Fermi 气体在势阱中的最大囚禁范围与状态方程*

袁都奇†

(宝鸡文理学院物理与信息技术系,宝鸡 721016)

(2010 年 8 月 29 日收到;2010 年 9 月 27 日收到修改稿)

在 Thomas-Fermi 近似条件下,研究了 n 维广义幂律势阱中 Fermi 原子气体的最大囚禁范围,给出了 n 维势阱中气体的实际囚禁体积,导出了状态方程.结果表明,最大囚禁范围和囚禁气体压强不仅与势阱性质有关,也与自由理想 Fermi 系统的化学势有关.对三维球对称简谐势阱进行了应用,表明在 Thomas-Fermi 近似有效的前提下,当系统满足条件 $\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2\left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\ll 1$ 时,压强对温度的依赖关系并不明显,而对粒子质量、粒子数及势场强度 ω 有较强的非线性依赖关系.

关键词: Fermi 气体, n 维势阱, 最大囚禁范围, 状态方程

PACS: 05.30.-d, 05.30.Fk, 64.30.-t, 67.85.-d

1. 引 言

Fermi 气体的成功冷却与囚禁[1],激发了人们对于超冷 Fermi 气体研究的极大兴趣,研究结果展示了丰富的物理内涵.在实验和应用方面,对于束缚于光阱中的两组分 Fermi 气体,结合改变原子间散射长度的 Feshbach 共振,在远低于 Fermi 温度的情况下实现了分子玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)[2,3];人们在实验中观察到相互作用的简并 Fermi 气体在一定条件下的坍塌[4];实现了^{6}Li 原子激光的输出[5].另外,原子量子态的制备,原子或分子凝聚体在相干光信息存储、量子通信、量子信息处理等领域有着广阔的应用前景.在理论研究方面,人们对共振超流[6,7]、Feshbach 共振磁场处简并 Fermi 气体的普适行为[8,9]、BCS-BEC 渡越过程中的基本性质[10—12]进行了大量研究.另外,关于超冷原子气体的凝聚态特性[13]、超低温 Fermi 气体在不同外界条件下的量子效应[14,15]、不同外界条件下 Fermi 气体系统的稳定性[16—19]、相对论 Fermi 气体的热力学性质[20,21]、Fermi 气体的有限尺度效应[22]及外势场的非广延热力学性质[23]等问题,已经进行了广泛深入的研究.

外势场中,Fermi 气体的空间有效囚禁范围是一个既具理论意义,又有应用价值的重要问题.从应用角度看,空间囚禁范围是输出相干原子束的原子激射器的重要性能,弄清这一性能及其影响因素对不同要求的原子激射器的设计与性能改进具有重要意义.从理论方面看,物态方程是反映系统热力学性质的 3 个基本热力学函数,而囚禁于势场中的 Fermi 气体一直未能建立其物态方程,根本原因是囚禁于势场中的 Fermi 气体没有一个明确的体积参量,而空间有效囚禁范围的确定,有助于确定囚禁体积,建立系统的状态方程.然而关于 Fermi 气体的空间囚禁范围,文献[24]对 $T=0$K 时简谐势阱的情况进行了初步研究,对于一般势阱,$T\neq 0$K 的情况及其他相关热力学性质等问题并未涉及.

本文在满足 Thomas-Fermi 近似的条件下,研究一般势阱之中 $T\neq 0$K 时 Fermi 气体的空间囚禁范围.在此基础上,建立囚禁气体的体积参量,给出一般性的状态方程和势阱中的 Fermi 气体压强.作为应用,对于简谐势阱中的囚禁范围、Fermi 气体的状态方程和压强进行较为深入的研究.

* 陕西省教育厅科研计划(批准号:2010JK405)和宝鸡文理学院科研计划重点项目(批准号: ZK0914)资助的课题.

† E-mail:yuanduqi@163.com

©2011 中国物理学会 Chinese Physical Society http://wulixb.iphy.ac.cn

2. 最大囚禁范围

考虑一个处于 n 维广义幂律势阱中的 Fermi 原子气体,粒子的势能可表示为

$$U(r) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i}, \tag{1}$$

式中 r_i 为 i 方向的坐标分量,L_i 为特征长度,ε_i,t_i 为反映势阱性质的参量,ε_i,L_i,t_i 均为正的常数. 考虑到在原子气体的囚禁实验中,满足热运动能量远大于能级间隔,所以 Thomas-Fermi 半经典近似是可用的[25]. 此时,单粒子能量简单地等于其哈密顿量,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 p^s + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i}, \tag{2}$$

式中第一项为粒子动能,ε_0,s 是反映粒子运动特征的参量,均为正的常数.

定义势阱中的等效逸度 $z_{\rm eff}$ 为

$$z_{\rm eff} = {\rm e}^{\beta(\mu - U(r))} = z{\rm e}^{-\frac{U(r)}{kT}}, \tag{3}$$

式中 z 为自由理想 Fermi 气体的逸度,k 为玻尔兹曼常数,T 为热力学温度. 利用(3)式,可将势阱中的粒子数占有数表示为

$$\langle n \rangle = \frac{1}{z_{\rm eff}^{-1} {\rm e}^{\beta \varepsilon_0 p^s} + 1}. \tag{4}$$

粒子数密度的空间分布为

$$\begin{aligned} n(T, z_{\rm eff}) &= \frac{{\rm d}N}{{\rm d}^n r} = \frac{g}{h^n} \int \langle n \rangle {\rm d}^n p \\ &= \frac{g n C_n}{h^n s} \left(\frac{kT}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{n}{s}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{s}-1}}{z_{\rm eff}^{-1} {\rm e}^x + 1} {\rm d}x, \end{aligned} \tag{5}$$

式中 g 为简并度,$C_n = \pi^{n/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 \right)$. 分析(3)式可知,给定势场中 $T \neq 0{\rm K}$ 的情况下,${\rm e}^{-\frac{U(r)}{kT}}$ 是一个有限数,所以 $z_{\rm eff}$ 有与 z 相同的取值范围,即 $0 \leqslant z_{\rm eff} < \infty$. (5)式中的积分与 Fermi 积分具有相同的形式,所以,可将此积分定义为等效 Fermi 积分,

$$f_n(z_{\rm eff}) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z_{\rm eff}^{-1} {\rm e}^x + 1} {\rm d}x. \tag{6}$$

这里 $\Gamma(n)$ 为伽玛函数. (5)式可进一步表示为

$$n(T, z_{\rm eff}) = \frac{g n C_n}{h^n s} \left(\frac{kT}{\varepsilon_0} \right)^{n/s} \Gamma\left(\frac{n}{s} \right) f_{n/s}(z_{\rm eff}). \tag{7}$$

由于 $z_{\rm eff}$ 与 z 有相同的取值范围,$f_n(z_{\rm eff})$ 与 Fermi 积分形式完全相同,所以结果的形式也必然相同. 在低温情况下,利用 Sommerfeld 引理

$$f_{n/s}(z_{\rm eff}) \approx \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{s} + 1 \right)} \left[\left(\ln z - \frac{U(r)}{kT} \right)^{n/s} + \frac{n}{s} \left(\frac{n}{s} - 1 \right) \times \frac{\pi^2}{6} \left(\ln z - \frac{U(r)}{kT} \right)^{n/s - 2} \right], \tag{8}$$

结合(1),(7),(8)式可知,随着 $|r_i|$ 增大,$U(r)$ 增大,粒子数密度减小. 所以 $n(T, z_{\rm eff})$ 作为空间位置 r 的函数,其有效囚禁范围应满足

$$n(T, z_{\rm eff}) \geqslant 0, \tag{9}$$

即满足

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \leqslant kT \ln z. \tag{10}$$

所以,沿 i 方向的最大囚禁范围(半边长或半径)为

$$|r_i|_{\max} = L_i \left(\frac{kT}{\varepsilon_i} \ln z \right)^{1/t_i} = L_i \left(\frac{\mu}{\varepsilon_i} \right)^{1/t_i}, \tag{11}$$

其中 μ 为自由理想 Fermi 系统的化学势. (11)式说明,i 方向的最大囚禁范围除了与势阱在 i 方向的参数 L_i,ε_i,t_i 密切相关,同时与系统的化学势有关.

3. 状态方程

受外势约束的系统和自由系统的一个重要区别,就是前者由外势限制,没有明确的体积参量,后者密闭在一定的容器中,有明确的体积参量. 所以后者容易建立状态方程,前者较难建立状态方程. 为了解决这一问题,文献[26]引入了赝体积和赝压强的概念,建立了玻色气体在势阱中的状态方程,这一方法同样被推广到势阱中的 Fermi 气体[27]. 赝体积的定义为[26]

$$\begin{aligned} V_n^* &= 2^n \prod_{i=1}^{n} a_i^* \\ &= 2^n \prod_{i=1}^{n} L_i \left(\frac{kT}{\varepsilon_i} \right)^{1/t_i} \Gamma\left(\frac{1}{t_i} + 1 \right), \end{aligned} \tag{12}$$

式中 a_i^* 为赝体积中沿坐标 i 方向的半边长. 比较(12)与(11)式可知,赝体积中沿坐标 i 方向的半边长显然不是其囚禁范围. 由于低温情况下 $\ln z \gg 1$,因此,势阱中气体的实际活动范围应该大于赝体积 V_n^*. 所以,借助赝压强 P_n^* 与赝体积 V_n^* 写出的状态方程,不能准确表征状态方程应该表征的热力学性质,有必要根据囚禁范围对状态方程进行必要的修正.

知道了最大囚禁范围以后,可以将 n 维矩形囚禁范围的体积表示为

$$V_n = 2^n \prod_{i=1}^{n} |r_i|_{\max} = 2^n \prod_{i=1}^{n} L_i \left(\frac{\mu}{\varepsilon_i} \right)^{1/t_i}, \tag{13}$$

n 维球对称势阱中的囚禁体积可表示为

$$V_n = C_n r_{\max}^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r_{\max}^n$$

$$= \frac{\pi^{n/2} L^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_i}\right)^{n/t}. \tag{14}$$

文献[28]已经求得的 n 维广义幂律势阱中 Fermi 气体的巨势和粒子数表达式为

$$q = \alpha\Gamma\left(\frac{n}{s}+1\right)(kT)^{\rho} f_{\rho+1}(z), \tag{15}$$

$$N = \alpha\Gamma\left(\frac{n}{s}+1\right)(kT)^{\rho} f_{\rho}(z), \tag{16}$$

式中

$$\alpha = \frac{g2^n C_n}{h^n \varepsilon_0^{n/s}} \prod_{i=1}^{n} \frac{L_i \Gamma\left(\frac{1}{t_i}+1\right)}{\varepsilon_i^{1/t_i}},$$

$$\rho = \frac{n}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}.$$

根据巨势与压强、体积、温度之间的关系

$$q = \frac{pV_n}{kT},$$

利用(13)—(16)式可以求得 n 维矩形囚禁范围 Fermi 气体的状态方程为

$$p = \frac{NkT}{V_n} \frac{f_{\rho+1}(z)}{f_{\rho}(z)} = \frac{NkT}{2^n \prod_{i=1}^{n} L_i \left(\frac{\mu}{\varepsilon_i}\right)^{1/t_i}} \frac{f_{\rho+1}(z)}{f_{\rho}(z)}, \tag{17}$$

n 维球对称势阱中囚禁 Fermi 气体的状态方程为

$$p = \frac{NkT}{V_n} \frac{f_{\rho+1}(z)}{f_{\rho}(z)} = \frac{NkT\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2} L^n \left(\frac{\mu}{\varepsilon_i}\right)^{n/t}} \frac{f_{\rho+1}(z)}{f_{\rho}(z)}. \tag{18}$$

可见只要知道势场形式,求得最大囚禁范围和囚禁体积,再求得(17),(18)式中的两个 Fermi 积分,就可得到状态方程.

4. 简谐势阱中的应用

考虑三维球对称简谐势阱时,

$$U(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \tag{19}$$

式中 m 为粒子质量,ω 为简谐势的圆频率. 由于自由理想 Fermi 气体在低温下的化学势和 Fermi 能可近似表示为[29]

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right], \tag{20}$$

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{2/3}, \tag{21}$$

联解(11),(20),(21)式,可以求得其最大囚禁半径的一级近似为

$$r_{\max} = \left(\frac{9N}{16\pi^2 g}\right)^{1/6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \times \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]^{1/4}. \tag{22}$$

若为三维椭球简谐势阱

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2), \tag{23}$$

则在坐标 $z=0$ 处,x-y 平面的最大囚禁半径与(22)式相同. 而 z 轴上的最大囚禁范围满足

$$|z|_{\max} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{9N}{16\pi^2 g}\right)^{1/6} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \times \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]^{1/4}. \tag{24}$$

这里 $\lambda = \omega_z/\omega$,$\omega_x = \omega_y = \omega$. 上述结果说明,简谐势阱中的囚禁范围与粒子数、粒子质量及势场强度 ω 的依赖关系较强,在椭球势阱中,参数 λ 对 z 轴方向的囚禁范围有较大影响.

三维球对称简谐势阱中,

$$V = \frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 = \left(\frac{N}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]^{3/4}. \tag{25}$$

利用(18)式及 Sommerfeld 引理在低温下的近似结果,可以将势阱中 Fermi 气体的压强表示为

$$p = \frac{(1296g)^{1/6}}{32\pi^{7/6}(2\hbar)^{1/2}} N^{5/6} m^{3/2} \omega^{5/2} \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \frac{1 + 2\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \Big/ \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]}{1 + \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \Big/ \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3}\right]}. \tag{26}$$

在 Thomas-Fermi 近似有效的前提下,当囚禁系统满足$\left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \ll 1$,可以使得条件$\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2\left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \ll 1$成立(对囚禁系统而言,许多情况下,上述条件可以得到满足),则由(26)式可知,此时温度对囚禁气体压强的影响很小,系统压强可近似表示为

$$p = \frac{(1296g)^{1/6}}{32\pi^{7/6}(2\hbar)^{1/2}} N^{5/6} m^{3/2} \omega^{5/2} = A N^{5/6} m^{3/2} \omega^{5/2}, \tag{27}$$

式中 A 为常数,

$$A = \frac{(1296g)^{1/6}}{32\pi^{7/6}(2\hbar)^{1/2}}.$$

(27)式说明,囚禁气体的压强对粒子数、粒子质量及势场强度 ω 有较强的非线性依赖关系. 空间维数 n 不同时,压强对 N, m, ω 依赖关系中的指数也将不同. 若取 N 为 10^6, m 为 10^{-26}—10^{-27}, ω 为 10^3, 数量级估算的结果表明,三维简谐势阱中 Fermi 气体的压强 p 约为 10^{-10}—10^{-9} Pa.

5. 结　　论

本文在 Thomas-Fermi 近似条件下,运用量子统计理论,研究了广义幂律势阱中 Fermi 气体的最大囚禁范围以及状态方程,并给出了相应的解析式. 结果表明,Fermi 气体的最大囚禁范围、实际压强不仅与势阱的特征有关,而且与自由 Fermi 系统的化学势有关. 对于三维球对称简谐势阱,当系统满足条件$\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2\left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \ll 1$ 时,压强对温度的依赖并不明显,对粒子质量、粒子数及势场强度有较强的非线性依赖关系.

[1] DeMarco B, Jin D S 1999 *Science* **285** 1703
[2] Jochim S, Barterstein M, Altmeyer A, Hendl G, Riedl S, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2003 *Science* **302** 2101
[3] Greiner M, Regal C A, Jin D S 2003 *Nature* **426** 537
[4] Modugno G, Roati G, Riboli F, Ferlaino F, Brecha R J, Inguscio M 2002 *Science* **297** 2240
[5] Yin J P, Wang Z L 2005 *Prog. Phys.* **25** 235 (in Chinese) [印建平、王正岭 2005 物理学进展 **25** 235]
[6] Milstein J N, Kokkelmans S J J M F, Holland M J 2002 *Phys. Rev.* A **66** 043604
[7] Ohashi Y, Griffin A 2003 *Phys. Rev.* A **67** 063612
[8] Heiselberg H 2001 *Phys. Rev.* A **63** 043606
[9] Ho T L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 090402
[10] Falco G M, Stoof H T C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 130401
[11] Perali A, Pieri P, Strinati G C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 100404
[12] Kinnunen J, Rodriguez M, Torma P 2004 *Science* **305** 1131
[13] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, Jin D S 2003 *Nature* **424** 47
[14] Xiong H W, Liu S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
[15] Stoof H T C, Houbiers M, Sackett C A, Hulet R G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 10
[16] Yuan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3912 (in Chinese) (袁都奇 2006 物理学报 **55** 3912)
[17] Men F D, Liu H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2856
[18] Men F D, Liu H, Zhu H Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3236
[19] Qin F, Chen J S 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2654
[20] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2649
[21] Fan Z L, Men F D, Dou R B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3715 (in Chinese) [范召兰、门福殿、窦瑞波 2010 物理学报 **59** 3715]
[22] Su G Z, Ou C J, Wang A Q P, Chen J C 2009 *Chin. Phys.* B **18** 5189
[23] Huang Z F, Ou C J, Chen J C 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1380
[24] Butts D A, Rokhsar D S 1997 *Phys. Rev.* A **55** 4346
[25] Chou T T, Yang C N, Yu I H 1997 *Phys. Rev.* A **55** 4257
[26] Yan Z J 2000 *Phys. Rev.* A **61** 063607
[27] Yan Z J, Chen L X, Chen J C, Chen C H 2001 *J. Xiamen Univ.* (*Nat. Sci.*) **40** 220 (in Chinese) [严子浚、陈丽璇、陈金灿、陈传鸿 2001 厦门大学学报(自然科学版) **40** 220]
[28] Yan Z J, Li M Z, Chen L X, Chen C H, Chen J C 1999 *J. Phys.* A **32** 4069
[29] Pathria R K 1972 *Statistical Mechanics* (Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig: Pergamon Press) p220

Maximum trap range and equation of state for Fermi gas in potential trap*

Yuan Du-Qi†

(*Department of Physics and Information Technology, Baoji University of Science and Arts, Baoji 721016, China*)

(Received 29 August 2010; revised manuscript received 27 September 2010)

Abstract

In the Thomas-Fermi semi-classical approximation, the maximal trap range and the real trap volume of ideal Fermi gas in an n-dimensional potential trap are gaven, and the relevant equations of state are derived. These results indicate that the maximal trap range and the real pressure of trapped gas are related to the potential field and the chemical potential of the free and ideal Fermi system. When the Thomas-Fermi approximate is valid and the condition $\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2\left(\frac{16\pi^2 g}{9N}\right)^{2/3} \ll 1$ is satisfied, the application of the equation of state to three-dimensional spherical symmetry harmonic trap yields the result that the change of pressure is not obvious when the temperature changes, but the change of pressure is closely related to mass of particle, number of particles and the frequency of harmonic potential.

Keywords: Fermi gas, n-dimensional potential trap, maximal trapped range, equation of state

PACS: 05.30.-d, 05.30.Fk, 64.30.-t, 67.85.-d

* Project supported by the Scientific Research Program of the Education Department of Shaanxi Province, China (Grant No. 2010JK405), and the Key Program of Scientific Research of Baoji University of Science and Arts, China (Grant No. ZK0914).

† E-mail: yuanduqi@163.com