

# 悬臂梁压电振子宽带低频振动能量俘获的随机共振机理研究\*

陈仲生<sup>†</sup> 杨拥民

(国防科技大学机电工程与自动化学院机电工程研究所,长沙 410073)

(2010年8月6日收到;2010年10月29日收到修改稿)

研究了利用系统非线性来提高悬臂梁压电振子宽带低频振动能量俘获效率的随机共振机理,通过增加一对矩形永磁铁对传统线性悬臂梁压电振子结构进行了改进,结果揭示:在外部非线性磁力作用以及合适的磁铁间距条件下,这种外加磁力悬臂梁压电振子会构成一个双稳系统,在外部宽带低频随机振动源激励下发生随机共振现象,且发生随机共振时的输出电压明显增大,从而可以扩展悬臂梁压电振子的共振频率范围、提高低频振动能量的转化输出.

**关键词:** 压电悬臂梁, 振动能量俘获, 宽带低频, 随机共振

**PACS:** 43.40.Ga, 77.65.-j

## 1. 引言

分布式无线传感网络在生态环境监测、设备状态监控以及战场态势感知等诸多领域具有重要的战略地位.但同时,如何有效地为这些数目巨大的无线微传感器节点提供永久电源是面临的首要棘手问题<sup>[1]</sup>.尽管当前采用燃料电池、纽扣电池等微电池在一定程度上能满足需求,但其固有缺陷也不容忽视,比如使用寿命有限、需要经常更换等,由此可见,电池难以从根本上解决无线微传感器节点的永久供电问题.收集外部机械振动能量并转化为电能的振动能量俘获技术在近几年受到广泛重视,并被国内外众多研究机构拟定为重点研究领域<sup>[2-4]</sup>,其中尤以压电效应转换机理受到关注最多,这是因为压电材料具有较高的力-电耦合效应、能量密度以及易于微小化集成,正成为当前机电能量转换的首选介质.

目前,国内外绝大多数振动能量俘获技术研究集中于悬臂梁压电振子结构,其理论分析基础是线性压电方程,称之为线性压电振子<sup>[2-9]</sup>.已有研究表明,线性压电振子用于振动能量俘获时存在明显的

局限性:共振频率高以及共振频带窄,而且为了产生最大电能,必须使压电振子与振动源产生共振,否则一旦偏离共振,其电能输出会显著减小<sup>[2]</sup>.而这给实际应用带来困难,原因在于:1)环境中振动能量往往分布在一个宽频带内;2)大多数环境振动能量主要集中在低频区域,其范围一般为几十到几百赫兹.这使得线性压电振子用于宽带低频振动时难以处于共振状态,能量俘获效率低.

随机共振(stochastic resonance, SR)是一种特殊的非线性现象<sup>[10,11]</sup>,其内在机理实际上是微弱信号和噪声通过非线性系统的协同作用,一部分噪声的能量被转化到微弱信号身上,从而使微弱信号得到加强.由此可以联想到,随机共振的独特优势与上述振动能量俘获面临的问题之间具有很强的可比拟性.也就是说,假如采用某种机制使其产生随机共振现象,那么就可以明显增强低频小幅机械振动源下的压电振子振动响应,增加电荷输出量,从而大大提高机电能量转换的效率;同时,在非线性的机理下,随机共振压电振子的共振频率范围也会得到拓展.为此,本文对悬臂梁压电振子宽带低频振动能量俘获的随机共振机理进行了深入研究,为解决上述问题提供一种新途径.

\* 国家自然科学基金(50805142)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: czs\_study@sina.com

## 2. 随机共振基本原理

随机共振是非线性科学与统计物理学的重要前沿,它研究的主题是非线性随机问题. 随机共振最早是在 1981 年由 Benzi 提出来的,用于解释古气象学中冰川期与暖气候期周期性交替出现的现象<sup>[12]</sup>. 20 世纪 90 年代, Collins 将随机共振与信息理论结合起来,提出了非周期随机共振理论,使得随机共振的理论和实际应用得到了实质性进展,成为近 20 年来非线性科学研究的热点之一. 随机共振理论可以分为经典随机共振理论和非经典随机共振理论,描述随机共振现象的模型较多,包括双稳态系统模型、FitzHugh-Nagumo 神经模型、混沌系统模型等,其中双稳系统模型物理意义明确,常被用于研究随机共振现象的基础<sup>[13]</sup>,本文也将基于双稳系统开展相关研究.

双稳系统的动力学方程可以用著名的朗之万方程(langevin equation, LE)来描述, LE 方程是建立在研究液体中布朗运动基础上的,假设布朗粒子的质量为  $m$ , 位移为  $x$ , 忽略重力和其他外场作用力,液体对布朗粒子的作用包括阻力  $-\alpha\dot{x}$  和分子杂粒碰撞的噪声力  $F(t)$ , 则布朗粒子的运动方程可以表示为

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + F(t). \quad (1)$$

方程(1)两边除以  $m$ , 得到

$$\ddot{x} = -r\dot{x} + \Gamma(t), \quad (2)$$

其中,  $r = \alpha/m, \Gamma(t) = F(t)/m$ . 方程(2)就称作 LE 方程.

对过阻尼系统而言,方程(2)中的惯性项可以忽略. 考虑外场作用力  $f(x)$ , 则方程(2)转化为

$$r\dot{x} = f(x) + \Gamma(t). \quad (3)$$

当外部信号  $s(t)$  作用于系统时,可以得到一般形式的动力学方程

$$\dot{x} = -V'(x) + s(t) + \Gamma(t), \quad (4)$$

其中  $r$  归一化,  $V(x)$  为某种非线性势函数,且  $f(x) = -V'(x)$ .

不同的非线性势函数  $V(x)$  代表了不同的非线性系统,当  $V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, a > 0, b > 0$  时,方程(4)转化为

$$\dot{x} = ax - bx^3 + s(t) + \Gamma(t). \quad (5)$$

方程(5)就是描述输入信号和噪声共同作用下双稳系统的动力学模型,其重要特征是存在双稳态势阱. 在合适的条件下,双稳系统就能够产生随机共振现象.

## 3. 悬臂梁压电振子的双稳系统模型构建

### 3.1. 传统线性悬臂梁压电振子基本结构

传统的线性悬臂梁压电振子基本结构如图 1 (a) 所示,主要由压电材料(常用压电陶瓷,即 PZT)、电极、弹性基体材料和质量块组成. PZT 由于变形量小且易碎,故常粘贴在弹性基体材料上;质量块  $m$  黏贴在悬臂梁的自由端,用于调节压电振子的共振频率大小.

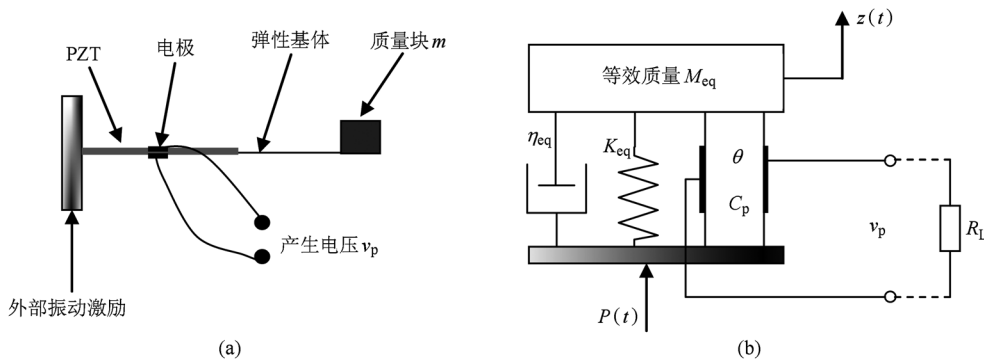


图 1 线性悬臂梁压电振子的基本结构及其等效模型 (a) 基本结构; (b) 等效的集中参数模型

当在外部振动源  $P(t)$  的激励下,悬臂梁压电振子会产生振动,进而使得 PZT 产生变形,根据压

电效应就可以实现将振动转化为电压  $v_p$ . 对线性悬臂梁压电振子来说,它可以等效为一个 { 质量 + 压

电 + 刚度 + 阻尼} 的集中参数模型, 如图 1(b) 所示<sup>[12]</sup>. 记等效质量为  $M_{eq}$ , 等效阻尼为  $\eta_{eq}$ , 等效刚度为  $K_{eq}$ , PZT 的机电耦合系数为  $\theta$ , PZT 等效电容为  $C_p$ , 等效质量的位移为  $z(t)$ , 纯电阻负载为  $R_L$ .

根据牛顿第二定律, 可以得到等效质量块的运动方程为

$$P(t) - \theta v_p = M_{eq} \ddot{z}(t) + \eta_{eq} \dot{z}(t) + K_{eq} z(t). \quad (6)$$

$$P_L = \frac{r\Omega^2}{\left(r\Omega + \frac{\pi}{2}\right)^2 \omega_n M_{eq}} \times \frac{P_0^2 k_e^2}{\sqrt{\left\{ \left(1 - \Omega^2 + \frac{rk_e^2 \Omega}{r\Omega + \pi/2}\right)^2 + \left(2\zeta + \frac{2rk_e^2}{(r\Omega + \pi/2)}\right)^2 \Omega^2 \right\}}}, \quad (8)$$

其中  $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}$ ,  $k_e^2 = \frac{\theta^2}{K_{eq} C_p}$ ,  $\zeta = \frac{\eta_{eq}}{2 \sqrt{K_{eq} M_{eq}}}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ ,  $r = C_p \omega_n R_L$ .

由(8)式可以绘制出获得的电能大小与激励频率之间的关系曲线(其他参数不变), 如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 在  $\Omega = 1$  附近产生的电能最大, 即振动激励与线性压电振子产生了共振, 很显然线性压电振子的共振频带是很窄的, 且一旦偏离共振获得的电能急剧减小. 因此, 对于实际中的宽带、低频振动源来说, 线性悬臂梁压电振子的振动能量俘获效率会受到明显限制, 需要拓展其共振带宽.

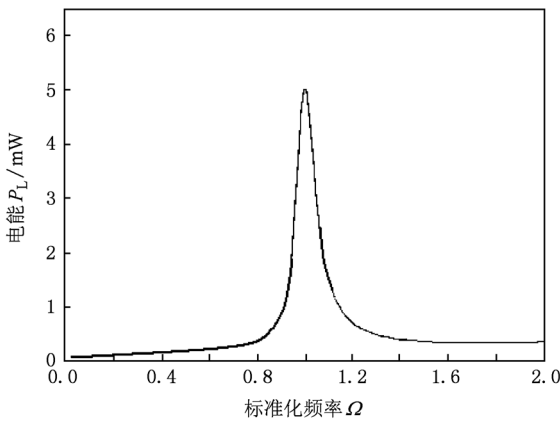


图 2 线性悬臂梁压电振子产生能量大小与振动激励频率之间的关系曲线

### 3.2. 外加磁力悬臂梁压电振子基本结构及其双稳系统模型

为了利用随机共振机理来拓展线性压电振子的共振频宽、增强低频振动激励下的振动响应, 本

根据基尔霍夫第一定律(电流守恒), 可以得到

$$\theta \dot{z}(t) = C_p \dot{v}_p + v_p / R_L. \quad (7)$$

方程(6)和(7)共同描述了线性悬臂梁压电振子的振动能量俘获机理. 假设外部振动激励为  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ , 则由方程(6)和(7)可以得到负载  $R_L$  上获得的电能为<sup>[12]</sup>

文将通过构造出双稳系统来实现随机共振机理. 对图 1(a) 所示的线性悬臂梁压电振子来说, 存在两种可能的双稳系统构造途径: 1) 突破线性假设, (8) 式推导过程的理论基础是线性压电耦合方程, 即电场与应变是线性变化的、压电耦合系数为常数等, 而对振动能量捕获来说, 这些参数往往是非线性的, 从而利用悬臂梁压电振子自身的非线性可以实现双稳系统; 2) 通过外部施加非线性作用力来实现双稳系统. 第 1 种途径通过参数调节可以容易实现随机共振<sup>[14]</sup>, 但对实际应用来说, 这些参数与压电振子的自身属性密切相关, 并不便于实时、连续控制; 而第 2 种途径通过调节外加作用力就可以做到这一点. 为此, 本文提出了外加磁力的悬臂梁压电振子基本结构, 如图 3 所示, 它是在图 1(a) 的基础上, 用矩形永磁铁代替了质量块, 同时通过两个永磁铁之间的排斥力产生非线性外力, 作用在悬臂梁压电振子上.

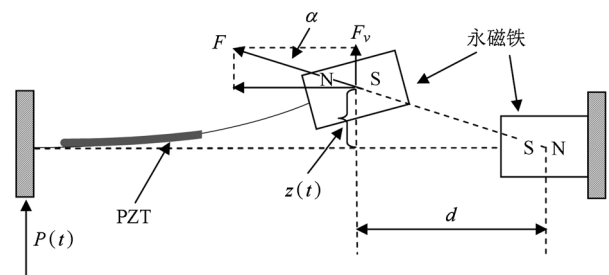


图 3 外加磁力悬臂梁压电振子基本结构及其受力示意图

与 3.1 节类似, 可以建立外加磁力悬臂梁压电振子的等效模型, 得到其运动方程为

$$P(t) - \theta v_p + F_v = M_{eq} \ddot{z}(t) + \eta_{eq} \dot{z}(t) + K_{eq} z(t). \quad (9)$$

可以看出,(9)式是在(6)式的基础上增加了磁铁排斥力的垂直分量  $F_v$ .

3.2.1. 永磁铁排斥力  $F$  计算

假设两个矩形永磁铁的几何尺寸如图4所示,间隔距离为  $\Delta$ ,则两块矩形永磁铁之间的排斥力大小为<sup>[15]</sup>

$$F_g = \frac{1.5}{1 + 3\Delta} \times \frac{1}{2\mu_0} B^2 wh, \quad (10)$$

其中  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  为真空磁导率,  $B$  为磁体表面中心点处的磁场强度,且

$$B = \frac{B_r}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{wh}{2\Delta \sqrt{w^2 + h^2 + 4\Delta^2}} - \tan^{-1} \frac{wh}{2(l + \Delta) \sqrt{w^2 + h^2 + 4(l + \Delta)^2}} \right), \quad (11)$$

其中  $B_r$  是永磁铁的磁性能参数,比如对 N35 的 NdFeB 磁体,  $B_r \approx 1.25 \text{ T}$ .

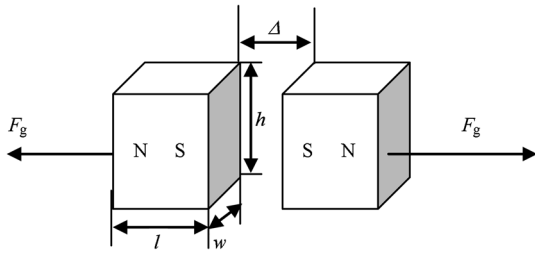


图4 两个永磁铁排斥力计算示意图

于是,可以得到图3中的永磁铁排斥力  $F$  为(假设  $d \gg z(t)$ )

$$F = \frac{1.5}{1 + 3d} \times \frac{wh}{2\mu_0} \left[ \frac{B_r}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{wh}{2d \sqrt{w^2 + h^2 + 4d^2}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \tan^{-1} \frac{wh}{2(l + d) \sqrt{w^2 + h^2 + 4(l + d)^2}} \right) \right]^2, \quad (12)$$

$$F_v = F \sin \alpha = F \times \frac{z(t)}{\sqrt{z^2(t) + d^2}}. \quad (13)$$

3.2.2. 外加磁力悬臂梁压电振子的非线性势函数

对外加磁力悬臂梁压电振子来说,它受到的势能包括:1)磁力  $F$ ;2)重力  $M_{eq}g$ ;3)弹性恢复力  $K_{eq}z(t)$ . 假设  $z(t) = 0$  时的势能等于0,则  $z(t) = z_0$  时的势能为

$$V(z_0) = \int_0^{z_0} K_{eq} z dz + M_{eq} g z - \int_0^{\sqrt{z_0^2 + d^2} - d} F dz. \quad (14)$$

从而得到外加磁力悬臂梁压电振子的非线性势函数为

$$V(z) = \frac{1}{2} K_{eq} z^2 + M_{eq} g z - \frac{1.5}{1 + 3d} \times \frac{wh}{2\mu_0} \left[ \frac{B_r}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{wh}{2d \sqrt{w^2 + h^2 + 4d^2}} - \tan^{-1} \frac{wh}{2(l + d) \sqrt{w^2 + h^2 + 4(l + d)^2}} \right) \right] \times (\sqrt{z^2 + d^2} - d). \quad (15)$$

由(15)式可以绘制非线性势函数如图5所示(分别考虑重力和不考虑重力,其他结构参数见表1),可以看出在合适的永磁铁间距  $d$  下,非线性势函数存在两个明显的稳态势阱,从而验证了通过外加磁力可以构建悬臂梁压电振子双稳系统,为利用随机共振奠定了理论基础.

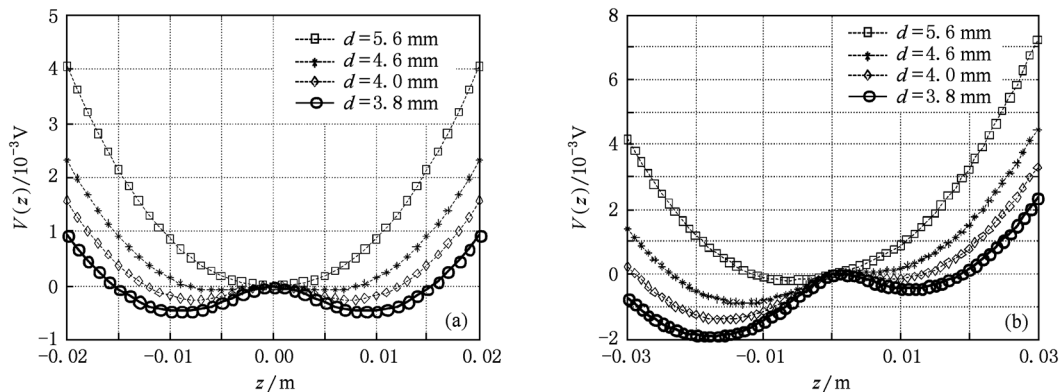


图5 不同间距  $d$  时的非线性势函数双稳势阱图 (a) 不考虑重力 ( $g = 0$ ); (b) 考虑重力 ( $g = 9.8 \text{ N/kg}$ )

#### 4. 外加磁力悬臂梁压电振子振动能量俘获的随机共振行为仿真分析

为了仿真外加磁力悬臂梁压电振子振动能量俘获的随机共振行为,本文选取的外加磁力悬臂梁压电振子结构参数如表 1 所示,  $R_L = 10 \text{ M}\Omega$ , 外加随机振动是一个 1—120 Hz 的低频宽带激励源.

表 1 外加磁力悬臂梁压电振子结构参数

悬臂梁长/mm	悬臂梁宽/mm	PZT 厚度/mm	基体厚度/mm	磁铁长度/mm	磁铁高度/mm	磁铁宽度/mm
64	10	0.3	0.2	4	8	8

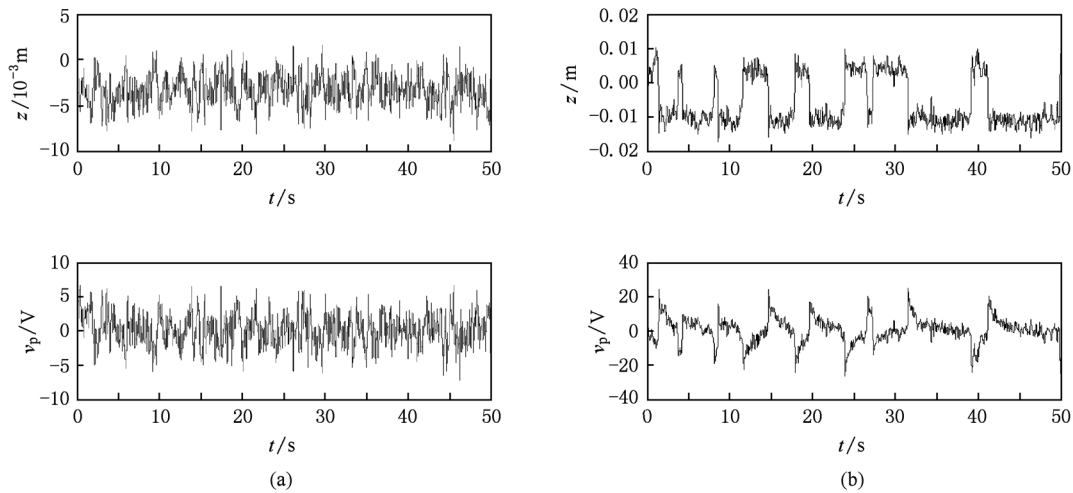


图 6 不同磁铁间距  $d$  时的压电振子位移  $z(t)$  和输出电压  $v_p$  仿真结果 (a)  $d > 5.6 \text{ mm}$ ; (b)  $4.0 \text{ mm} < d < 4.6 \text{ mm}$

由图 6 可以看出,对宽带低频振动源来说,在发生随机共振现象情况下,其输出电压明显要比不发生随机共振时的输出电压大得多,从而验证了利用随机共振机制增强宽带低频振动能量俘获能力的有效性.

进一步分别取  $d = 7 \text{ mm}$  和  $d = 4.2 \text{ mm}$ , 仿真分析计算得到悬臂梁压电振子的幅频特性,如图 7 所示,可以看出: $d = 7 \text{ mm}$  时线性悬臂梁压电振子的有效频带集中在一阶固有频率 80 Hz 附近的窄带内;而  $d = 4.2 \text{ mm}$  时发生随机共振的条件下,悬臂梁压电振子的有效频带范围大约为 0—100 Hz,从而验证了利用随机共振现象可以增强悬臂梁压电振子的振动能量俘获带宽.

#### 5. 实验验证

为了验证前面的理论分析结果,本文根据表 1

根据(7),(9)式,利用 Matlab 仿真得到压电振子的位移  $z(t)$  和输出电压  $v_p$ , 计算结果如下:

1) 当磁铁间距离  $d > 5.6 \text{ mm}$  时,系统为单稳态,无法产生随机共振现象,此时压电振子的位移  $z(t)$  和输出电压  $v_p$  如图 6(a) 所示;2) 当磁铁间距离  $4.0 \text{ mm} < d < 4.6 \text{ mm}$  时,压电振子产生了随机共振现象,此时压电振子的位移  $z(t)$  和输出电压  $v_p$  如图 6(b) 所示.

的参数数据制作了悬臂梁压电振子,压电陶瓷的型号为 PZT-5H,基体材料为铝,PZT 和铝片之间采用导电环氧树脂黏贴,在 PZT 上表面镀银作为输出电极,质量块材料为铸铁,永磁铁型号为 N35(两块磁铁放置方式如图 3 所示,安放在基座上的永磁铁位置是活动的,可以用于调整两块永磁铁之间的间距).整个实验测试系统如图 8 所示,主要由电动激振台、激励信号源、功率放大器、数字示波器、悬臂梁压电振子、游标卡尺等组成.

实验中利用信号源产生一个 120 Hz 范围内的宽带随机振动,经过功率放大器作用在激振台上产生宽带低频振动源,激励悬臂梁压电振子进行振动发电,并利用数字示波器观察和记录其输出电压波形.通过旋转螺丝来调节永磁铁的间距,实验中分别记录了  $d = 7 \text{ mm}$  和  $d = 4.2 \text{ mm}$  时的压电振子输出电压波形,如图 9 所示,记录时间为 1 s.由图 9 可以看出,在相同的振动源激励下, $d = 4.2 \text{ mm}$  时输出

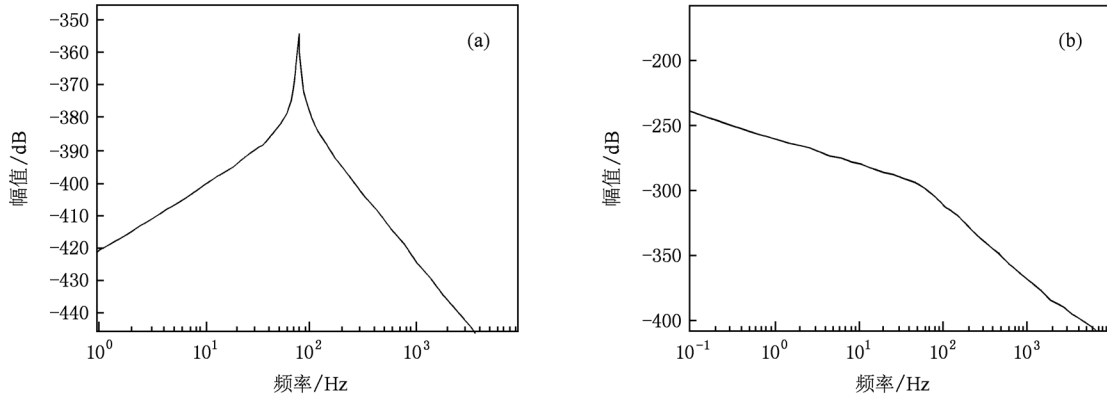


图7 不同间距时悬臂梁压电振子的幅频特性 (a)  $d = 7$  mm; (b)  $d = 4.2$  mm

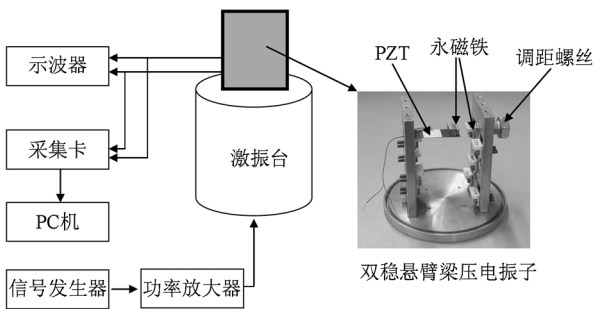


图8 双稳悬臂梁压电振子实验测试系统

峰值电压比  $d = 7$  mm 时的明显要大,且  $d = 4.2$  mm 时输出电压波形类似于图 6(b) 中电压波形,说明此时双稳悬臂梁压电振子在振动过程中产生了随机

共振现象.

进一步计算得到,  $d = 7$  mm 时输出电压的均方根值为 3.1756 V,而  $d = 4.2$  mm 时输出电压的均方根值为 6.3553 V,约为  $d = 7$  mm 时的两倍.根据  $P = V^2/R$ ,实验结果表明发生随机共振时悬臂梁压电振子俘获的功率大小比线性悬臂梁压电振子提高了约 400%,从而验证了理论分析的正确性.

同时也可以看到,实验测试结果与仿真结果存在一定的差异性,这是由于仿真时悬臂梁压电振子等效模型存在误差,且实际产生的振动源特性达不到仿真振动源那样精确,因此实际应用时应该以理论分析得到的永磁铁间距为基准,来调节合适的间距大小使得双稳悬臂梁压电振子产生随机共振,进而提高其振动发电的电压输出.

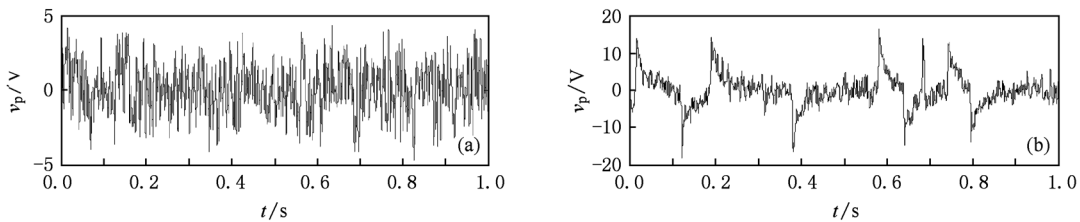


图9 不同间距时的输出电压测试结果 (a)  $d = 7$  mm; (b)  $d = 4.2$  mm

## 6. 结 论

线性悬臂梁压电振子用于振动能量俘获存在共振频带窄、共振频率较高等局限性,而环境中的大量振动源往往具有宽频带、低频率特性,对于此类振动源,线性悬臂梁压电振子俘获效率低下,输出电能小.本文借鉴随机共振基本原理,研究利用

系统非线性来解决宽带低频振动源的高效能量俘获问题,主要研究结论如下:1) 通过在传统线性悬臂梁压电振子基本结构中增加一对永磁铁,在外部非线性磁力作用以及合适的磁铁间距条件下,这种外加磁力悬臂梁压电振子会构成一个双稳系统;2) 双稳悬臂梁压电振子在外部宽频带随机振动源激励下会产生随机共振现象;3) 悬臂梁压电振子发生随机共振时的输出电压比不发生随机共振时的成

倍增大,从而为增强宽带低频振动源下悬臂梁压电  
振子的振动响应、提高振动能量转化输出提供了一  
种新途径。

- [1] Robert B 2009 *Sensor Review* **3** 194
- [2] Roundy S 2005 *J. Intel. Mat. Syst. Str.* **16** 809
- [3] Williams C B, Yates R B 1996 *Sens. Actuators A* **52** 8
- [4] Stephen N G 2006 *J. Sound Vib.* **293** 409
- [5] Roundy S, Wright P K 2004 *Smart Mater. Struct.* **13** 1131
- [6] Erturk A, Inman D J 2008 *J. Intel. Mat. Syst. Str.* **19** 1311
- [7] Dai X Z, Wen Y M, Li P, Yang J, Jiang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2137 (in Chinese) [代显智、文玉梅、李平、杨进、江小芳 2010 物理学报 **59** 2137]
- [8] Minazaraa E, Vasica D, Costaa F, Poulin G 2006 *Ultrasonics* **44** 699
- [9] Wen Z Y, Wen Z Q, He X F, Liao H Y, Liu H T 2008 *Chin. J. Mech. Eng.* **44**(11) 75 (in Chinese) [温志渝、温中泉、贺学锋、廖海洋、刘海涛 2008 机械工程学报 **44**(11) 75]
- [10] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Rev. Lett.* **97A** 5
- [11] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉、刘立、曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [12] Shu Y C, Lien I C 2006 *Smart Mater. Struct.* **3** 1499
- [13] Lin M, Fang L M, Zheng Y J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1725
- [14] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese) [冷永刚、王大勇、郭焱、吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]
- [15] Wang Y 2007 *J. Magn. Mater. Dev.* **38**(5) 49 (in Chinese) [王瑜 2007 磁性材料及器件 **38**(5) 49]

## Stochastic resonance mechanism for wideband and low frequency vibration energy harvesting based on piezoelectric cantilever beams \*

Chen Zhong-Sheng<sup>†</sup> Yang Yong-Min

(Institute of Mechatronic Engineering, College of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 6 August 2010; revised manuscript received 29 October 2010)

### Abstract

A stochastic resonance mechanism of improving wideband and low frequency vibration energy harvesting of piezoelectric cantilever beam (PCB) is studied using the system nonlinearity. By adding a pair of rectangular permanent magnets, the structure of standard piezoelectric cantilever beam is improved. Results reveal that the improved PCB may be a bistable system under a nonlinear magnetic force and an appropriate distance between two magnets. Then a stochastic resonance phenomenon will happen by the input of wideband and low frequency stochastic vibrations. Under the condition of stochastic resonance, the electrical output of the improved PCB increases greatly. So the proposed method will be useful for extending the resonant band and improving the electrical output of a standard PCB.

**Keywords:** piezoelectric cantilever beams, vibration energy harvesting, wideband and low frequency, stochastic resonance

**PACS:** 43.40.Ga, 77.65.-j

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50805142).

<sup>†</sup> E-mail: czs\_study@sina.com