物 理 学 报　Acta Phys. Sin.　Vol. 60, No. 7 (2011)　073203

# V 型三能级原子双模光场系统中光场压缩性质*

李　明†　唐　涛　陈鼎汉

(桂林理工大学理学院,桂林　541004)

(2010 年 12 月 12 日收到;2011 年 3 月 10 日收到修改稿)

本文利用格子液体方法对文献中给出的 V 型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体与双模压缩相干态光场相互作用系统的哈密顿量进行分析,发现文献中对原子间相互作用部分的处理有不合理之处,从而对该哈密顿量作出了改进并研究了 V 型三能级原子双模光场系统中光场压缩性质. 结果表明:光场两正交分量交替呈现周期性压缩现象,其压缩深度与光场初始压缩因子密切相关,而压缩时间与双模光场的频率有关.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, V 型三能级原子, 压缩相干态, 双模压缩态光场

**PACS:** 32. 80. QK, 42. 50. - p

## 1. 引　言

玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation, BEC)是由玻色和爱因斯坦预言的一类似于超导和激光的宏观量子现象. 从 1995 年在碱金属原子稀薄气体中实现以来,引起了研究的热潮[1—3]. 随后不久,理论物理学家就预言从超冷的原子 BEC 中可以发射类似于激光的相干原子束. 此后,人们对 BEC 的产生及其独特性质,以及原子 BEC 与光场的相互作用进行了大量的实验和理论研究,取得了一系列成果[4—21].

本文在文献[22]基础上,利用格子液体方法[23]对光场-原子 BEC 系统的总哈密顿量进行了分析和改进,并研究了 V 型三能级原子双模光场系统中光场压缩性质. 结果表明:光场两正交分量交替呈现周期性压缩现象,其压缩深度与光场初始压缩因子密切相关,而压缩时间与双模光场的频率有关.

## 2. 系统哈密顿量的改进和运动方程的求解

在熟知的 Bogoliubov 近似下[24],文献[22]已推导出 V 型三能级原子的 BEC 与双模压缩相干态光场相互作用的系统的总哈密顿量

$$\begin{aligned} H =& \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \omega_{01} b_2^+ b_2 \\ &+ \omega_{02} b_3^+ b_3 + \varepsilon \sqrt{N_0}(a_1 b_2^+ \\ &+ a_1^+ b_2 + a_2 b_3^+ + a_2^+ b_3) + \lambda_1 N_0^2 \\ &+ 2\lambda_{12} N_0 b_2^+ b_2 + 2\lambda_{13} N_0 b_3^+ b_3, \end{aligned} \tag{1}$$

令 $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_1 = \lambda$ ,则(1)式可化为

$$\begin{aligned} H =& \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + (\omega_{01} \\ &+ 2\lambda N_0) b_2^+ b_2 + (\omega_{02} + 2\lambda N_0) b_3^+ b_3 \\ &+ \varepsilon \sqrt{N_0}(a_1 b_2^+ + a_1^+ b_2 \\ &+ a_2 b_3^+ + a_2^+ b_3) + \lambda N_0^2, \end{aligned} \tag{2}$$

式中 $\omega_i$ 为第 $i$ 模( $i = 1,2$ )光场的圆频率, $\omega_{0i}$ 为原子基态与第 $i$ 模( $i = 1,2$ )激发态之间的本征跃迁频率, $a_i^+$ 和 $a_i$ 分别为第 $i$ 模( $i = 1,2$ )光场的产生算符和湮没算符, $b_j^+$ 和 $b_j$ ( $j = 1,2,3$ )分别表示在第 $j$ 个原子态的产生算符和湮没算符, $\varepsilon$ 表示光场与原子相互作用强度, $\lambda$ 表示原子间相互作用强度, $N_0$ 为玻色-爱因斯坦凝聚体的原子数.

利用格子液体方法[23]通过文献[25]分析可知(2)式中 $\lambda$ 对应于 $\frac{u_0}{2N_0}$ , $u_0$ 为常数,于是得到改进后的哈密顿量

$$\begin{aligned} H =& \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + (\omega_{01} \\ &+ u_0) b_2^+ b_2 + (\omega_{02} + u_0) b_3^+ b_3 \end{aligned}$$

* 教育部科学技术研究重点项目基金(批准号:209094)和广西自然科学基金(批准号:2010GXNSFB013050)资助的课题.

† E-mail: liming@glite.edu.cn

　

$$+\varepsilon\sqrt{N_0}(a_1b_2^{+}+a_1^{+}b_2+a_2b_3^{+}+a_2^{+}b_3)+\frac{1}{2}u_0N_0, \tag{3}$$

在共振条件( $\omega_1=\omega_{01}$ , $\omega_2=\omega_{02}$ )下,由上式可以得出海森伯方程的矩阵形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}b_2(t)\\b_3(t)\\a_1(t)\\a_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_1+u_0 & 0 & \varepsilon\sqrt{N_0} & 0\\0 & \omega_2+u_0 & 0 & \varepsilon\sqrt{N_0}\\\varepsilon\sqrt{N_0} & 0 & \omega_1 & 0\\0 & \varepsilon\sqrt{N_0} & 0 & \omega_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_2(t)\\b_3(t)\\a_1(t)\\a_2(t)\end{bmatrix}, \tag{4}$$

利用系数矩阵的对角化技术,可以得到其解如下:

$$\begin{aligned}a_1(t)&=\alpha_{1a}(t)a_1(0)+\beta_{1a}(t)b_2(0),\\a_2(t)&=\alpha_{2a}(t)a_2(0)+\beta_{2a}(t)b_3(0),\\b_2(t)&=\alpha_{1b}(t)a_1(0)+\beta_{1b}(t)b_2(0),\\b_3(t)&=\alpha_{2b}(t)a_2(0)+\beta_{2b}(t)b_3(0),\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\alpha_{1a}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\frac{u_0}{2})t}\left[\cos(\gamma t)+\mathrm{i}\frac{u_0}{2\gamma}\sin(\gamma t)\right], \tag{6}$$

$$\alpha_{2a}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_2+\frac{u_0}{2})t}\left[\cos(\gamma t)-\mathrm{i}\frac{u_0}{2\gamma}\sin(\gamma t)\right], \tag{7}$$

$$\alpha_{1b}(t)=\beta_{1a}(t)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\frac{u_0}{2})t}\frac{\varepsilon\sqrt{N_0}}{\gamma}\sin(\gamma t), \tag{8}$$

$$\alpha_{2b}(t)=\beta_{2a}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_2+\frac{u_0}{2})t}\frac{\varepsilon\sqrt{N_0}}{\gamma}\sin(\gamma t), \tag{9}$$

$$\beta_{1b}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\frac{u_0}{2})t}\left[\cos(\gamma t)-\mathrm{i}\frac{u_0}{2\gamma}\sin(\gamma t)\right], \tag{10}$$

$$\beta_{2b}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_2+\frac{u_0}{2})t}\left[\cos(\gamma t)+\mathrm{i}\frac{u_0}{2\gamma}\sin(\gamma t)\right], \tag{11}$$

$$\gamma=\sqrt{\varepsilon^2N_0+\left(\frac{u_0}{2}\right)^2}.$$

## 3. 光场的压缩效应

为了研究光场的压缩效应,定义光场的两个缓变的正交分量算符[26]

$$U_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1+a_1^{+}+a_2+a_2^{+}), \tag{12}$$

$$U_2=\frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}(a_1-a_1^{+}+a_2-a_2^{+}). \tag{13}$$

$U_1$ , $U_2$ 满足下列对易关系:

$$[U_1,U_2]=\mathrm{i}/2, \tag{14}$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)^2(\Delta U_2)^2\geqslant 1/16. \tag{15}$$

引入

$$Q_i=(\Delta U_i)^2-1/4\quad(i=1,2),$$

可以得到

$$Q_1(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_0^2\sin^2\gamma t}{4\gamma^2}+\cos^2\gamma t\right)\{\sinh^2 r-\sinh r\cosh r\cos[(\omega_1+\omega_2+u_0)t-\phi]\}, \tag{16}$$

$$Q_2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_0^2\sin^2\gamma t}{4\gamma^2}+\cos^2\gamma t\right)\{\sinh^2 r+\sinh r\cosh r\cos[(\omega_1+\omega_2+u_0)t-\phi]\}. \tag{17}$$

由于 $Q_1(t)$ 和 $Q_2(t)$ 的函数关系具有对称性,只对 $Q_1(t)$ 作了数值计算所得结果如图 1 和图 2 所示.

由图 1 和图 2 可知,光场的两正交分量的涨落均随时间周期性地变化. 由图 1 可以看出,当保持双模光场圆频率 $\omega_1$,$\omega_2$ 不变而光场初始压缩因子 $r$ 变化时,光场的最大压缩深度随 $r$ 的增大而增大,而压缩时间不变. 由图 2 可以看出,当保持光场初始压缩因子 $r$ 不变而双模光场圆频率 $\omega_1$,$\omega_2$ 变化时,光场的最大压缩深度不变,约为 −0.15,而压缩时间随 $\omega_1$,$\omega_2$ 的增大而减少,压缩次数增加. 这与文献[14]结果一致.

## 4. 结　　论

本文利用格子液体方法,对文献中给出的 V 型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体与双模压缩相干态光场相互作用系统的哈密顿量进行分析,表明文献中对原子间相互作用部分的处理有不合理之处,从而对该哈密顿量作出了改进并研究了 V 型三能级原子双模光场系统中光场压缩性质. 结果表明:光场两正交分量交替呈现周期性压缩现象,其压缩深度与光场初始压缩因子密切相关且成正比,而压缩时间与双模光场的频率有关且成反比.

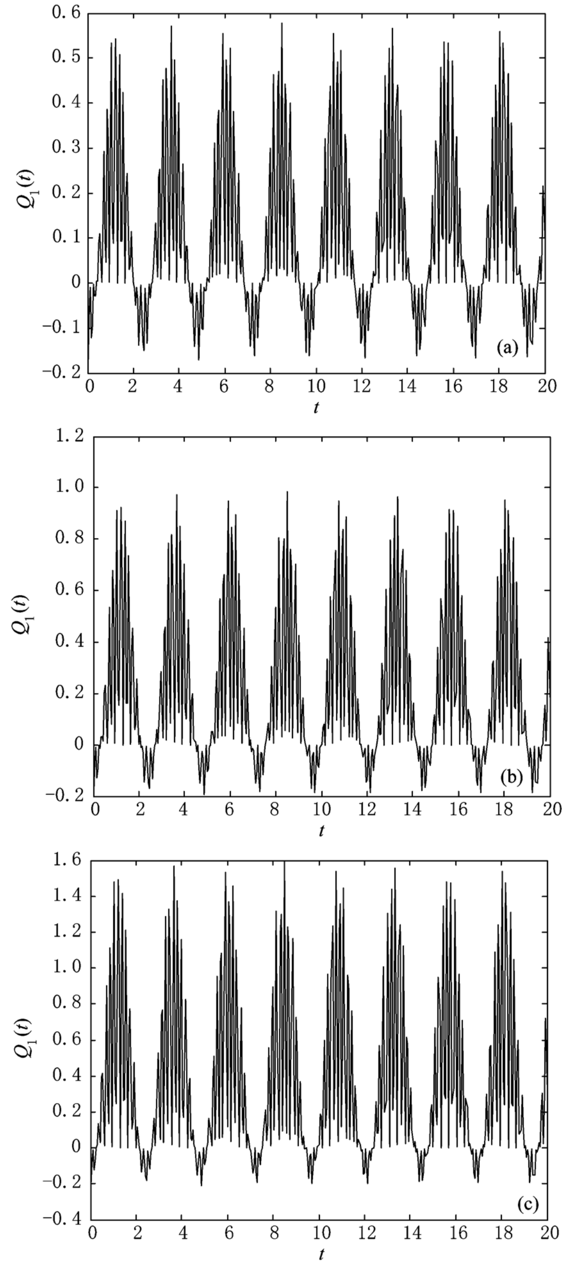


图1　$Q_1(t)$ 的时间演化特性( $N_0 = 2000$ , $\omega_1 = 1$ , $\omega_2 = 1.2$ , $\varepsilon = 1$ , $u_0 = 0.4$ , $\phi = 0$ )　(a) $r = 0.6$; (b) $r = 0.8$; (c) $r = 1$

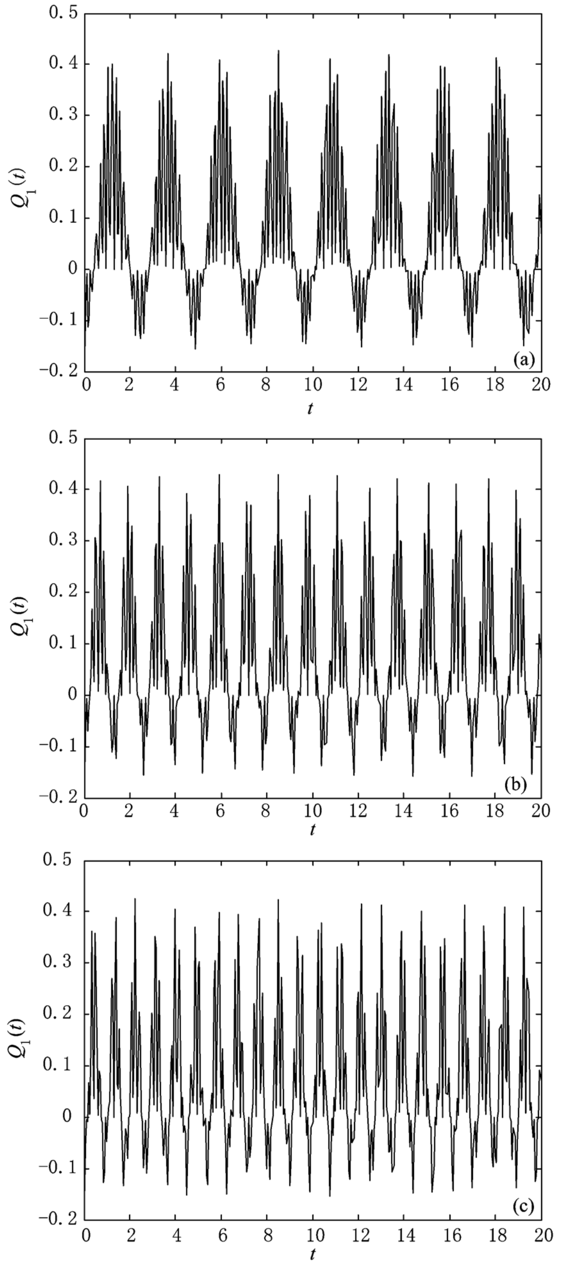


图2　$Q_1(t)$ 的时间演化特性( $N_0 = 2000$ , $r = 0.5$ , $\varepsilon = 1$ , $u_0 = 0.4$ , $\phi = 0$ )　(a) $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.2$; (b) $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2.4$; (c) $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 3.6$


[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E 1995 *Science* **269** 198

[2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[3] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[4] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582

[5] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686

[6] Kuang L M1 998 *Commun. Theor. Phys.* **30** 161

[7] Kuang L M, Ouyang Z W 2000 *Phys. Rev.* A **61** 023604

[8] Zhao Z C, Kuang L M 2000 *ActaSin. Quant. Opt.* **6** 29 (in Chinese) [赵志超、匡乐满 2000 量子光学学报 **6** 29]

[9] You L, Lewenstein M, Cooper J 1995 *Phys. Rev.* A **51** 4712

[10] Sun C P, Zhan H, Miao Y X, LiJ M 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 161
[11] Jing H, Chen J L, Ge M L 2001 *Phys. Rev.* A **63** 15601
[12] Zhou M, Huang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2514 (in Chinese) [周 明、黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514]
[13] Zhou M, Fang J Y, Huang C J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1916 (in Chinese) [周 明、方家元、黄春佳 2003 物理学报 **52** 1916]
[14] Zhou M, Huang C J 2009 *Acta Opt. Sin.* **29** 1096 (in Chinese) [周 明、黄春佳 2009 光学学报 **29** 1096]
[15] Huang C J, Zhou M, Kong F Z, Fang J Y, Mo K W 2005 *Chin. Opt. Lett.* **3** 410
[16] Hao Y J, Zhang Y B, Liang J Q, Chen S 2006 *Phys. Rev.* A **73** 053605
[17] Zhou Y X, Xia Q F, Sun C Y 2008 *J. At. Mol. Phys.* **25** 0633 (in Chinese) [周玉欣、夏庆峰、孙长勇 2008 原子与分子物理学报 **25** 0633]
[18] Zhang J M, Liu W M, Zhou D L 2008 *Phys. Rev.* A **77** 033620
[19] Li Z G, Fei S M, Wang Z D, Liu W M 2009 *Phys. Rev.* A **79** 024303
[20] Li Z G, Fei S M, Albeverio S, Liu W M 2009 *Phys. Rev.* A **80** 034301
[21] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, Liu W M 2010 *Phys. Rev.* A **81** 042312
[22] Li X F, Wang C Z, Jin L J, Nie Y H, Li J F 2008 *J. At. Mol. Phys.* **25** 1340 (in Chinese) [李秀凤、王成志、靳丽娟、聂玉华、厉江帆 2008 原子与分子物理学报 **25** 1340]
[23] Hu Y 1982 *Molecular Thermodynamics on fluids* (Beijing: Higher Education Press) p380 (in Chinese) [胡 英 1982 流体的分子热力学(北京:高等教育出版社)第380页]
[24] Ni G J, Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanicsp* 372 (inChinese) [倪光炯、陈苏卿 2000 高等量子力学(上海:复旦大学出版社) 第372页]
[25] Li M, Sun J X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2702 (inChinese) [李 明、孙久勋 2006 物理学报 **55** 2702]
[26] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京:科学出版社) 第185页]

# Squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with V-type three-level atoms*

Li Ming† Tang Tao Chen Ding-Han
(*Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China*)
(Received 12 December 2010; revised manuscript received 10 March 2011)

Abstract

The Hamiltonian operator of a system of V-type three-level atomic Bose-Einstein condensate interacting with two-mode squeezed coherent light field is analyzed in terms of the lattice-liquid model. It is indicated that the contribution of the interaction between atoms to the Hamiltonian in the literature is unreasonable, so the Hamiltonian operator is improved and the squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with V-type three-level atoms are studied. The results show that two quadrature comonents of light can be squeezed periodically and that maximum depth of squeezing is closely related to the initial squeezing parameter of light and that the duration is determined by the frequency of two-mode field.

**Keywords**: Bose-Einstein condensate, V-type three-level atoms, squeezed coherent state, two-mode squeezed field
**PACS**: 32.80.QK, 42.50.-p

* Project supported by the Foundation for Key Program of Ministry of Education of China (Grant No. 209094) and the Natural Science Foundation of Guangxi Province, China (Grant No. 2010GXNSFB013050).
† E-mail: liming@glite.edu.cn