

一类惯性神经网络的分岔与控制*

赵洪涌^{1)†} 陈凌²⁾ 于小红¹⁾

1) (南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

2) (金陵科技学院, 南京 211169)

(2010年8月27日收到; 2010年10月21日收到修改稿)

本文讨论了一类三阶惯性神经网络的稳定性和分岔问题. 利用灵敏度理论, 确定了合适的 Hopf 分岔参数. 基于 Routh-Hurwitz 判据和分岔理论, 给出了系统稳定性、发生 Hopf 分岔以及产生静态分岔的条件. 数值模拟不仅验证了理论分析的正确性, 还说明了所设计的单节点时滞反馈控制器不仅能延迟网络分岔的发生, 还能改变极限环的振幅.

关键词: 惯性神经网络, 稳定性, 时滞反馈控制, Hopf 分岔

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Ks, 02.30.Oz

1. 引言

近年来, 神经网络理论的应用也已渗透到物理学、电子学、生物学、机械工程学等众多领域, 并在组合优化、模式识别、信号处理、计算机视觉、生物医学工程等方面取得了令人鼓舞的进展^[1-8]. 非线性动力学是神经网络理论中的一个重要组成部分, 对它的研究不仅有助于理解神经网络数学理论依据和背景, 而且为神经网络的设计、开发和应用提供了基本思想及可能的途径. 在神经网络动力学研究中, 稳定性、分岔和混沌是其研究的核心内容, 得到了国内外学者的广泛关注^[9-15]. Wheeler 等^[11] 运用数值分析方法分别对二阶、三阶和四阶惯性神经网络的分岔和混沌作了讨论; 文献^[12-14] 研究了二阶惯性时滞神经网络稳定性、分岔及其混沌现象; 最近 Yang 等^[15] 讨论了三阶惯性神经网络的混沌. 然而, 关于三阶惯性神经网络的稳定性和分岔还很少有人涉及. 此外, 在神经网络模型中, 往往含有多个控制参数, 而这些参数对系统影响程度不太一样, 为了能更好地研究网络的动力学特性, 需要选取对系统影响比较大的参数进行讨论. 目前有关这方面工作还很少.

基于以上分析, 本文将讨论三阶惯性神经网络的

稳定性和分岔作深入的讨论. 首先运用灵敏度分析法选出合适的分岔参数. 然后根据稳定性和分岔理论, 给出系统稳定和发生分岔的条件. 最后, 通过例子说明理论结果的正确性和分岔控制的有效性.

2. 模型及其平衡点稳定性

考虑如下三阶惯性神经网络模型

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, \\ U_2' &= -aU_2 - aU_1 + c \tanh(U_1) + c_{12} \tanh(U_3), \\ U_3' &= -U_3 + c_{21} \tanh(U_1) + c \tanh(U_3), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0$; $U_i (i = 1, 2, 3)$ 为第 i 个神经元的状态; c, c_{12} 和 c_{21} 代表网络的连接强度.

为方便起见, 选取 (1) 的初值为 $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$.

显然, $(0, 0, 0)$ 是系统 (1) 的平衡点. 将系统 (1) 在零平衡点处线性化可得

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, \\ U_2' &= -aU_2 - aU_1 + cU_1 + c_{12}U_3, \\ U_3' &= -U_3 + c_{21}U_1 + cU_3. \end{aligned} \quad (2)$$

特征方程为

$$\Delta(\lambda) : \lambda^3 + (a - c + 1)\lambda^2 + (2a - ac - c)\lambda - c_{12}c_{21} - (a - c)(c - 1) = 0. \quad (3)$$

假设系统中参数满足

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11032009) 资助的课题.

† E-mail: zhywgl@yahoo.com.cn zhaohy@nuaa.edu.cn

$$(H_1): a - c + 1 > 0;$$

$$(H_2): (a - c + 1)(2a - ac - c) + c_{12}c_{21} + (a - c)(c - 1) > 0;$$

$$(H_3): c_{12}c_{21} + (a - c)(c - 1) < 0.$$

定理 1 若 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 则系统(1)的零平衡点是局部渐近稳定的.

证明 根据 Routh-Hurwitz 判据, 方程(3)的根全部具有负实部当且仅当条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立. 因此系统的零平衡点是局部渐近稳定的.

3. 分岔参数的选取与分岔分析

3.1. 分岔参数选取——灵敏度分析法

方程(1)中含有四个参数, 为了确定合适的 Hopf 分岔参数, 利用灵敏度理论^[16-17], 将灵敏度最高的选为分岔参数. 令

$$s_1(t) = \partial U_1 / \partial a,$$

$$s_2(t) = \partial U_1 / \partial c,$$

$$s_3(t) = \partial U_1 / \partial c_{12},$$

$$s_4(t) = \partial U_1 / \partial c_{21},$$

$$s_5(t) = \partial U_2 / \partial a,$$

$$s_6(t) = \partial U_2 / \partial c,$$

$$s_7(t) = \partial U_2 / \partial c_{12},$$

$$s_8(t) = \partial U_2 / \partial c_{21},$$

$$s_9(t) = \partial U_3 / \partial a,$$

$$s_{10}(t) = \partial U_3 / \partial c,$$

$$s_{11}(t) = \partial U_3 / \partial c_{12},$$

$$s_{12}(t) = \partial U_3 / \partial c_{21}.$$

$$V(t) = (U_1(t), U_2(t), U_3(t),$$

$$s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t), s_5(t),$$

$$s_6(t), s_7(t), s_8(t), s_9(t), s_{10}(t),$$

$$s_{11}(t), s_{12}(t))^T.$$

结合(1)式, 我们得到下面的敏感性方程:

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \\ s_5(t) \\ s_6(t) \\ s_7(t) \\ s_8(t) \\ s_9(t) \\ s_{10}(t) \\ s_{11}(t) \\ s_{12}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ -aU_2(t) - aU_1(t) + c \tanh(U_1(t)) + c_{12} \tanh(U_3(t)) \\ -U_3(t) + c_{21} \tanh(U_1(t)) + c \tanh(U_3(t)) \\ s_5(t) \\ s_6(t) \\ s_7(t) \\ s_8(t) \\ -U_2(t) - U_1(t) - as_5(t) - as_1(t) + c \tanh'(U_1(t))s_1(t) + c_{12} \tanh'(U_3(t))s_9(t) \\ \tanh(U_1(t)) - as_6(t) - as_2(t) + c \tanh'(U_1(t))s_2(t) + c_{12} \tanh'(U_3(t))s_{10}(t) \\ \tanh(U_3(t)) - as_7(t) - as_3(t) + c \tanh'(U_1(t))s_3(t) + c_{12} \tanh'(U_3(t))s_{11}(t) \\ -as_8(t) - as_4(t) + c \tanh'(U_1(t))s_4(t) + c_{12} \tanh'(U_3(t))s_{12}(t) \\ -s_9(t) + c_{21} \tanh'(U_1(t))s_1(t) + c \tanh'(U_3(t))s_9(t) \\ \tanh(U_3(t)) - s_{10}(t) + c_{21} \tanh'(U_1(t))s_2(t) + c \tanh'(U_3(t))s_{10}(t) \\ -s_{11}(t) + c_{21} \tanh'(U_1(t))s_3(t) + c \tanh'(U_3(t))s_{11}(t) \\ \tanh(U_1(t)) - s_{12}(t) + c_{21} \tanh'(U_1(t))s_4(t) + c \tanh'(U_3(t))s_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

由 $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$ 知,

$$s_1(0) = s_2(0) = \dots = s_{12}(0) = 0.$$

因此方程(4)的初值为

$$V(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

选取初始参数 $a = 9, c = 1, c_{12} = -4.8, c_{21} =$

2.5. 利用数值分析和 Matlab 工具, 很容易求得在这组初始参数下方程(4)的数值解, 如图 1 所示. 图 1

表明解对参数 c 最为敏感, 由灵敏度理论^[16]知, 对于任意初值, 解都是对参数 c 最敏感. 因此, 选取 c 作为 Hopf 分岔参数.

3.2. Hopf 分岔的存在性

对系统(1), 作如下假设:

$$(H_4): a(a - 1)^2 + c_{12}c_{21}(a + 1)^2 < 0;$$

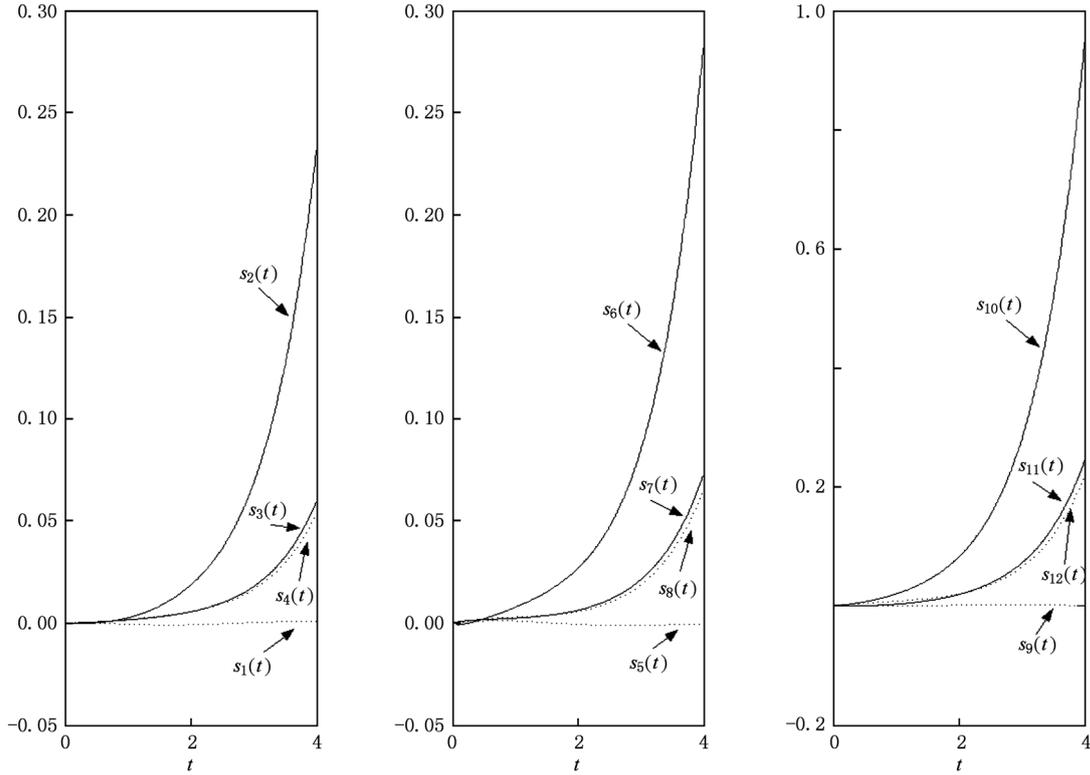


图1 初始参数选为 $a = 9, c = 1, c_{12} = -4.8, c_{21} = 2.5$

$$(H_5): (a - c)(c - 1) + c_{12}c_{21} = 0.$$

定理 2 若条件 (H_4) 成立, 则系统 (1) 的零平衡点在 $c = c_0$ 处发生 Hopf 分岔, 其中

$$c_0 = \frac{a + 3 - \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2}.$$

证明 设方程 (3) 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega (\omega > 0)$, 把 $\lambda_1 = i\omega$ 代入方程 (3) 可得

$$\begin{aligned} -i\omega^3 - (a - c + 1)\omega^2 + i(2a - ac - c)\omega \\ - c_{12}c_{21} - (a - c)(c - 1) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

分离实部和虚部得

$$\begin{aligned} \omega^3 &= (2a - ac - c)\omega, \\ (a - c + 1)\omega^2 + c_{12}c_{21} \\ &+ (a - c)(c - 1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

临界方程为

$$ac^2 - (a^2 + 3a)c + 2a^2 + a + c_{12}c_{21} = 0. \quad (7)$$

由 $a > 0$ 和 (H_4) 知, $c_{12}c_{21} < 0$. 因此从 (7) 式求出 c 的两个实根为

$$c_{1,2} = \frac{a + 3 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2}.$$

若 $c = c_1$, 则

$$\omega^2 = 2a - ac_1 - c_1$$

$$= 2a - (a + 1)$$

$$\times \frac{a + 3 + \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2} > 0.$$

化简得

$$a^2 + 3 + (a + 1)\sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a} < 0.$$

显然不成立 (由于 $a > 0$). 所以 c_1 不能作为临界值.

若 $c = c_2$, 则

$$\omega^2 = 2a - ac_2 - c_2$$

$$= 2a - (a + 1)$$

$$\times \frac{a + 3 - \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2} > 0.$$

化简得

$$a(a - 1)^2 + c_{12}c_{21}(a + 1)^2 < 0.$$

根据 (H_4) , c_2 可以作为临界值, 记作 c_0 . 即当

$$c = c_0 = \frac{a + 3 - \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2}$$

时, 方程 (3) 有一对纯虚根. 根据方程 (3), 还可以求得

$$\lambda'(c) = \frac{\lambda^2 + (a + 1)\lambda + a - 2c + 1}{3\lambda^2 + 2(a - c + 1)\lambda + 2a - ac - c}$$

所以

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\lambda'(c) |_{c=c_0, \lambda=i\omega}) \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2(2a - ac_0 - c_0 + (a - c_0 + 1)^2)} \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2(\omega^2 + (a - c_0 + 1)^2)} > 0, \end{aligned}$$

即横截性条件满足.

假设方程(3)除了上述一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega (\omega > 0)$ 外, 另外一根为 $\lambda = \lambda_3$. 因此 $(\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega)(\lambda - \lambda_3) = 0$, 即

$$\lambda^3 - \lambda_3\lambda^2 + \omega^2\lambda - \omega^2\lambda_3 = 0. \quad (8)$$

比较方程(3)和(8)得 $\lambda_3 = -(a - c_0 + 1)$. 将 c_0 表达式代入并化简得

$$\lambda_3 = -\frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2}.$$

由于 $a > 0, c_{12}c_{21} < 0$, 所以

$$a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a > (a - 1)^2.$$

因此, $\lambda_3 < 0$. 综上所述, 当 $c = c_0$ 时, 方程(3)除了一对纯虚根外还有一负实根, 且 $\operatorname{Re}(\lambda'(c) |_{c=c_0}) > 0$. 根据 Hopf 分岔理论^[18], 当 c 通过临界值 c_0 时, 系统(1)在零平衡点发生 Hopf 分岔.

3.3. 有零特征根情形

定理 3 在 (H_5) 条件下,

(i) 如果 $c < \frac{2a}{a+1}$, 则方程(3)有一单零根和两个负实部根;

(ii) 如果 $c = \frac{2a}{a+1}$, 则方程(3)有一负实根和二重零根;

(iii) 如果 $c > \frac{2a}{a+1}$, 则方程(3)除了一单零根外, 还有一正实根和一负实根.

证明 显然, $\lambda = 0$ 是方程(3)的根当且仅当条件 (H_5) 成立.

对 $\Delta(\lambda)$ 求导得

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= 3\lambda^2 + 2(a - c + 1)\lambda \\ &\quad + (2a - ac - c). \end{aligned} \quad (9)$$

$\Delta'(0) = 0$ 当且仅当 $c = \frac{2a}{a+1}$. 所以当 $c \neq \frac{2a}{a+1}$ 时,

$\lambda = 0$ 是方程(3)的单根.

对 $\Delta(\lambda)$ 求两次导得

$$\Delta''(\lambda) = 6\lambda + 2(a - c + 1). \quad (10)$$

显然, 仅当 $c = a + 1$ 时 $\Delta''(0) = 0$. 而 $\frac{2a}{a+1} < a + 1$.

因此, 当 $c = \frac{2a}{a+1}$ 时, $\Delta''(0) \neq 0$. 再结合上面的分析, 方程(3)有二重零根.

在方程(3)有一单零根情况下, 很容易求出另外两根为

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(a - c + 1) \pm \sqrt{(a - c + 1)^2 - 4(2a - ac - c)}}{2}. \quad (11)$$

如果 $c < \frac{2a}{a+1}$, 那么 $2a - ac - c > 0$. 又因为 $\frac{2a}{a+1} < a + 1$, 所以 $c < a + 1$, 即 $a - c + 1 > 0$. 因此, 方程(3)另外两根具有负实部; 如果 $c > \frac{2a}{a+1}$, 那么 $2a - ac - c < 0$. 由(11)式知, 方程(3)还有一正实根和一负实根.

在方程(3)有二重零根情况下, 很容易求出另外一根为 $\lambda_3 = -(a - c + 1)$. 因为 $c = \frac{2a}{a+1} < a + 1$, 所以 $\lambda_3 < 0$. 命题得证.

条件 (H_5) 可化为关于 c 的一元二次方程

$$c^2 - (a + 1)c + a - c_{12}c_{21} = 0. \quad (12)$$

作如下假设:

$$(H_6): a^2 - 2a + 1 + 4c_{12}c_{21} > 0;$$

$$(H_7): 2a^2 + a + c_{12}c_{21} > 0.$$

在 (H_6) 条件下, 由(12)式可求出 c 的两个实根为

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4c_{12}c_{21}}}{2}, \\ c_2^* &= \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4c_{12}c_{21}}}{2}. \end{aligned}$$

显然 $c_1^* < c_2^*$.

为此, 我们能得到下面的结论.

定理 4 如果 (H_6) 和 (H_7) 成立. 参数 a, c_{12}, c_{21} 还满足 (H_4) . 那么, $c_0 < c_1^* < c_2^*$. 特别地, 当 $c < c_0$ 时, 系统(1)零平衡点是渐近稳定的; 当 $c = c_0$ 时, 系统(1)发生 Hopf 分岔; 当 $c_0 < c < c_1^*$ 时, 系统(1)分岔出周期解; 当 $c = c_1^*$ 或 $c = c_2^*$ 时, 系统(1)可能发生静态分岔.

证明 若条件 (H_4) 成立. 根据定理 2, 当 $c = c_0$ 时, 方程(3)有一对纯虚根时, 另一根具有负实部. 条件 (H_6) 蕴含 c_1^* 和 c_2^* 均为实根. 当 $c = c_1^*$ 或 $c = c_2^*$ 时, 方程(3)有零根. 所以 $c_0 \neq c_1^*, c_0 \neq c_2^*$. 此外, 由条件, 很容易证明 c_1^*, c_2^*, c_0 均大于零. 根据

c_0 和 c_1^* 的表达式,我们得到

$$c_0 - c_1^* = \frac{2 + \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4c_{12}c_{21}} - \sqrt{a^2 - 2a + 5 - 4c_{12}c_{21}/a}}{2} \quad (13)$$

又

$$\begin{aligned} & (2 + \sqrt{(a-1)^2 + 4c_{12}c_{21}})^2 \\ & - (\sqrt{(a-1)^2 + 4 - 4c_{12}c_{21}/a})^2 \\ & = 4 \left[c_{12}c_{21} \left(1 + \frac{1}{a}\right) + \sqrt{(a-1)^2 + 4c_{12}c_{21}} \right]. \end{aligned}$$

由 $a > 0$ 和 (H_4) 知, $c_{12}c_{21} < 0 < a$, 并且 $c_{12}c_{21} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 < -a(a-1)^2$. 所以

$$\begin{aligned} & (\sqrt{(a-1)^2 + 4c_{12}c_{21}})^2 - \left[c_{12}c_{21} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \\ & = (a-1)^2 + 4c_{12}c_{21} - (c_{12}c_{21})^2 \frac{(a+1)^2}{a^2} \\ & < (a-1)^2 + 4c_{12}c_{21} + c_{12}c_{21} \frac{(a-1)^2}{a} \\ & = \frac{1}{a} [a(a-1)^2 + c_{12}c_{21}(a+1)^2] < 0. \end{aligned}$$

因此,

$$\sqrt{(a-1)^2 + 4c_{12}c_{21}} < -c_{12}c_{21} \left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

根据(13)式, $c_0 < c_1^*$. 由 (H_7) , 定理1 以及上面的分析知, $c = 0$ 时方程(3)的特征根均具有负实部, 亦即系统(1)的零平衡点是渐近稳定的. 注意到随着参数 c 连续的变化, 当且仅当此方程(3)出现零根或者出现纯虚根时, 方程正实部根的数目才会发生改变. 结合定理2 和以上分析, 容易验证结论成立.

备注1 如果 $a^2 - 2a + 1 + 4c_{12}c_{21} = 0$, 那么可得到类似于定理4 的结论.

4. 数值举例与分岔控制

例1 在系统(1)中, 取参数 $a = 9, c_{12} = -4.5, c_{21} = 1.8, c = 1.5$, 显然条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立. 根据定理1, 系统(1)的零平衡点是局部渐近稳定的 (如图2 所示); 若取 $a = 9, c_{12} = -5, c_{21} = 2$, 很容易验证条件 $(H_4), (H_6), (H_7)$ 成立. 通过简单的计算得 $c_0 = 1.7443$, 且 $c_1^* = 2.5505, c_2^* = 7.4495$. 若取 $c = 1.68$, 显然 $c < c_0$. 根据定理2, 系统(1)零平衡点是局部渐近稳定的 (如图3 所示); 根据定理4, 若取 $c = 1.75 \in (c_0, c_1^*)$, 则系统(1)仅有不稳定的零平衡点并在其附近产生周期轨道 (如图4 所示);

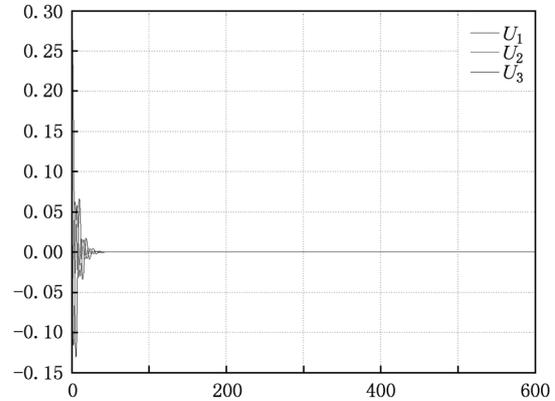


图2 $a = 9, c_{12} = -4.5, c_{21} = 1.8, c = 1.5$ 时, 系统(1)零平衡点局部渐近稳定的

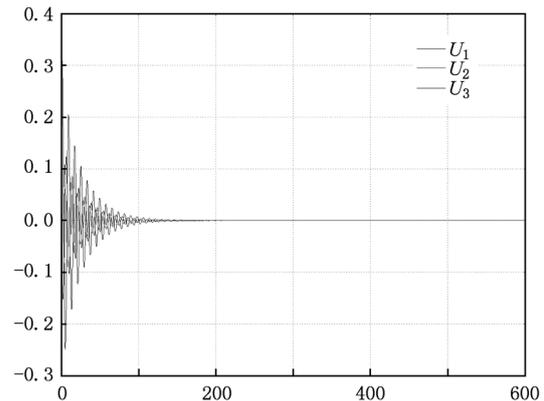


图3 当 $c = 1.68 < c_0$ 时, 系统(1)零平衡点是局部渐近稳定的

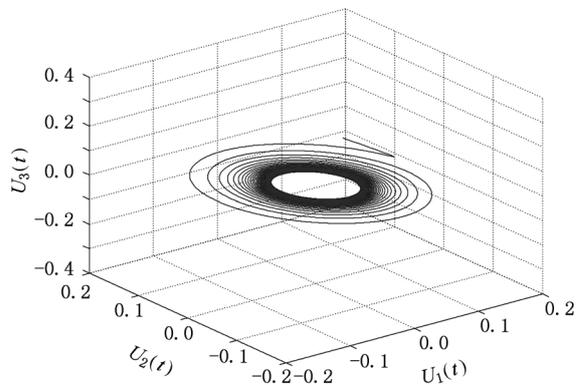


图4 当 $(c_0 <) c = 1.75 (< c_1^*)$ 时, 系统分岔出周期解

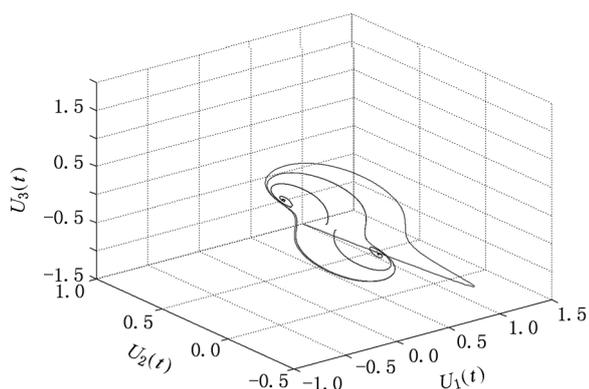


图5 当 $c = 2.58$ 时, 系统(1)分岔出一周期轨道和两个稳定的非零平衡点

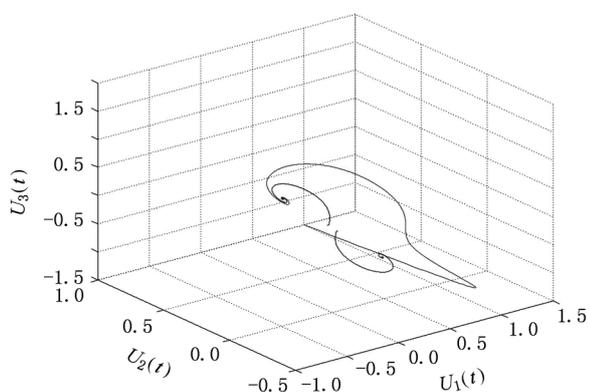


图6 当 $c = 2.59$ 时, 系统(1)分岔出现两个稳定的非零平衡点, 周期轨道破裂

当 $c = 2.58 > c_1^*$ 时, 系统(1)有一个不稳定的零平衡点和两个稳定的非零平衡点, 并在不稳定的零平衡点附近产生周期轨道(如图5所示). 当 $c = 2.59$ 时, 系统(1)有一个不稳定的零平衡点和两个稳定的非零平衡点, 而由不稳定的零平衡点产生的周期轨道破裂(如图6所示).

例2 考虑如下时滞反馈系统

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2, \\ U_2 &= -aU_2 - aU_1 + c \tanh(U_1) \\ &\quad + c_{12} \tanh(U_3) + u(t), \\ U_3 &= -U_3 + c_{21} \tanh(U_1) + c \tanh(U_3), \end{aligned} \quad (14)$$

其中时滞反馈控制器

$$\begin{aligned} u(t) &= k_1 (U_2(t - \tau) - U_2(t)) \\ &\quad + k_2 (U_2(t - \tau) - U_2(t))^3, \end{aligned}$$

取 $a = 9, c_{12} = -5, c_{21} = 2$. 显然, 系统(14)有一

零平衡点. 若取 $k_1 = -6, k_2 = 0, \tau = 0.2$, 则当 $c = c_0 = 1.7443$ 时, 图7表明系统(14)的零平衡点是局部渐近稳定的. 因此, 时滞反馈可以使在原来分岔点处不稳定的零平衡点变为稳定; 对 $k_1 = -6, k_2 = 0, \tau = 0.2$, 当 $c = 1.75$ 时, 图8表明系统(14)的零平衡点还是局部渐近稳定的. 与图4比较发现, 时滞反馈可以分岔延迟, 改变系统的稳定性. 保持参数 a, c_{12}, c_{21} 值不变, 当 $c = 1.75, k_1 = 0, \tau = 5$ 时, 图9表明随着 k_2 的取值增大, 系统(14)的极限环振幅也随之增大. 若将控制器 $u(t)$ 取为非光滑的分数指数形式的函数: $u(t) = k |U_2(t - \tau) - U_2(t)|^{1/2}$, 参数 a, c_{12}, c_{21} 值不变, 当 $c = 1.75, k = -6, \tau = 0.2$ 时, 图10表明系统(14)的零平衡点不稳定并在其附近产生不同于图4的奇异吸引子. 因此, 在实际应用中, 可以通过添加适当的反馈控制器来改变系统的分岔点以及极限环振幅, 使之满足实际需要.

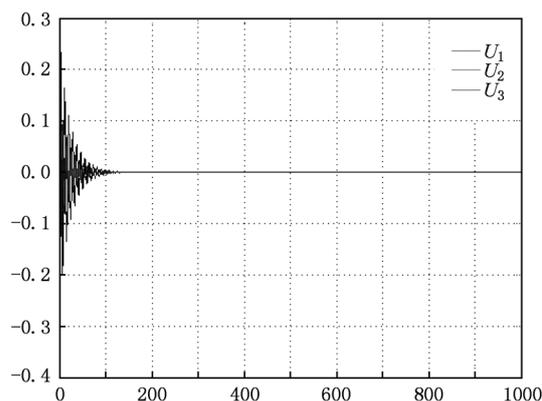


图7 当 $c = c_0 = 1.7443$ 时, 系统(14)的零平衡点是局部渐近稳定的

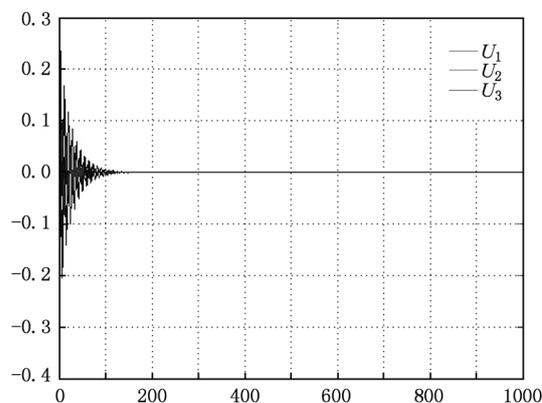


图8 当 $c = c_0 = 1.75$ 时, 系统(14)的零平衡点是局部渐近稳定的

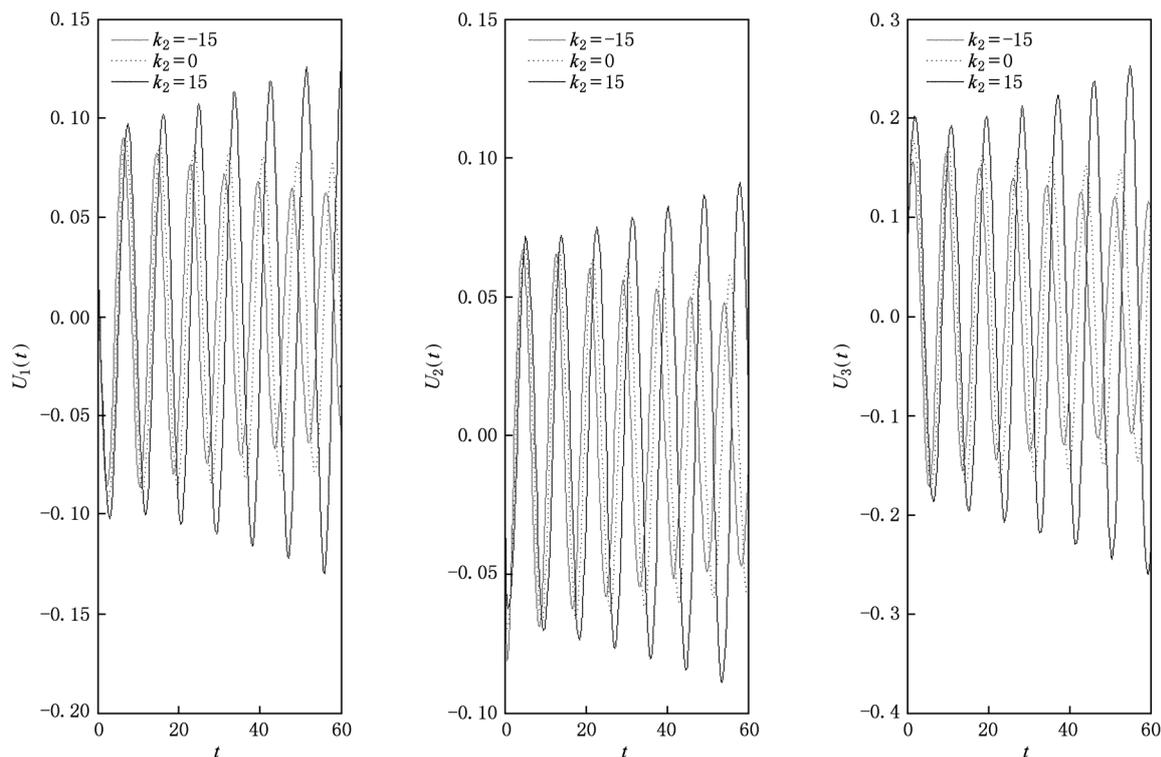


图9 在 $c = 1.75, k_1 = 0, \tau = 5$, k_2 变化时系统(14)的极限环振幅变化情况

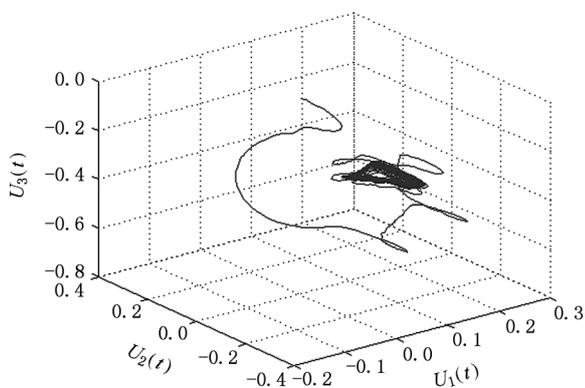


图10 系统(14)的零平衡点不稳定并在其附近产生奇异吸引子

5. 结 论

本文研究了一类非线性惯性神经网络的稳定性和分岔问题. 首先利用灵敏度理论, 确定了连接强度 c 作为 Hopf 分岔参数; 然后讨论了网络连接强度对系统平衡点的稳定性、Hopf 分岔以及静态分岔的影响情况. 最后进行了数值仿真. 仿真结果不仅验证了理论分析的正确性, 还说明了所设计的单节点时滞反馈控制器能有效地延迟网络的分岔和改变极限环的振幅.

[1] Hopfield J 1982 *Proc. Nat. Acad. Usa* **79** 2554
 [2] Chua L, Yang L 1988 *IEEE Trans. Circuits Systems* **35** 1257
 [3] Xu D, Zhao H 2001 *Comput. Math. Appl.* **42** 39
 [4] Wu R, 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 0139 (in Chinese) [吴然超 2009 物理学报 **58** 0139]
 [5] Ji Y, Cui B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060512
 [6] Wang L, Xu D 2003 *Science in China E* **6** 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **6** 488]
 [7] Chen D, Zhang W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1506
 [8] Zhao H, Sun L, Wang G 2007 *Neurocomputing* **70** 292
 [9] Zhao H, Wang L 2007 *Nonlinear Analysis* **8** 73
 [10] Lou Y, Cui B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2060 (in Chinese) [楼旭阳、崔宝同 2008 物理学报 **57** 2060]
 [11] Wheeler D, Schieve W 1997 *Physica D* **105** 267
 [12] Li C, Chen G, Liao X 2004 *The European Physical Journal B* **41** 337
 [13] Liao X, Li S 2003 *Nonlinear Dynamics* **33** 209
 [14] Liu Q, Liao X 2009 *Nonlinear Analysis* **10** 2384

- [15] Yang X, Yang F 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **20** 587 Chinese) [张 岚, 张诚坚 2009 应用数学 **22** 452]
[16] Khalil H 1996 *Nonlinear Systems* (NJ: Prentice Hall) [18] Hassard B, Kazarinoff N 1981 *Theory and Application of Hopf bifurcation* (Cambridge University Press, Cambridge).
[17] Zhang L, Zhang C 2009 *Mathematica Applicata* **22** 452 (in

Bifurcation and control of a class of inertial neuron networks*

Zhao Hong-Yong^{1)†} Chen Ling²⁾ Yu Xiao-Hong¹⁾

1) (School of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

2) (College of Jingling Science and Technology, Nanjing 211169, China)

(Received 27 August 2010; revised manuscript received 21 October 2010)

Abstract

The paper deals with the stability and the bifurcation of a class of inertial neural networks. Based on sensitivity theory, we determine the suitable bifurcation parameter. Using Routh-Hurwitz criterion and bifurcation theory, we give some new criteria for stability, Hopf bifurcation and steady state bifurcation. Numerical simulations are given to validate the theoretical analysis showing that the delayed feedback controller can control the occurrence of bifurcation effectively and the amplitude of the bifurcated limit cycle as well.

Keywords: inertial neural networks, stability, delayed feedback controller, Hopf bifurcation

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Ks, 02.30.Oz

* Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11032009).

† E-mail: zhywgl@yahoo.com.cn zhaohy@nuaa.edu.cn