# Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解*

套格图桑†
（内蒙古师范大学数学科学学院，呼和浩特 010022）

（2010 年 9 月 21 日收到；2010 年 10 月 19 日收到修改稿）

本文为了构造非线性发展方程的无穷序列尖峰精确解，给出了 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式，并借助符号计算系统 Mathematica，用 Degasperis-Procesi 方程为应用实例，构造了无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

**关键词**：Riccati 方程，解的非线性叠加公式，尖峰孤立波解，Degasperis-Procesi 方程
**PACS**：02.30.Ik，02.30.Jr

## 1. 引　　言

1834 年 8 月，Russell 在连接爱丁堡和格拉斯哥的运河河道的勘探过程中发现了孤立波自然现象[1]. 1895 年，Korteweg 和 de Vires 建立了单向运动浅水波的数学模型 KdV 方程，理论上肯定了孤立波解的存在性[2]. 1965 年，Kruskal 和 Zabusky 通过数学模拟法深入研究等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程，得出孤立波在碰撞后保持其波形和波速不变的结论[3]，证实了孤立波解的稳定性.

1993 年，Camassa 和 Holm 给出下列浅水波动方程（CH 方程）[4]：

$$u_t + 2ku_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - u_{xxt} - uu_{xxx} = 0, \quad (1)$$

其中 $k$ 是常数. 他们在 $k = 0$ 时，获得了 CH 方程的如下孤立波解：

$$u(x,t) = c\exp(-|\xi|) = c\exp(-|x - ct|), \quad (2)$$

在 $u$-$\xi$ 平面上画(2)式的图形后发现，在波峰处有一个尖点，因此称为尖孤立子解. 这是孤立子解中又一个新的发现. CH 方程和 KdV 方程都描述小振幅浅水波运动，但是 CH 方程存在尖孤立子解. 因此，引起数学物理学界的极大关注.

文献[5—14]讨论了存在尖峰孤立波解的非线性发展方程的多种问题，获得了诸多成果. 文献[5]研究了尖峰孤立波解的几何结构，文献[6]研究尖峰孤立子方程的对称约化，文献[7—9]分别研究了尖峰孤立子方程的解的存在性、稳定性和守恒量等问题. 文献[10]给出了凹凸尖峰孤立波以及光滑孤立子的概念，研究获得了 $k = 0$ 时，CH 方程的新成果.

2002 年，Dullin 等研究无旋不压缩的无黏浅层受地球重力和流体自身表面扩展影响的运动规律时，建立了 CH-r 方程[11]，

$$u_t + c_0 u_x + 3uu_x - \alpha^2(u_{xxt} + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) + ru_{xxx} = 0, \quad (3)$$

其中 $c_0, \alpha \neq 0, r$ 是常数.

CH-r 方程包含了两个重要的浅水波方程. 当 $\gamma = 0$ 时，方程 (3) 转化为 CH 方程，当 $\alpha = 0$ 时，转化为 KdV 方程.

文献[12]研究了 CH-r 方程 (3) 获得了孤立尖波和周期尖波的解析式，并揭示了这两种尖波之间的一些关系.

文献[13]研究了一类非线性色散广义 DGH 方程 (4) 的紧孤立子解和尖峰孤立子解以及 Painlevé 可积性，

$$u_t - u_{xxt} + 2\alpha u_x + au^m u_x + \gamma u_{xxx} - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad (4)$$

其中 $a, \gamma$ 是常数，$m$ 是正整数.

文献[14，15]用定性分析理论，研究了 Degasperis-Procesi 方程 (5)，通过相图给出了尖峰

* 国家自然科学基金（批准号：10461006），内蒙古自治区高等学校科学研究基金（批准号：NJZZ07031）和内蒙古自治区自然科学基金（批准号：2010MS0111）资助的课题.

† E-mail：tgts@imnu.edu.cn

 

孤立波解和周期尖波的解析表达式,

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxx} - \alpha^2 u_{xxt} - (\beta u^2 + \delta u_x^2 + \theta u u_{xx})_x = 0, \tag{5}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,c_0$ 均为常数.

文献[1—15]用不同的方法,研究获得了 Degasperis-Procesi 方程等非线性发展方程的有限多个尖峰孤立波解和周期尖波解. Degasperis-Procesi 方程是一类新型的完全可积的浅水波方程,该方程包含了 CH-r 方程. 当 $\theta = \alpha^2, \beta = -\frac{3}{2}, -(2\delta + \theta) = -2\alpha^2$ 时,转化为 CH-r 方程.

超导电子和超流液氦原子是尖峰孤立子,这种孤立子的运动不变性和碰撞稳定等性质引起了超导性和超流性. 因此,尖峰孤立子解对于超导原理以及超导材料的研究具有重要意义. 本文为了获得非线性发展方程的无穷序列尖峰精确解,给出了 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,用 Degasperis-Procesi 方程为应用实例,构造了无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

## 2. Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式

文献[16—33]利用 Riccati 方程的五个解,构造了非线性发展方程的有限多个新精确解,获得了令人注目的成果. 文献[34—36]扩展应用 Riccati 方程法和其他辅助方程法[37,38],构造了非线性发展方程的无穷序列精确解.

### 2.1. Riccati 方程的部分解

$$\frac{\mathrm{d}z(|\xi|)}{\mathrm{d}|\xi|} = z'(|\xi|) = R + z^2(|\xi|), \tag{6}$$

$$z_0(|\xi|) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|), \quad (R<0), \tag{7}$$

$$z_0(|\xi|) = -\sqrt{-R}\coth(\sqrt{-R}|\xi|), \quad (R<0), \tag{8}$$

$$z_0(|\xi|) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}|\xi|), \quad (R>0), \tag{9}$$

$$z_0(|\xi|) = -\sqrt{R}\cot(\sqrt{R}|\xi|), \quad (R>0), \tag{10}$$

$$z_0(|\xi|) = -\frac{1}{|\xi|}, \quad (R=0), \tag{11}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{B_3 R + A_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)}{-A_3 + B_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)}, \quad (R<0), \tag{12}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{-(r\sqrt{R} + CR)\cos(\sqrt{R}|\xi|) + (r - C\sqrt{R})\sqrt{R}\sin(\sqrt{R}|\xi|)}{(r - C\sqrt{R})\cos(\sqrt{R}|\xi|) + (r + C\sqrt{R})\sin(\sqrt{R}|\xi|)}, \quad (R>0), \tag{13}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{-3B_4R + 4A_4\sqrt{R} - 5B_4R\sin(2\sqrt{R}|\xi|) - 5A_4\sqrt{R}\cos(2\sqrt{R}|\xi|)}{3A_4 + 4B_4\sqrt{R} + 5A_4\sin(2\sqrt{R}|\xi|) - 5B_4\sqrt{R}\cos(2\sqrt{R}|\xi|)}, \quad (R>0), \tag{14}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{-B_5R + A_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}{A_5 + B_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}, \quad (R>0), \tag{15}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}|\xi|) + \sin(\sqrt{R}|\xi|)]}{\cos(\sqrt{R}|\xi|) - \sin(\sqrt{R}|\xi|)}, \quad (R>0), \tag{16}$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{\sqrt{R}[-2A_6B_6\sqrt{R} + (A_6^2 - B_6^2R)[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]]}{A_6^2 - B_6^2R + 2A_6B_6\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}, \quad (R>0), \tag{17}$$

其中 $r, A_i, B_i (i = 3,4,5,6), C$ 是不全为零的任意常数.

### 2.2. Riccati 方程的 Bäcklund 变换

1)若 $z(|\xi|)$ 是 Riccati 方程(6)的解,则下面给出的 $\bar{z}(|\xi|)$ 也是 Riccati 方程(6)的解:

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{p_2 + q_2 z(|\xi|) + m_2 z^2(|\xi|) + r_2 z'(|\xi|) + n_2 z^3(|\xi|) + l_2[z'(|\xi|)]^2}{A_2 + B_2 z(|\xi|) + D_2 z^2(|\xi|) + C_2 z'(|\xi|) + F_2 z^3(|\xi|) + K_2[z'(|\xi|)]^2}. \tag{18}$$

2)若 $z(|\xi|)$ 是 Riccati 方程 (6) 的解,则下列 $\bar{z}(|\xi|)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解:

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{-BR + Az(|\xi|)}{A + Bz(|\xi|)}. \tag{19}$$

Riccati 方程 (6) 的任意解与 Bäcklund 变换 (18),(19) 相结合,并迭代运用后得到 Riccati 方程 (6) 的无穷序列新精确解. 下面列出三种公式(其余情况这里不讨论):

$$z_n(|\xi|) = \frac{p_2 + q_2 z_{n-1}(|\xi|) + m_2 z_{n-1}{}^2(|\xi|) + r_2 z'_{n-1}(|\xi|) + n_2 z^3_{n-1}(|\xi|) + l_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2}{A_2 + B_2 z_{n-1}(|\xi|) + D_2 z_{n-1}{}^2(|\xi|) + C_2 z'_{n-1}(|\xi|) + F_2 z^3_{n-1}(|\xi|) + K_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2},$$

$$z_0(|\xi|) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|), (R < 0, n = 1,2,\cdots). \tag{20}$$

迭代一次获得下列解:

$$z_1(|\xi|) = \frac{p_2 + Z_1(|\xi|)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|) - q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|) + Z_2(|\xi|)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)}{A_2 + Z_3(|\xi|)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|) - B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|) + Z_4(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)}. \tag{21}$$

这里 $Z_1(|\xi|) = r_2 R + l_2 R^2 \mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|)$, $Z_2(|\xi|) = -m_2 R + n_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)$, $Z_3(|\xi|) = C_2 R + K_2 R^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|)$, $Z_4(|\xi|) = -D_2 R + F_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)$.

$$z_n(|\xi|) = \frac{p_2 + q_2 z_{n-1}(|\xi|) + m_2 z_{n-1}{}^2(|\xi|) + r_2 z'_{n-1}(|\xi|) + n_2 z^3_{n-1}(|\xi|) + l_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2}{A_2 + B_2 z_{n-1}(|\xi|) + D_2 z_{n-1}{}^2(|\xi|) + C_2 z'_{n-1}(|\xi|) + F_2 z^3_{n-1}(|\xi|) + K_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2},$$

$$z_0(|\xi|) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}|\xi|), (R > 0, n = 1,2,\cdots); \tag{22}$$

$$z_n(|\xi|) = \frac{-BR + Az_{n-1}(|\xi|)}{A + Bz_{n-1}(|\xi|)},$$

$$z_0(|\xi|) = \frac{\sqrt{R}[-2A_6B_6\sqrt{R} + (A_6{}^2 - B_6{}^2R)[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]]}{A_6{}^2 - B_6{}^2R + 2A_6B_6\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}, \quad (R > 0, n = 1,2,\cdots) \tag{23}$$

这里 $A, B, B_2, C_2, F_2, K_2, m_2, l_2, r_2, A_6, B_6$ 是不全为零的任意常数,这些任意常数与其余常数之间满足下列约束条件:

$$q_2 = \frac{B_2 l_2{}^2 - (l_2{}^2 + K_2{}^2R)[m_2 + r_2 + (F_2 + l_2)R]}{K_2 l_2},$$

$$A_2 = \frac{B_2 l_2 - l_2{}^2R - l_2(m_2 + r_2 + F_2R) - K_2R(C_2 + K_2R)}{K_2},$$

$$n_2 = \frac{1}{K_2}(F_2 l_2 - l_2{}^2 - K_2{}^2R),$$

$$p_2 = R(-B_2 + m_2 + F_2R),$$

$$D_2 = -C_2 + \frac{1}{K_2}(F_2 l_2 - l_2{}^2) + \frac{1}{l_2}(m_2 + r_2 + F_2R)K_2 - K_2R.$$

## 2.3. Riccati 方程解的非线性叠加公式

1)若 $z_1(|\xi|)$, $z_2(|\xi|)$ 是 Riccati 方程 (6) 的解,则下列 $\bar{z}(|\xi|)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解:

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{\mathrm{i}R[\mathrm{i}m_3\sqrt{R} + (m_3 + \mathrm{i}D_3\sqrt{R} + C_3R)z_2(|\xi|) + (-C_3R + D_3z_2(|\xi|))z_1(|\xi|)]}{-\sqrt{R^3}(D_3 + C_3z_2(|\xi|)) + (m_3\sqrt{R} + \mathrm{i}D_3R + C_3\sqrt{R^3} - \mathrm{i}m_3z_2(|\xi|))z_1(|\xi|)}, \quad (m_3D_3 < 0), \tag{24}$$

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{m_3 + D_3 z_2(|\xi|) + \frac{1}{\sqrt{R}}[-\mathrm{i}C_3 R z_1(|\xi|) + \mathrm{i}(m_3 + C_3 R + D_3 z_1(|\xi|))z_2(|\xi|)]}{D_3 + C_3 z_2(|\xi|) - \frac{1}{\sqrt{R^3}}(m_3\sqrt{R} - \mathrm{i}D_3 R + C_3\sqrt{R^3} + \mathrm{i}m_3 z_2(|\xi|))z_1(|\xi|)}, \quad (m_3 D_3 < 0). \tag{25}$$

Riccati 方程 (6) 的已知解与解的非线性叠加公式 (24), (25) 相组合,并迭代运用后得到 Riccati 方程 (6) 的无穷序列新精确解. 下面列出解的一种非线性叠加公式:

$$z_n(|\xi|) = \frac{\mathrm{i}R[\mathrm{i}m_3\sqrt{R} + (m_3 + \mathrm{i}D_3\sqrt{R} + C_3 R)z_{n-1}(|\xi|) + (-C_3 R + D_3 z_{n-1}(|\xi|))z_{n-2}(|\xi|)]}{-\sqrt{R^3}(D_3 + C_3 z_{n-1}(|\xi|)) + (m_3\sqrt{R} + \mathrm{i}D_3 R + C_3\sqrt{R^3} - \mathrm{i}m_3 z_{n-1}(|\xi|))z_{n-2}(|\xi|)},$$

$$(m_3 D_3 < 0),$$

$$z_1(|\xi|) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|), z_2(|\xi|) = \frac{B_3 R + A_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)}{-A_3 + B_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)},$$

$$(n = 3, 4, \cdots). \tag{26}$$

2) 若 $z_1(|\xi|), z_2(|\xi|), z_3(|\xi|)$ 是 Riccati 方程 (6) 的三个解,则下面给出的 $\bar{z}(|\xi|)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解:

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{R[-r_3 z_1(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_2(|\xi|) - p_3 z_3(|\xi|)]}{-r_3 z_2(|\xi|)z_3(|\xi|) + z_1(|\xi|)[-p_3 z_2(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_3(|\xi|)]}, \tag{27}$$

$$\bar{z}(|\xi|) = \frac{r_4 z_2(|\xi|)z_3(|\xi|) - z_1(|\xi|)[q_4 z_2(|\xi|) + (-q_4 + r_4)z_3(|\xi|)]}{-r_4 z_1(|\xi|) + (-q_4 + r_4)z_2(|\xi|) + q_4 z_3(|\xi|)}, \tag{28}$$

$$\bar{z}(|\xi|) = -\frac{R[-Nz_3(|\xi|) + [-L + mz_3(|\xi|)]z_2(|\xi|) + [L + N + nz_2(|\xi|) - (m+n)z_3(|\xi|)]z_1(|\xi|)]}{nRz_3(|\xi|) + [mR + Nz_2(|\xi|) + Lz_3(|\xi|)]z_1(|\xi|) - [(m+n)R + (L+N)z_3(|\xi|)]z_2(|\xi|)}. \tag{29}$$

这里 $p_3, q_4, r_3, r_4, m, n, M, N, L$ 是不全为零的任意常数, $R$ 是 Riccati 方程 (6) 来确定的任意常数. Riccati 方程 (6) 的不同的三个解与解的非线性叠加公式 (27)—(29) 相结合,获得 Riccati 方程 (6) 的无穷序列新精确解. 这里列出解的几种非线性叠加公式,

$$z_n(|\xi|) = \frac{R[-r_3 z_{n-3}(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_{n-2}(|\xi|) - p_3 z_{n-1}(|\xi|)]}{-r_3 z_{n-2}(|\xi|)z_{n-1}(|\xi|) + z_{n-3}(|\xi|)[-p_3 z_{n-2}(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_{n-1}(|\xi|)]}, \quad (n = 4, 5, \cdots),$$

$$z_1(|\xi|) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|), z_2(|\xi|) = \frac{BR + A\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)}{-A + B\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)},$$

$$z_3(|\xi|) = \frac{p_2 + Z_1(|\xi|)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|) - q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|) + Z_2(|\xi|)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)}{A_2 + Z_3(|\xi|)sech^2(\sqrt{-R}|\xi|) - B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|) + Z_4(|\xi|)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)}; \tag{30}$$

$$z_n(|\xi|) = \frac{R[-r_3 z_{n-3}(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_{n-2}(|\xi|) - p_3 z_{n-1}(|\xi|)]}{-r_3 z_{n-2}(|\xi|)z_{n-1}(|\xi|) + z_{n-3}(|\xi|)[-p_3 z_{n-2}(|\xi|) + (p_3 + r_3)z_{n-1}(|\xi|)]}, \quad (n = 4, 5, \cdots),$$

$$z_1(|\xi|) = \frac{-BR + A\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}{A + B\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|) + \tan(2\sqrt{R}|\xi|)]},$$

$$z_2(|\xi|) = \frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}|\xi|) + \sin(\sqrt{R}|\xi|)]}{\cos(\sqrt{R}|\xi|) - \sin(\sqrt{R}|\xi|)}, \quad z_3(|\xi|) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}|\xi|). \tag{31}$$

这里

$$Z_1(|\xi|) = r_2 R + l_2 R^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|),$$

$$Z_2(|\xi|) = -m_2 R + n_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|),$$

$$Z_3(|\xi|) = C_2R + K_2R^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|),$$
$$Z_4(|\xi|) = -D_2R + F_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|).$$

我们迭代运用 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,可以获得无穷序列双曲函数解和无穷序列三角函数解.

## 3. 方法的应用步骤

对于给定的存在尖峰孤立波解的非线性发展方程(以 1 + 1 维非线性发展方程为例)

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0, \tag{32}$$

进行行波变换 $u(x,t) = u(|\xi|)$, $|\xi| = |x + \omega t|$ 后,得到下列常微分方程:

$$G(u, u_{|\xi|}, u_{|\xi||\xi|}, u_{|\xi||\xi||\xi|}, \cdots) = 0. \tag{33}$$

我们把方程 (33) 的解取为下列形式:

$$u(x,t) = u(|\xi|) = g_0 + \frac{g_1 z(|\xi|)}{f_1 + f_2 z(|\xi|)}. \tag{34}$$

其中 $g_0, g_1, f_1, f_2$ 是待定常数. $z(|\xi|)$ 由 Riccati 方程 (6) 来确定.

将 (6), (34) 式一起代入 (33) 式,令 $z^j(|\xi|)$ $(j = 0,1,2,\cdots)$ 的系数为零即可得到 $g_0, g_1, \omega, f_1, f_2$ 为未知量的非线性代数方程组,用符号计算系统 Mathematica 求出该代数方程组的解,再把该代数方程组的每一组解分别同 Riccati 方程 (6) 的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式来确定的无穷序列解一起代入 (34) 式,即可得到非线性发展方程 (32) 的无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

## 4. Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解

本文用 Riccati 方程和一种形式解相结合的方法,通过 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,构造了 Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

行波变换 $u(x,t) = u(|\xi|)$, $|\xi| = |x + \omega t|$ 分两种情况. 当 $\xi > 0$ 时,变换为 $u(x,t) = u(\xi)$, $\xi = x + \omega t$; 当 $\xi < 0$ 时,变换为 $u(x,t) = u(\xi)$, $\eta = -\xi = -x - \omega t$.

我们把这两种情况分别代入方程 (5) 后得到下列常微分方程:

$$\begin{aligned}&(\omega + c_0)u'(\xi) + (\gamma - \alpha^2\omega)u'''(\xi)\\&- [\beta u^2(\xi) + \delta(u'(\xi))^2\\&+ \theta u(\xi)u''(\xi)]' = 0,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&-(\omega + c_0)u'(\eta) - (\gamma - \alpha^2\omega)u'''(\eta)\\&+ [\beta u^2(\eta) + \delta(u'(\eta))^2\\&+ \theta u(\eta)u''(\eta)]' = 0,\end{aligned} \tag{36}$$

对这两个常微分方程分别对 $\xi$ 和 $\eta$ 积分一次后得到如下常微分方程(积分常数取为零):

$$\begin{aligned}&(\omega + c_0)u(\xi) + (\gamma - \alpha^2\omega)u''(\xi)\\&- [\beta u^2(\xi) + \delta(u'(\xi))^2\\&+ \theta u(\xi)u''(\xi)] = 0,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&-(\omega + c_0)u(\eta) - (\gamma - \alpha^2\omega)u''(\eta)\\&+ [\beta u^2(\eta) + \delta(u'(\eta))^2\\&+ \theta u(\eta)u''(\eta)] = 0,\end{aligned} \tag{38}$$

我们将 (6), (34) 式分别代入 (37), (38) 式,令 $z^j(|\xi|)$ $(i = j = 0,1,2,\cdots)$ 的系数为零后得到的两组非线性代数方程组的解是等价的,所以只考虑把 (6), (34) 式一起代入(37)式后得到的非线性代数方程组的解. 用符号计算系统 Mathematica 求出该非线性代数方程组(未列出)的如下解:

$$f_1 = \mp\frac{\mathrm{i}\sqrt{\beta}(2\alpha^2\beta + \theta)g_1}{\sqrt{2\theta}(c_0\alpha^2 + \gamma)}, \omega = \frac{2\beta\gamma - c_0\theta}{2\alpha^2\beta + \theta}, g_0 = \frac{c_0\alpha^2 + \gamma}{2\alpha^2\beta + \theta}, f_2 = 0, \delta = -2\theta, R = \frac{\beta}{2\theta}, \quad (\theta < 0); \tag{39}$$

$$c_0 = -\frac{3(\delta + \theta)\omega + \beta(\gamma + 3\alpha^2\omega)}{3(\delta + \theta)}, g_0 = -\frac{4\alpha^2\gamma\omega}{-4\gamma(2\delta + 3\theta) + 3\alpha^2(2\delta + \theta)\omega}, R = \frac{\beta}{4(\delta + \theta)},$$

$$f_1 = \pm\frac{3\mathrm{i}\sqrt{\beta}(2\delta + \theta)(4\gamma(2\delta + 3\theta) - 3\alpha^2(2\delta + \theta)\omega)g_1}{64\gamma^2(2\delta + 3\theta)\sqrt{\delta + \theta}},$$

$$f_2=-\frac{3(2\delta+\theta)(4\gamma(2\delta+3\theta)-3\alpha^2(2\delta+\theta)\omega)g_1}{32\gamma^2(2\delta+3\theta)},\quad(\delta+\theta<0);\tag{40}$$

$$c_0=-\frac{\gamma}{\alpha^2},\omega=\frac{\gamma}{\alpha^2},f_1=\pm\mathrm{i}\sqrt{R}f_2,g_1=-2f_2g_0,R=\frac{\beta}{4(\delta+\theta)},\quad(\delta+\theta<0);\tag{41}$$

$$c_0=-\frac{\gamma}{\alpha^2},\omega=\frac{\gamma}{\alpha^2},f_1=\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{\beta}g_1}{4g_0\sqrt{\delta+\theta}},f_2=-\frac{g_1}{2g_0},R=\frac{\beta}{4(\delta+\theta)},\quad(\delta+\theta<0);\tag{42}$$

$$f_2=\frac{(\alpha^2\beta-\delta)g_1}{2(c_0\alpha^2+\gamma+(-\alpha^2\beta+\delta)g_0)},\omega=\frac{\beta\gamma+c_0\delta}{\alpha^2\beta-\delta},$$

$$f_1=\pm\frac{\mathrm{i}(\alpha^2\beta-\delta)\sqrt{\beta}g_1}{4\sqrt{\delta+\theta}(c_0\alpha^2+\gamma+(-\alpha^2\beta+\delta)g_0)},R=\frac{\beta}{4(\delta+\theta)},\quad(\delta+\theta<0).\tag{43}$$

将(39)—(43)式代入(34)式后得到 Degasperis-Procesi 方程的如下精确解:

$$u(x,t)=u(|\xi|)=\frac{(c_0\alpha^2+\gamma)(\sqrt{\beta}\pm\mathrm{i}\sqrt{2\theta}z(|\xi|)}{\sqrt{\beta}(2\alpha^2\beta+\theta)},\quad\left(\xi=x+\frac{2\beta\gamma-c_0\theta}{2\alpha^2\beta+\theta}t,\theta<0\right),\tag{44}$$

$$u(x,t)=u(|\xi|)=\frac{4\gamma(3\alpha^2\sqrt{\beta}(2\delta+\theta)\omega\mp2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}(8\gamma(2\delta+3\theta)-3\alpha^2(2\delta+\theta)\omega)z(|x+\omega t|))}{3(2\delta+\theta)(4\gamma(2\delta+3\theta)-3\alpha^2(2\delta+\theta)\omega)(\sqrt{\beta}+2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}z(|x+\omega t|))},\tag{45}$$

$$u(x,t)=u(|\xi|)=g_0-\frac{4\mathrm{i}g_0\sqrt{\delta+\theta}z(|\xi|)}{\mp\sqrt{\beta}+2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}z(|\xi|)},\quad\left(\xi=x+\frac{\gamma}{\alpha^2}t\right).\tag{46}$$

$$u(x,t)=u(|\xi|)=\frac{g_0(\sqrt{\beta}\pm2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}z(|\xi|))}{\sqrt{\beta}\mp2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}z(|\xi|)},\quad\left(\xi=x+\frac{\gamma}{\alpha^2}t\right).\tag{47}$$

$$u(x,t)=u(|\xi|)=\frac{(\alpha^2\beta-\delta)\sqrt{\beta}g_0\mp2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}(2c_0\alpha^2+2\gamma+(-\alpha^2\beta+\delta)g_0)z\left(\left|x+\frac{\beta\gamma+c_0\delta}{\alpha^2\beta-\delta}t\right|\right)}{(\alpha^2\beta-\delta)\left(\sqrt{\beta}\mp2\mathrm{i}\sqrt{\delta+\theta}z\left(\left|x+\frac{\beta\gamma+c_0\delta}{\alpha^2\beta-\delta}t\right|\right)\right)},\tag{48}$$

其中 (45)—(48) 式 中 $\delta+\theta<0$.

将 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式来确定的无穷序列精确解,代入解 (44)—(48) 式 后得到 Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

当 $\beta>0$ 时,下列解的非线性叠加公式 (49),(50) 来确定的解,代入 (44)—(48) 式 获得 Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解. 当 $\beta<0$ 时,下列解的非线性叠加公式 (51),(52) 来确定的解,代入 (44)—(48) 式 获得 Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰周期解.

$$z_n(|\xi|)=\frac{p_2+q_2z_{n-1}(|\xi|)+m_2z_{n-1}{}^2(|\xi|)+r_2z'_{n-1}(|\xi|)+n_2z^3_{n-1}(|\xi|)+l_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2}{A_2+B_2z_{n-1}(|\xi|)+D_2z_{n-1}{}^2(|\xi|)+C_2z'_{n-1}(|\xi|)+F_2z^3_{n-1}(|\xi|)+K_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2},$$

$$z_0(|\xi|)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|),(R<0,n=1,2,\cdots);\tag{49}$$

$$z_n(|\xi|)=\frac{R[-r_3z_{n-3}(|\xi|)+(p_3+r_3)z_{n-2}(|\xi|)-p_3z_{n-1}(|\xi|)]}{-r_3z_{n-2}(|\xi|)z_{n-1}(|\xi|)+z_{n-3}(|\xi|)[-p_3z_{n-2}(|\xi|)+(p_3+r_3)z_{n-1}(|\xi|)]},$$

$$(n=4,5,\cdots),$$

$$z_1(|\xi|)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|),z_2(|\xi|)=\frac{BR+A\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)}{-A+B\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)},$$

$$z_3(|\xi|)=\frac{p_2+Z_1(|\xi|)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|)-q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)+Z_2(|\xi|)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)}{A_2+Z_3(|\xi|)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|)-B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}|\xi|)+Z_4(|\xi|)\tanh^2(\sqrt{-R}|\xi|)};\tag{50}$$

$$z_n(|\xi|)=\frac{p_2+q_2z_{n-1}(|\xi|)+m_2z_{n-1}{}^2(|\xi|)+r_2z'_{n-1}(|\xi|)+n_2z^3_{n-1}(|\xi|)+l_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2}{A_2+B_2z_{n-1}(|\xi|)+D_2z_{n-1}{}^2(|\xi|)+C_2z'_{n-1}(|\xi|)+F_2z^3_{n-1}(|\xi|)+K_2[z'_{n-1}(|\xi|)]^2},$$

$$z_0(|\xi|)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}|\xi|),\quad (R>0,n=1,2,\cdots). \tag{51}$$

$$z_n(|\xi|)=\frac{R[-r_3z_{n-3}(|\xi|)+(p_3+r_3)z_{n-2}(|\xi|)-p_3z_{n-1}(|\xi|)]}{-r_3z_{n-2}(|\xi|)z_{n-1}(|\xi|)+z_{n-3}(|\xi|)[-p_3z_{n-2}(|\xi|)+(p_3+r_3)z_{n-1}(|\xi|)]},$$
$$(n=4,5,\cdots),$$

$$z_1(|\xi|)=\frac{-BR+A\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|)+\tan(2\sqrt{R}|\xi|)]}{A+B\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}|\xi|)+\tan(2\sqrt{R}|\xi|)]},$$

$$z_2(|\xi|)=\frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}|\xi|)+\sin(\sqrt{R}|\xi|)]}{\cos(\sqrt{R}|\xi|)-\sin(\sqrt{R}|\xi|)},$$

$$z_3(|\xi|)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}|\xi|). \tag{52}$$

这里

$$Z_1(|\xi|)=r_2R+l_2R^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|),$$
$$Z_2(|\xi|)=-m_2R+n_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|),$$
$$Z_3(|\xi|)=C_2R+K_2R^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}|\xi|),$$
$$Z_4(|\xi|)=-D_2R+F_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}|\xi|).$$

$A,B,B_2,C_2,F_2,K_2,m_2,l_2,r_2$ 是不全为零的任意常数,这些任意常数与其余常数之间满足下列约束条件:

$$n_2=\frac{1}{K_2}(F_2l_2-l_2{}^2-K_2{}^2R),$$
$$p_2=R(-B_2+m_2+F_2R),$$
$$q_2=\frac{B_2l_2{}^2-(l_2{}^2+K_2{}^2R)[m_2+r_2+(F_2+l_2)R]}{K_2l_2},$$
$$A_2=\frac{B_2l_2-l_2{}^2R-l_2(m_2+r_2+F_2R)-K_2R(C_2+K_2R)}{K_2},$$
$$D_2=-C_2+\frac{1}{K_2}(F_2l_2-l_2{}^2)+\frac{1}{l_2}(m_2+r_2+F_2R)K_2-K_2R.$$

## 5. 结 论

从 1834 年到 1993 年,在孤立子理论中研究了光滑孤立子解的求解方法和解的一些性质. 1993 年,在非线性发展方程中发现了尖峰孤立波解和尖峰周期解. 这是一种新的发现,引起数学物理学家的极大兴趣. 最近,研究了 Degasperis-Procesi 方程等非线性发展方程获得了尖峰孤立波解的存在性等多种新的成果. 在构造精确解方面获得了有限多个尖峰孤立波解和尖峰周期解. 从 2000 年,提出 Riccati 方程法以来,在构造非线性发展方程精确解领域获得了无穷序列光滑孤立子精确解. 理论上说:非线性发展方程存在无穷多个解. 本文为了获得非线性发展方程的无穷序列尖峰孤立波解和尖峰周期解,给出 Riccati 方程的自 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,通过 Riccati 方程与一种形式解相结合的方法,构造了 Degasperis-Procesi 方程的无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列尖峰周期解.

[1] Russell J S. *Reports on waves*, Edinburgh: Proc. Royal. Soc., 1844, 311
[2] Korteweg D J, de Vries G 1895 *Phil. Mag.* **39** 422
[3] Zabusky N, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
[4] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
[5] Alber M S, Camassa R 1994 *Lett. Math. Phys.* **32** 137
[6] Clarkson P A, Mansfield E L, Priestley T J 1997 *Math. Comput. Modelling* **25** 195
[7] Xin Z P, Zhang P 2000 *Comm. Pure. Appl. Math.* **53** 1411
[8] Michael Fisher, Jeremy Schiff 1999 *Phys. Lett.* A **259** 371
[9] Adrian Constantin, Waner A Atrauss 2000 *Comm. Pure. Appl. Math.* **53** 603
[10] Tian L X, Xu G, Liu Z R 2002 *Appl. Math. Mechanics* **23** 497 (in Chinese) [田立新、许　刚、刘曾荣 2002 应用数学和力学 **23** 497]
[11] Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **87** 4501
[12] Guo B L, Liu Z R 2003 *Science in China* A **33** 325 (in Chinese) [郭柏灵、刘正荣 2003 中国科学 A **33** 325]
[13] Yin J L, Tian L X 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 3632 (in Chinese) [殷久利、田立新 2009 物理学报 **58** 3632]
[14] Yu L Q, Tian L X 2006 *Math. Practice. Theory.* **36** 261 (in Chinese) [余丽琴、田立新 2006 数学的实践与认识 **36** 261]
[15] Yu L Q, Tian L X 2005 *Pure. Appl. Math.* **21** 310 (in Chinese) [余丽琴、田立新 2005 纯粹数学与应用数学 **21** 310]
[16] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[17] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[18] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1
[19] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 137
[20] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 143
[21] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
[22] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377
[23] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 497
[24] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 585
[25] Xie F D, Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 39
[26] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 647
[27] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 405
[28] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 353
[29] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 1
[30] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华、方建平、朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]
[31] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 11 (inChinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
[32] Pan Z H, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100301
[33] Qiang J Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090305
[34] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080303
[35] Taogetusang, Sirendaoerji, Wang Q P 2009 *Acta Sci. J. Nat. Univ. NeiMongol* **38** 387 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉、王庆鹏 2009 内蒙古师范大学学报 **38** 387]
[36] Taogetusang 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 6712 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 6712]
[37] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 4413 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 4413]
[38] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 5194 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 5194]

# Infinite sequence peak solitary wave solutions of Degasperis-Procesi equation *

Taogetusang†

(*College of Mathematical Science*, *Inner Mongolia Normal University*, *Huhhot* 010022, *China*)

(Received 21 September 2010; revised manuscript received 19 October 2010)

Abstract

To construct infinite sequence peak solitary wave solutions to nonlinear evolution equations, Bäcklund transformation of Riccati equation and nonlinear superposition formula of the solutions are introduced, then Degasperis – Procesi equation is taken as an example and infinite sequence peak solitary wave solutions and periodic solutions of the equation are obtained with the help of symbolic computation system Mathematica.

**Keywords**: Riccati equation, nonlinear superposition formula of the solutions, peak solitary wave solution, Degasperis – Procesi equation

**PACS**: 02. 30. Ik, 02. 30. Jr

* Project supported by the Natural Natural Science Foundation of China (Grant No. 10461006), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZZ07031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† E-mail: tgts@imnu. edu. cn