# 强阻尼非线性热弹耦合杆系统的全局吸引子*

张建文1)† 李金峰1) 吴润衡2)

1)(太原理工大学理学院,太原 030024)

2)(北方工业大学理学院,北京 100041)

(2010 年 5 月 9 日收到;2010 年 10 月 12 日收到修改稿)

本文主要以算子半群理论为依据,证明了一类强阻尼非线性热弹耦合杆方程组在初边值条件下,全局吸引子的存在性,并且对吸引子维数做了估计.

**关键词:** 热弹耦合杆系统, 强阻尼, 非线性, 全局吸引子

**PACS:** 02.30.Jr, 04.20.Ex, 02.60.Lj

## 1. 引 言

上世纪 80 年代以来,Temam[1] 等人对自治偏微分方程所确定的无穷维动力系统的渐近性进行了研究. 研究发现相当多的带耗散结构的自治偏微分方程的解轨道就其长期行为而言,与有限维的常微分方程的解轨道本质上是一致的. 随着时间的延续,所有解轨道都趋近于一个分形维数均有限的整体吸引子和惯性流形. 然而,由于无穷维问题的复杂性,目前只建立了初步研究框架,还有许多理论问题亟待解决. 现有的关于无穷维系统的研究主要集中于某些非线性热传导方程[2,3]、波动方程[4,5]和一些具体的方程[6]等, 而且主要是证明解的存在性[7—10]. 对热弹性系统全局吸引子的存在性及 Hausdorff 维数估计的结果相对较少[11,12].

本文研究如下热效应下的强阻尼非线性杆方程:

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u + \beta\,\nabla\theta = f(u,u_t) + g(x), \\
& \theta_t - \gamma\Delta\theta + \beta\,\nabla u_t = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

在初始条件

$$
\begin{aligned}
& u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \\
& \theta(x,0) = \theta_0(x), x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2}
$$

及边界条件

$$
u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \theta|_{x\in\partial\Omega} = 0 \tag{3}
$$

下,解的全局吸引子的存在性及其维数估计,其中 $u = u(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$ 分别表示在位移为 $x$, 时间为 $t$ 处对平衡位置的角位移和温度差, $\Omega = (0,l)$, ($l > 0$), $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 是热效力耦合系数, $\gamma > 0$, 记 $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

非线性函数 $f(u,v)$, $g(x)$ 满足下述条件:

$(H_1)$ $f(u,v) \in C^1(R \times R; R)$,

$|f(u,v)| \leqslant k_0 + k_1|u|^{\delta_0}$,

$\forall (u,v) \in R \times R$,

$(H_2)$ $|f_1(u,v)| \leqslant k_2$,

$|f_2(u,v)| \leqslant k_3$,

$\forall (u,v) \in R \times R$,

$(H_3)$ $g(x) \in L^2(\Omega)$,

$(H_4)$ $|f_1(u_1,v) - f_1(u_2,v)| \leqslant k_4|u_1 - u_2|^{\delta_1}$,

$\forall u_1, u_2, v \in R$,

$(H_5)$ $|f_1(u,v_1) - f_1(u,v_2)| \leqslant k_5|v_1 - v_2|^{\delta_2}$,

$\forall u, v_1, v_2 \in R$,

$(H_6)$ $|f_2(u,v_1) - f_2(u,v_2)| \leqslant k_6|v_1 - v_2|^{\delta_3}$,

$\forall u, v_1, v_2 \in R$,

其中

$$
\begin{gathered}
f_1(u,v) = (\partial f/\partial u)(u,v), \\
f_2(u,v) = (\partial f/\partial v)(u,v), \\
k_i > 0,\ i = 0, 1, \cdots, 6, \\
0 < \delta_0 < 1,\ \delta_j > 0,\ j = 1,2,3.
\end{gathered}
$$

$L^2(\Omega)$ 中的内积和范数分别记为 $(u,v)$, $|u|$.

* 山西省自然科学基金(批准号:2010011008)和国家自然科学基金(批准号:10772131)资助的课题.

† E-mail: jianwenz@public.ty.sx.cn

 

$H_0^1(\Omega)$ 中的内积和范数分别记为

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$

$$\|u\| = ((u,u))^{1/2}.$$

$E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中的内积和范数分别记为

$$(y_1,y_2)_{H_0^1\times L^2\times L^2} = ((u_1,u_2)) + (v_1,v_2) + (\theta_1,\theta_2),$$

$$\|y\|_{H_0^1\times L^2\times L^2} = (y,y)^{1/2}_{H_0^1\times L^2\times L^2},$$

其中 $y_i = (u_i,v_i,\theta_i)^{\mathrm{T}}, i = 1,2, y = (u,v,\theta)^{\mathrm{T}} \in E$.

## 2. 广义解的存在性

记线性算子 $A = -\Delta: D(A) \to L^2(\Omega)$ 是自伴正定算子,其中 $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, 此时 $A$ 的特征值 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 满足

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots,$$

$$\text{且 } \lambda_m \to +\infty, m \to +\infty.$$

令 $u_t = v$, 那么系统(1)—(3)等价于空间 $E$ 中的如下初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = CY + F(Y),$$

$$Y(t) = Y_0, \tag{4}$$

其中 $Y_0 = (u_0,u_1,\theta_0)^{\mathrm{T}} \in E$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -A & -\alpha A & \beta A^{1/2} \\ 0 & \beta A^{1/2} & -\gamma A \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, F(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u,v) + g \\ 0 \end{pmatrix},$$

$C$ 的定义域记为 $D(C) = D(A) \times D(A) \times D(A)$.

**引理 1** 记 $B = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ A & \alpha A & -\beta A^{1/2} \\ 0 & -\beta A^{1/2} & \gamma A \end{pmatrix}$, 那么 $B$ 是一扇形算子.

**证明** 我们先来求 $\lambda I - B$ 的逆算子,而 $\lambda I - B = \begin{pmatrix} \lambda & I & 0 \\ -A & \lambda - \alpha A & \beta A^{1/2} \\ 0 & \beta A^{1/2} & \lambda - \gamma A \end{pmatrix}$, 经计算得到逆算子为

$$(\lambda I - B)^{-1} = \frac{1}{\lambda\beta^2 A - (\lambda - \gamma A)(\lambda^2 - \alpha\lambda A + A)} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}[(\lambda - \gamma A)A + \lambda\beta^2 A - (\lambda - \gamma A)(\lambda^2 - \alpha\lambda A + A)] & \lambda - \gamma A & -\beta A^{1/2} \\ -(\lambda - \gamma A)A & -\lambda(\lambda - \gamma A)A & \lambda\beta A^{1/2} \\ \beta A^{1/2} A & \lambda\beta A^{1/2} & -(\lambda^2 - \alpha\lambda A + A) \end{pmatrix},$$

记 $R(\lambda,B) = (\lambda I - B)^{-1}$, 由文献[13]引理 2.2.2 的证明可得, 存在 $a > 0$, 及常数 $k = k(a)$, 使得

$$\|R(\lambda,B)\| \leqslant \frac{k}{|\lambda - a|},$$

又由文献[13]引理 2.2.1 可得

$$\rho(B) \supset \sum\nolimits_{a,\delta} = \Big\{\lambda \in C, \lambda \neq a,$$

$$\Big|\arg|\lambda - a| < \frac{\pi}{2} + \delta\Big|\Big\} \cup \{a\},$$

$$\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

因此 $B$ 是一扇形算子,证毕.

据上述引理可知,半群 $\mathrm{e}^{Ct}$ 的无穷小生成元为 $C$, $B = -C$ 又为扇形算子,所以 $\mathrm{e}^{Ct}$ 为 $C$ 在 $E$ 中生成的解析半群.

**引理 2** (**4**)式中 $F(Y)$ 是关于 $Y$ 全局 Lipschitz 连续的.

**证明**

$$\|F(Y_1) - F(Y_2)\|^2_{H_0^1\times L^2\times L^2}$$

$$= |f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)|^2_{L^2}$$

$$= \int_\Omega [f_1(\xi,v_1)(u_1 - u_2)$$

$$+ f_2(u_2,\eta)(v_1 - v_2)]^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_\Omega [k_2|u_1 - u_2| + k_3|v_1 - v_2|]^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_\Omega \Big(k_2^2|u_1 - u_2|^2 + k_3^2|v_1 - v_2|^2$$

$$+ \frac{k_2^2k_3^2}{\sigma}|u_1 - u_2|^2 + \sigma|v_1 - v_2|^2\Big)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(k_2^2 + \frac{k_2^2k_3^2}{\sigma}\right)\|u_1 - u_2\|^2$$

$$+ (k_3^2 + \sigma)|v_1 - v_2|^2 + |\theta_1 - \theta_2|^2$$
$$\leqslant L\|Y_1 - Y_2\|^2,$$

其中

$$L = \max\left\{k_2^2 + \frac{k_2^2k_3^2}{\sigma}, k_3^2 + \sigma, 1\right\},$$

故 $F(Y)$ 关于 $Y$ 是全局 Lipschitz 连续的.

由文献[**14**]可得到下面定理.

**定理 1**[14] 如果 $f(u,v)$, $g(x)$ 满足条件 $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, 那么, 对任意 $Y_0 \in E$, 存在唯一函数 $Y(t) = Y(t, Y_0) \in C(R_+, E)$, 满足 $Y(0, Y_0) = Y_0$, 且 $Y(t)$ 满足积分方程

$$Y(t, Y_0) = \mathrm{e}^{Ct}Y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{C(t-\tau)}F(Y(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad (5)$$

这时 $Y(t)$ 就叫做(**4**)的广义解.

## 3. 吸引子的存在性

对任意 $t \geqslant 0$, 引入映射 $S(t): Y_0 \to Y(t, Y_0)$, 其中 $Y(t, Y_0)$ 是(**4**)式的广义解, 因此 $\{S(t), t \geqslant 0\}$ 是 $E$ 上的连续半群. 为了得到本文结论, 我们在空间 $E$ 上定义加权内积和范数如下:

$$(\varphi, \phi)_E = k((u_1, u_2)) + (w_1, w_2) + (\theta_1, \theta_2),$$
$$|\varphi|_E = (\varphi, \varphi)_E^{1/2}, \quad (6)$$
$$\forall \varphi = (u_1, w_1, \theta_1)^{\mathrm{T}},$$
$$\phi = (u_2, w_2, \theta_2)^T \in E,$$
$$k = 1 - \alpha\varepsilon,$$

显然范数 $|\cdot|_E$ 等价于 $E$ 中通常范数 $\|\cdot\|_{H_0^1 \times L^2 \times L^2}$.

令 $w = u_t + \varepsilon u$, 其中 $\varepsilon$ 满足

$$2\varepsilon^3 - 3\alpha\lambda_1\varepsilon^2 + (\alpha^2\lambda_1^2 + 3\lambda_1)\varepsilon - \alpha\lambda_1^2 \leqslant 0,$$
$$\alpha\varepsilon^2 - (1 + 2\alpha\lambda_1\gamma + 2\beta^2)\varepsilon + 2\gamma\lambda_1 \leqslant 0,$$

故 $u_t = w - \varepsilon u$, 结合系统(1), 有

$$\begin{aligned} w_t &= u_{tt} + \varepsilon u_t \\ &= (\alpha\varepsilon A - A - \varepsilon^2 I)u + (\varepsilon I - \alpha A)w \\ &\quad + \beta A^{1/2}\theta + f(u, w - \varepsilon u) + g, \\ \theta_t &= \beta\varepsilon A^{1/2}u - \beta A^{1/2}w - \gamma A\theta. \end{aligned}$$

令 $\varphi = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}} \in E$, 故系统(1)可以写成

$$\varphi_t + \Lambda\varphi = F(\varphi),$$
$$\varphi(0) = (u_0, u_1 + \varepsilon u_0, \theta_0)^{\mathrm{T}} \in E, \quad (7)$$

其中

$$F(\varphi) = (0, f(u, w - \varepsilon u) + g, 0)^{\mathrm{T}}, \quad (8)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon I & -I & 0 \\ \varepsilon^2 - \alpha\varepsilon A + A & \alpha A - \varepsilon I & -\beta A^{1/2} \\ \beta\varepsilon A^{1/2} & -\beta A^{1/2} & \gamma A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$D(\Lambda) = D(A) \times D(A) \times D(A).$$

**引理 3** 对任意 $\varphi = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}} \in E$, 有

$$(\Lambda\varphi, \varphi)_E \geqslant \sigma|\varphi|_E^2 + \frac{\alpha\lambda_1}{2}|w|^2, \sigma = \frac{\varepsilon}{2}.$$

**证明** 对任意 $\varphi = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}} \in D(\Lambda)$, 由(6), (7)式, 有

$$\begin{aligned} &(\Lambda\varphi, \varphi)_E - \sigma|\varphi|_E^2 - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|w|^2 \\ = &k\varepsilon\|u\|^2 - k((w,u)) + \varepsilon^2(u,w) \\ &+ \alpha\varepsilon(\Delta u, w) - (\Delta u, w) \\ &- \alpha(\Delta w, w) - \varepsilon|w|^2 \\ &+ \beta(\nabla\theta, w) - \beta\varepsilon(\nabla u, \theta) \\ &+ \beta(\nabla w, \theta) - \gamma(\nabla\theta, \theta) \\ &- \sigma(k\|u\|^2 + |w|^2 + |\theta|^2) - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|w|^2 \\ \geqslant &k\varepsilon\|u\|^2 - k((w,u)) + \varepsilon^2(u,w) \\ &+ (\alpha\varepsilon - 1)(\Delta u, w) \\ &+ \alpha\lambda_1|w|^2 - \varepsilon|w|^2 - \beta\varepsilon(\nabla u, \theta) \\ &+ \gamma\lambda_1|\theta|^2 - \sigma(k\|u\|^2 \\ &+ |w|^2 + |\theta|^2) - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|w|^2 \\ \geqslant &k\varepsilon\|u\|^2 - k\|w\|\|u\| - \varepsilon^2|u||w| \\ &- (\alpha\varepsilon - 1)\|w\|\|u\| \\ &+ \alpha\lambda_1|w|^2 - \varepsilon|w|^2 \\ &- \beta\varepsilon\|u\||\theta| \\ &+ \gamma\lambda_1|\theta|^2 - \sigma k\|u\|^2 \\ &- \sigma|w|^2 - \sigma|\theta|^2 - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|w|^2 \\ \geqslant &\frac{k\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \left(\frac{\alpha\lambda_1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2}\right)|w|^2 \\ &+ \left(\gamma\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\theta|^2 - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\||w| \\ &- \beta\varepsilon\|u\||\theta| \\ = &\frac{k\varepsilon}{4}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\||w| \\ &+ \left(\frac{\alpha\lambda_1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2}\right)|w|^2 \\ &+ \frac{k\varepsilon}{4}\|u\|^2 - \beta\varepsilon\|u\||\theta| \\ &+ \left(\gamma\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\theta|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

由于

$$k\varepsilon\left(\frac{\alpha\lambda_1}{2}-\frac{3\varepsilon}{2}\right)\geqslant\frac{\varepsilon^4}{\lambda_1},$$

$$k\varepsilon\left(\gamma\lambda_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\geqslant\beta^2\varepsilon^2,$$

所以由(10)式及 $E$ 在 $D(\Lambda)$ 中稠密,故引理得证.

**引理 4** 对任意 $\varphi=(u,w,\theta)^{\mathrm{T}}\in E$, 有

$$\limsup_{t\to\infty}|\varphi|_E^2\leqslant\frac{M_0}{\sigma},$$

其中

$$M_0=\frac{(|g|+k_0)^2}{\alpha\lambda_1}+(1-\delta_0)\left(\frac{(\lambda_1\delta_0)^{\delta_0}k_1^2}{k^{\delta_0}\sigma^{1+\delta_0}}\right)^{1/1-\delta_0},$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon}{2}.$$

**证明** $\varphi=(u,w,\theta)^{\mathrm{T}}$ 与(7)式在 $E$ 中作内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|_E^2=-(\Lambda\varphi,\varphi)_E+(F(\varphi),\varphi)_E.\quad(11)$$

由(6)和(8)式可得

$$\begin{aligned}2(F(\varphi),\varphi)_E&=2(f(u,w-\varepsilon u)+g,w)\\&\leqslant2|f(u,w-\varepsilon u)+g||w|\\&\leqslant\frac{(|g|+k_0)^2}{\alpha\lambda_1}+\alpha\lambda_1|w|^2\\&\quad+\frac{k_1^2}{\sigma}|u|^{2\delta_0}+\sigma|w|^2+\sigma|\theta|^2\\&\leqslant\frac{(|g|+k_0)^2}{\alpha\lambda_1}+\alpha\lambda_1|w|^2\\&\quad+\sigma|w|^2+\sigma|\theta|^2+\sigma(k\|u\|^2)\\&\quad+(1-\delta_0)\left(\frac{(\lambda_1\delta_0)^{\delta_0}k_1^2}{k^{\delta_0}\sigma^{1+\delta_0}}\right)^{1/1-\delta_0}\\&\leqslant\alpha\lambda_1|w|^2+\sigma|\varphi|_E^2+\frac{(|g|+k_0)^2}{\alpha\lambda_1}\\&\quad+(1-\delta_0)\left(\frac{(\lambda_1\delta_0)^{\delta_0}k_1^2}{k^{\delta_0}\sigma^{1+\delta_0}}\right)^{\frac{1}{1-\delta_0}}.\end{aligned}\quad(12)$$

由引理 3, (11),及(12)式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|_E^2\leqslant-\sigma|\varphi|_E^2+M_0,$$

其中

$$M_0=\frac{(|g|+k_0)^2}{\alpha\lambda_1}+(1-\delta_0)\left(\frac{(\lambda_1\delta_0)^{\delta_0}k_1^2}{k^{\delta_0}\sigma^{1+\delta_0}}\right)^{\frac{1}{1-\delta_0}}.$$

运用 Gronwall 不等式,在空间 $(E,|.|_E)$ 中得到如下吸收不等式:

$$|\varphi(t)|_E^2\leqslant|\varphi(0)|_E^2\exp(-\sigma t)+\frac{M_0}{\sigma}[1-\exp(-\sigma t)],$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup|\varphi|_E^2\leqslant\dfrac{M_0}{\sigma}$, 证毕.

据上,可得出下面引理.

**引理 5** 由(7)式定义的映射

$S_\varepsilon(t):E\to E$,

$(u_0,u_1+\varepsilon u_0,\theta_0)^{\mathrm{T}}\to(u_t,u_t(t)+\varepsilon u(t),\theta_t)^{\mathrm{T}}$,

对任意 $t>0$ 是 point dissipative[15,16] 的,并且是有界的.

**引理 6** 由(4)定义的映射

$S(t):E\to E,(u_0,u_1,\theta_0)^{\mathrm{T}}\to(u(t),u_t(t),\theta(t))^{\mathrm{T}}$,

对任意 $t>0$ 是 point dissipative 的并且是有界的.

**证明** 因为在 $E$ 中范数 $|\cdot|_E$ 等价于通常范数 $\|\cdot\|_{H_0^1\times L^2\times L^2}$, 由 $S(t),S_\varepsilon(t)$ 的定义,可得

$$S_\varepsilon(t)=R_\varepsilon S(t)R_{-\varepsilon},\quad(13)$$

其中 $R_\varepsilon:\{u,v,\theta\}\to\{u,v+\varepsilon u,\theta\}$ 是 $E$ 中的同构映射,由引理 5 可得结论成立.

**定理 2** 由(4)式定义的非线性半群 $S(t):E\to E,t\geqslant0$, 在 $E$ 中具有全局吸引子 $M$.

**证明** 由引理 4 可得,半群 $S(t)$ 在 $E$ 中一致有界,即对一切 $R>0$, 存在常数 $C$, 当 $|\varphi|_E\leqslant R$ 时,有 $|S(t)\varphi|_E\leqslant C$, $\forall t\in[0,+\infty)$;由引理 6 得,存在 $E$ 中有界的吸收集 $B_0$;又当 $t>0$ 时, $S(t)$ 为全连续算子;因此, $S(t):E\to E,t\geqslant0$ 在 $E$ 中具有全局吸引子 $M$.

## 4. 维数估计

**引理 7** 方程(1)的线性化方程为

$$\begin{aligned}&U_t=V,\\&V_t-\alpha\Delta V-\Delta U+\beta\nabla\theta\\&=f_1(u,u_t)U+f_2(u,u_t)V,\\&\theta_t-\gamma\Delta\theta+\beta\nabla V=0,\end{aligned}\quad(14)$$

边界条件为

$$\begin{aligned}&U(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=0,V(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=0,\\&\theta(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=0,\end{aligned}\quad(15)$$

初值条件为

$$U(x,0)=U_0,\ V(x,0)=V_0,\theta(x,0)=\theta_0,\quad(16)$$

如果函数 $f(u,v),g(x)$ 满足条件 $(H_1)$—$(H_6)$, 那么(14)式在 $E$ 中就是一个 Well-posed 问题. 由(4)式定义的映射 $S(t)$ 在 $E$ 上是 Frechet 可微的,对任意 $t>0$. 在 $\varphi=(u_0,u_1,\theta_0)^{\mathrm{T}}$ 处的微分是 $E$ 上的线性算子

$$(U_0,V_0,\theta_0)^{\mathrm{T}}\to(U(t),V(t),\theta(t))^{\mathrm{T}},$$

其中 $(U(t), V(t), \theta(t))^{\mathrm{T}}$ 是(14)—(16)式的解.

**证明** 类似文献[12]中引理2的证明.

由文献[13]VI引理6.3可得下面引理:

**引理8**[13] 对 $E$ 中的任意规范正交族 $\{(\xi_j, \eta_j, \mu_j)^{\mathrm{T}}\}_{j=1}^{m}$, 有

$$\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2 \leqslant r^{-1} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{-1}, r > 0. \tag{17}$$

现在我们来研究(7)式的第一变分方程

$$\Psi' = [-\Lambda + F'(\varphi)]\Psi, \tag{18}$$

初始条件为

$$\Psi(0) = (U_0, V_0, \theta_0)^{\mathrm{T}} \in E, \tag{19}$$

其中

$$\Psi = (U, V, \theta)^{\mathrm{T}}, \varphi = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}}$$

是(7)式的解,

$$F'(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1'(u, w-\varepsilon u) - \varepsilon f_2'(u, w-\varepsilon u) & f_2'(u, w-\varepsilon u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

$E$ 中范数 $|\cdot|_E$ 等价于 $E$ 中通常范数 $\|\cdot\|_{H_0^1 \times L^2 \times L^2}$, 从引理7可得出(18),(19)式是 $E$ 中的一个 Well-posed 问题. $\forall t > 0$, 由(7)式定义的映射 $S_\varepsilon(t)$ 在 $E$ 上是 Frechet 可微的. 在 $\varphi = (u_0, w_0, \theta_0)^{\mathrm{T}}$ 处的微分是线性算子

$$(U_0, V_0, \theta_0)^{\mathrm{T}} \to (U(t), V(t), \theta(t))^{\mathrm{T}},$$

其中 $(U(t), V(t), \theta(t))^{\mathrm{T}}$ 是(18),(19)式的解.

**引理9** 系统(18)满足条件 $(H_1)$—$(H_6)$. 令 $\Phi$ 表示 $E$ 中 $m$ 个规范正交向量组成的集合 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$. 如果

$$\sup_{\Phi \subset E} \sup_{\varphi \in \mathbf{R}_\varepsilon M} \sum_{j=1}^{m} ((-\Lambda + F'(\varphi))\phi_j, \phi_j)_E \leqslant 0, \tag{21}$$

那么全局吸引子 $M$ 的 Hausdorff 维数小于等于 $m$.

**证明** 类似文献[12]引理7的证明.

**定理3** 如果函数 $f(u,v)$, $g(x)$ 满足条件 $(H_1)$—$(H_6)$, 那么 $E$ 中系统(7)的全局吸引子 $R_\varepsilon M$ 的 Hausdorff 维数 $d_{\mathrm{H}}(R_\varepsilon M)$ 满足

$$d_{\mathrm{H}}(R_\varepsilon M) \leqslant \min\left\{ m \mid m \in N, \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{-1} \leqslant \frac{4rp\sigma}{k_2 + \varepsilon k_3} \right\},$$

$$p = \frac{\alpha\lambda_1 - 2k_3}{2(k_2 + \varepsilon k_3)}.$$

**证明** 取 $m$ 个(18),(19)式的解 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$, 记

$$H = \mathrm{span}\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m\}.$$

令 $Q_m(\tau)$ 表示从 $E$ 到 $H$ 的正交射影, $\tau > 0$ 为给定的时刻, $\phi_j(\tau) = (\xi_j, \eta_j, \mu_j)^{\mathrm{T}} \in E$, $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $Q_m(\tau)E$ 的一族规范正交基,

$$\sum_{j=1}^{m} ((-\Lambda + F'(\varphi))\phi_j, \phi_j)_E$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} (\Lambda\phi_j, \phi_j)_E + \sum_{j=1}^{m} (F'(\varphi)\phi_j, \phi_j)_E, \tag{22}$$

因为 $|\phi_j|_E = 1$, 故 $-(\Lambda\phi_j, \phi_j)_E \leqslant -\sigma - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|\eta_j|^2$, 而

$$\begin{aligned} F'(\varphi)\phi_j = (0, (&f_1'(u, w-\varepsilon u) \\ &- \varepsilon f_2'(u, w-\varepsilon u))\xi_j \\ &+ f_2'(u, w-\varepsilon u)\eta_j, 0)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

由(6)式可得

$$\begin{aligned} &|(F'(\varphi)\phi_j, \phi_j)_E| \\ &= ((f_1'(u, w-\varepsilon u) - \varepsilon f'_2(u, w-\varepsilon u))\xi_j \\ &\quad + f'_2(u, w-\varepsilon u)\eta_j, \eta_j) \\ &\leqslant |f_1'(u, w-\varepsilon u) - \varepsilon f'_2(u, w-\varepsilon u)||\xi_j||\eta_j| \\ &\quad + |f'_2(u, w-\varepsilon u)||\eta_j|^2 \\ &\leqslant (k_2 + \varepsilon k_3)|\xi_j||\eta_j| + k_3|\eta_j|^2 \\ &\leqslant \frac{k_2 + \varepsilon k_3}{4p}|\xi_j|^2 + [p(k_2 + \varepsilon k_3) + k_3]|\eta_j|^2, \end{aligned}$$

因此,由(22)式得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} ((-\Lambda + F'(\varphi))\phi_j, \phi_j)_E \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big[ -\sigma - \frac{\alpha\lambda_1}{2}|\eta_j|^2 + \frac{k_2 + \varepsilon k_3}{4p}|\xi_j|^2 \\ &\qquad + [p(k_2 + \varepsilon k_3) + k_3]|\eta_j|^2 \Big] \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big[ -\sigma + \frac{k_2 + \varepsilon k_3}{4p}|\xi_j|^2 \\ &\qquad + \left(p(k_2 + \varepsilon k_3) + k_3 - \frac{\alpha\lambda_1}{2}\right)|\eta_j|^2 \Big] \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big[ -\sigma + \frac{k_2 + \varepsilon k_3}{4p}\frac{1}{r}\lambda_j^{-1} \\ &\qquad + \left(p(k_2 + \varepsilon k_3) + k_3 - \frac{\alpha\lambda_1}{2}\right)|\eta_j|^2 \Big], \end{aligned}$$

如果

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{-1} \leqslant r\frac{4p\sigma}{k_2+\varepsilon k_3}, \qquad (23)$$

那么就有

$$\sum_{j=1}^{m}((-\Lambda+F'(\varphi))\phi_j,\phi_j)_E \leqslant 0.$$

由引理9 可得

$$d_{\mathrm{H}}(R_\varepsilon M) \leqslant \min\left\{m \mid m\in N,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{-1} \leqslant \frac{4rp\sigma}{k_2+\varepsilon k_3}\right\}.$$

**定理 4** 如果函数 $f(u,v)$, $g(x)$ 满足条件 $(H_1)$—$(H_6)$, 那么 $E$ 中系统(1)—(3)的全局吸引子 $M$ 的 Hausdorff 维数 $d_{\mathrm{H}}(M)$ 满足

$$d_H(M) \leqslant \min\left\{m \mid m\in N,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{-1} \leqslant \frac{4rp\sigma}{k_2+\varepsilon k_3}\right\}.$$

**证明** 系统(7)等价于系统(4),由(4)式定义的半群 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 的全局吸引子为 $M$, 由(7)式定义的半群 $\{S_\varepsilon(t),t\geqslant 0\}$ 的吸引子为 $R_\varepsilon M$, 由(13)式可得, $M$ 与 $R_\varepsilon M$ 具有相同的维数.


[1] Temam R 1988 *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (NewYork: Springer)

[2] Zhang M X, Liu Q P, Wang J Wu K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 10

[3] Chen Y, Fan E G 2007 *Chin. Phys.* **16** 0006

[4] Liu Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7452 (in Chinese) [刘 煜 2009 物理学报 **58** 7452]

[5] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6214 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 6214]

[6] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese) [石玉仁、杨红娟 2010 物理学报 **59** 67]

[7] Wang D X, Zhang J W 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **363** 468

[8] Zhang J W, Rong X L, Wu R H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3693

[9] Zhang J W, Wang D X, Wu R H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2021 (in Chinese) [张建文、王旦霞、吴润衡 2008 物理学报 **57** 2021]

[10] Wang D X, Zhang J W, Wu R H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6741

[11] Zhou S F 1999 *J. Math. Anal. Appl.* **233** 102

[12] Chen S Q, Zhou S F, Li H Y 2008 *Comm. On. Appl. Math. And. Comput.* **22** 14

[13] Wu Y F 2008 *MS Thesis* (South China University of Technology) (in Chinese) [硕士论文(广州:华南理工大学)]

[14] Pazy A 1983 *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* (New York: Springer) p183

[15] Massant P 1983 *J. Differential Equations* **48** 334

[16] Hale J K 1988 *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems* (Providence: Rhode Island) p1


# Global attractor of strongly damped nonlinear thermoelastic coupled rod system*


Zhang Jian-Wen[1)†] Li Jin-Feng[1)] Wu Run-Heng[2)]

1) (*College of Science, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

2) (*College of Science, North China University of Technology, Beijing 100041, China*)


(Received 9 May 2010; revised manuscript received 12 October 2010)


Abstract

In this paper, we prove the existence of the global attractor for strongly damped nonlinear thermoelastic coupled rod equation with the initial boundary value, and make the dimension estimate of the global attractor, according to the operator semigroups theory.



**Keywords**: thermoelastic coupled rod system, strongly damped, nonlinear, global attractor

**PACS**: 02.30.Jr, 04.20.Ex, 02.60.Lj

* Project supported by the Nature Science Foundation of Shanxi Province (Grant No. 2010011008) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772131).


† E-mail: jianwenz@public.ty.sx.cn