lambda,\mu) < \infty$,$B(\lambda,\mu)$为有界常数. 因此,(33)式表明,Planck 薄层$[r_0, r_0+\varepsilon]$内 Dirac 场的统计熵正比于黑洞视界面面积(面积 $A = 4\pi r_0^2$).

薄膜模型认为,薄层内量子场的熵就是黑洞熵. 因此,通过计算视界面上一 Planck 薄层内 Dirac 场的统计熵得到了与视界面面积成正比的黑洞熵.

4. 讨　论

下面作两方面的讨论,一是无截断的薄膜模型的合理性,二是有截断的薄膜模型与无截断的薄膜模型的本质区别.

1)通过计算薄层内 Dirac 场的熵能得到正比于黑洞视界面面积的黑洞熵. 这说明将广义测不准关系与薄膜模型相结合计算黑洞熵确实既能去掉紫外截断又能得到合理的结果. 此外至少还有如下理由使我们相信薄膜模型的合理性. (ⅰ) 全息原理[23,24]告诉我们,一个系统的边界会留下该系统的全部信息. 黑洞是一个时空区域,也是一个几何区域,静态或稳态黑洞的全部性质将表现为黑洞区域的几何性质,该区域的几何性质会通过区域边界全部表现出来,黑洞的全部性质也将会表现在作为其边界的事件视界上. 因此,我们想得到静态或稳态黑洞的任何性质都可以到事件视界上找去. 黑洞熵也不例外,也就是说,通过研究黑洞的事件视界我们就可以得到黑洞熵. 而时空可以量子化为 Planck 网格[10],空间的最小距离为 Planck 尺度,有物理意义的面也应该是 Planck 尺度厚的薄膜,作为物理面的事件视界也应该是 Planck 薄层. 我们要得到黑洞熵就要研究黑洞的视界面,要研究视界面就需要研究视界面上的 Planck 尺度厚的薄层. 因此,我们计算黑洞熵只需而且只能取视界面上的 Planck 薄层,这就是视界面上的 Planck 薄层的优越性所在. (ⅱ) 静态或稳态黑洞事件视界决定了 Hawking 辐射和辐射温度,黑洞有 Hawking 辐射和温度才有黑洞熵的存在. 考虑一个正在塌缩的重的物质薄壳,从壳刚塌缩进它的 Schwarzschild 半径后的 Planck 时刻起,一个静态的 Schwarzschild 黑洞就已经开始了它的存在,黑洞所具有的所有性质也就在这个 Planck 时间内形成. 在 Planck 时间内黑洞发出的 Hawking 辐射刚好处于黑洞视界面上的 Planck 薄层内,黑洞在 Planck 时间内形成的全部性质也正是在该 Planck 时间内通过 Hawking 辐射带到了视界面上的 Planck 薄层内. 形象地说,就是黑洞的所有性质在黑洞形成的最初 Planck 时间内由 Hawking 辐射这一使者在视界面上进行了登记. 在黑洞形成的最初 Planck 时间以后,虽然视界面上 Planck 薄层内那最初的 Hawking 辐射已经离开了 Planck 薄层,但黑洞的稳态性保证任何时候薄层内的 Hawking 辐射都相同. 对动态黑洞,黑洞性质处于变化之中,Hawking 辐射这一使者随时在 Planck 薄层内(也就是视界面上)进行登记. 因此通过研究视界面上 Planck 薄层内的热辐射就可以了解黑洞的各种性质,就可以得到黑

洞熵. 如果没有 Hawking 辐射,很难想象会有黑洞熵,正如 Wald 认为的那样,黑洞熵是薄层内真空涨落的贡献.

2)有截断薄膜模型和无截断薄膜模型最重要的区别是,前者只有取合适的截断才能得到正比于黑洞视界面面积的黑洞熵,而后者却不需要任何截断. 另外,有截断的薄膜模型本希望讨论视界面本身,这是通过讨论的最后令薄层到视界面的固有距离 $l_\varepsilon \to 0$ 和薄层的固有厚度 $l_\delta \to 0$ 来实现的. 但是 l_ε 和 l_δ 不可能趋于零,而只能趋于 Planck 尺度. 也就是说,实际上讨论的是离视界面 Planck 距离的一个薄层而不是视界面本身; 而且薄层离视界面的距离和薄层的厚度均与黑洞温度有关. 而没有截断的薄膜模型讨论的是视界面上的薄层而且薄层厚度恒为 Planck 尺度,即讨论的真正是黑洞视界面本身.

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727
[2] Li X, Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **62** 104001
[3] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 345
[4] Gao C J, Shen Y G 2001 Chin. *Phys. Lett.* **18** 1167
[5] Zhao R, Zhang L C, Hu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3902 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、胡双启 2006 物理学报 **55** 3902]
[6] Liu C Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]
[7] Hu S Q, Zhao R 2005 *Chin. Phys.* **14** 1977
[8] Wang G Z, Wang J L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1669 (in Chinese) [王钢柱、王纪龙 2004 物理学报 **53** 1669]
[9] Li X 2002 *Phys. Lett.* B **540** 9
[10] Ashtekar A, Rovelli C, Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237
[11] Gross D J, Mende P F 1988 *Nucl. Phys.* B **303** 407
[12] Amati D, Ciafaloni M, Veneziano G 1987 *Phys. Lett.* B **197** 81
[13] Maggiore M 1994 *Phys. Rev.* D **49** 5182
[14] Witten E 1997 *Phys. Today* **49** 24
[15] Kempf A, Mangano A, Mann R B 1995 *Phys. Rev.* D **52** 1180
[16] Benczik S, Chang L N, Minic D, Dkamura N, Rayyan S, Takeuchi T 2002 *Phys. Rev.* D **66** 026003
[17] Chang L N, Minic D, Okamura N, Takeuchi T 2002 *Phys. Rev.* D **65** 125028
[18] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2193 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、李怀繁 2009 物理学报 **58** 2193]
[19] Xie Z K, Yu G X, Liu C Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4390 (in Chinese) [谢志堃、余国祥、刘成周 2010 物理学报 **59** 4390]
[20] Zhao Z 1999 *Thermal Properties of Black Holes and Singularities of Space-Time* (Beijing: Beijing Normal University Press) p36, p29 (In Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性 (北京: 北京师范大学出版社) 第 36 页、第 29 页]
[21] Newman E, Penrose R 1962 *J. Math.* **3** 566
[22] Page D N 1976 *Phys. Rev.* D **14** 1509
[23] Susskind L 1995 *J. Math. Phys.* **36** 6377
[24] 't Hooft G 1993 *gr-qc*/9310026

The thin film model without cutoff and the black hole entropy of Dirac field*

Yang Xue-Jun[1)†] Zhao Zheng[2)]

1) (Department of Physics and Electronic Information, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

2) (Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

(Received 21 July 2010; revised manuscript received 6 August 2010)

Abstract

The physical idea of thin film model improved from brick-wall model is more direct and clearer than brick-wall model and gives prominence to the significance of the event horizon serving as the characteristic surface of a static or stationary black hole. To remove the divergence of the density of states, an ultraviolet cutoff factor is also introduced into the thin film model. The cutoff is introduced artificially and it has not been understood clearly up to now. There is an indication in a reference that the divergence can be removed without any cutoff when the generalized uncertainty relation is used to calculate black hole entropy. In this paper, thin film model without cutoff and the essential difference between the thin film model without cutoff and the thin film model with cutoff are expounded by the example of calculating the entropy of spherically symmetric static black hole Dirac field.

Keywords: black hole entropy, thin film model without cutoff, generalized uncertainty relation, Dirac field

PACS: 04.70.Dy, 04.62.+v, 97.60.Lf

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10873003, 11045005) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090739).

† E-mail: yang_xue_jun@163.com