几类新的可积非线性色散项方程及其孤立波解*

殷久利† 樊玉琴 张 娟 田立新

（江苏大学理学院, 镇江 212013）

（2010 年 8 月 9 日收到;2011 年 2 月 14 日收到修改稿）

在不同系统参数下,通过 Painlevé 分析, 获得了广义修正 Dullin-Gottwald-Holm 方程中几类新的可积模型. 利用自动 Backlund 变换,得到了这几类可积模型的孤立波解.

关键词: Painlevé 分析, 广义修正 Dullin-Gottwald-Holm 方程, 可积模型

PACS: 02. 30. Jr, 02. 60. Lj

1. 引 言

2001 年, Dullin, Gottwald 和 Holm[1] 从 Euler 方程出发,利用渐进扩张思想研究了无旋不可压缩的无黏浅层受地球重力和流体自身表面扩张影响的运动规律,得到了一类带线性和非线性色散项的新型浅水波方程, 即 Dullin-Gottwald-Holm (DGH) 方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{1}$$

其中 ω,γ 是常数. DGH 方程被提出以后引起了广泛的关注和重视[2—7],原因有以下两个方面:一是方程(1)是可积系统且具有双 Hamilton 结构;二是方程(1)具有一类奇异的孤立波解即尖峰孤立波,形如 $u(x,t) = c\mathrm{e}^{-|x-ct|}$. 尖峰孤立波在许多模型中相继被发现[8,9]. 更为有趣的是,当 $\gamma = 0$ 时,DGH 方程转变为另一类重要的可积方程,即 Camassa-Holm 方程[10—14].

为了研究非线性项强度对方程的可积性以及孤立波解形式的影响,我们研究了一类广义 DGH 方程[14]

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^m u_x + \gamma u_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{2}$$

其中 a 是常数, m 是正整数(表示非线性强度). 研究表明,当 $m = 2$ 时方程(2)是可积的. 此时即为修正的 DGH 方程,形如

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{3}$$

在非线性强度增强后,修正 DGH 方程(3)还具有两类新型奇异孤立波解,即带尖点和带爆破点的双孤立波解[15].

为了寻找更多的可积方程以及研究非线性项系数对可积方程的影响,本文引入一类广义的修正 DGH 方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2 u_x + \gamma u_{xxx} = bu_x u_{xx} + cuu_{xxx}, \tag{4}$$

其中 b,c 是常数. 当 $b = 2, c = 1$ 时,方程(4)就转变为可积的修正 DGH 方程(3). 本文的研究目的是讨论 b,c 为何值时方程(4)是可积的,并且寻找这些新的可积方程的孤立波解.

2. 几类新的 Painlevé 可积方程

可积方程具有许多美妙的性质,因此判定非线性方程的可积性是非线性科学中一项非常重要的内容. 如果一个模型是可积的,需要说明是哪种意义下的可积,比如 Painlevé 可积指的是模型具有 Painlevé 性质,而 Lax 可积指的是模型具有 Lax 对. 本文是利用标准 Weiss-Tabor-Carnevale-Kruskal (WTC-Kruskal)方法[16] 对方程(4)进行 Painlevé 可积性分析.

* 国家自然科学基金(批准号:11026169)、中国博士后科学基金(批准号:20090451172)和江苏省博士后科学基金(批准号:0801028C)资助的课题.

† E-mail: yjlujs@ yahoo. com. cn

假设 u 展开为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+\alpha}. \tag{5}$$

利用领头项分析得到 $\alpha = -2$,

$$u_0 = \frac{6(b+2c)}{a}\phi_x^2, \tag{6}$$

并且可以得到 u_j 的递推关系

$$(j+1)(j-6)\left(j-\frac{2(b+2c)}{c}\right)u_j = F_j(\phi_x,\phi_t,\cdots,u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}). \tag{7}$$

此时共振点为 $-1,6,n$, 其中 $n = \frac{2(b+2c)}{c}$. 注意到共振点为整数,故 $n \in Z$. 根据 Painlevé 分析,如果在共振点处等式(7)能够成立,那么方程(4)就称为 Painlevé 可积方程. 通过分析,我们得到了三类方程通过 Painlevé 检验.

当 $n = 3$ 时,有 $b = -\frac{1}{2}c$, 此时方程为

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2u_x + \gamma u_{xxx} = -\frac{c}{2}u_xu_{xx} + cuu_{xxx}. \tag{8}$$

相应共振点为 $-1,3,6$, u_j 的递推关系为

$$(j+1)(j-3)(j-6)u_j = F_j(\phi_x,\phi_t,\cdots,u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}), \tag{9}$$

其中 F_j 是系数 $u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}$ 和 ϕ 各阶导数的函数,由于函数表达式很长,这里就不再列出. 由(9)式可知,共振点为 $j=-1,3,6$. 根据 WTC-Kruskal 方法要求在共振点处等式(9)成立. 在 $j = -1$ 处,对应于任意的奇性流形 $\phi(x,t) = 0$, 在 $j = 3,6$ 处,则要求 $F_3 = 0, F_6 = 0$. 为了简化计算,令

$$\phi = x + \psi(t), \tag{10}$$

其中 $\psi(t)$ 是 t 的任意函数. 将(5),(6),(10)式代入(8)式,通过令 $\psi(t)$ 的不同幂次项系数为零得到

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{c}{a},\\
u_1 &= 0,\\
u_2 &= -\frac{2(\gamma+\psi_t)}{c},\\
u_4 &= \frac{-c^2\psi_t + 4a\psi_t^2 + 8a\gamma\psi_t + 4a\gamma^2 + 2\omega c^2}{5c^3},\\
u_5 &= -\frac{a(\psi_t+\gamma)u_3}{3c^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

将(11)式代入(9)式的等号右边,得到 $F_3 = 0, F_6 = 0$,则 u_3, u_6 为任意函数.

当 $n = 5$ 时,有 $b = \frac{c}{2}$, 此时方程为

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2u_x + \gamma u_{xxx} = -cu_xu_{xx} + cuu_{xxx}.$$

相应共振点为 $-1,5,6$, u_j 的递推关系为

$$(j+1)(j-5)(j-6)u_j = F_j(\phi_x,\phi_t,\cdots,u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}).$$

用类似的分析方法可以得到

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{15c}{a},\\
u_1 &= 0,\\
u_2 &= -\frac{2(\gamma+\psi_t)}{3c},\\
u_3 &= 0,\\
u_4 &= \frac{1}{45c^3}(-9c^2\psi_t + 4a\psi_t^2 + 8a\gamma\psi_t + 4a\gamma^2 + 18\omega c^2),
\end{aligned}$$

u_5 和 u_6 为任意函数.

当 $n = 8$ 时,有 $b = 2c$, 此时方程为

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2u_x + \gamma u_{xxx} = 2cu_xu_{xx} + cuu_{xxx}.$$

相应的共振点为 $-1,6,8$, u_j 的递推关系为

$$(j+1)(j-6)(j-8)u_j = F_j(\phi_x,\phi_t,\cdots,u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}).$$

用类似的分析方法可以得到

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{24c}{a},\\
u_1 &= u_3 = u_5 = 0,\\
u_2 &= -\frac{1}{3c}\psi_t - \frac{1}{3c}\gamma,\\
u_4 &= \frac{1}{180c^3}(9c^2\psi_t - 18c^2w - a\psi_t^2 - 2a\gamma\psi_t - a\gamma^2),\\
u_7 &= \frac{a\psi_{tt}}{17280c^5}(2a\psi_t + 2a\gamma - 39c^2),
\end{aligned}$$

u_6 和 u_8 为任意函数.

应当注意,通过尺度变换 $u' = \sqrt{\frac{1}{c}}u$ 和 $t' = \sqrt{c}t$, 当 $n=8$ 时方程转化为方程(3)本身,因此这不是一个新的可积方程.

3. 自动 Backlund 变换及孤立波解

下面利用 Painlevé 可积性分析结果研究广义修正 DGH 方程的自动 Backlund 变换问题.

情形 1 考虑方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2 u_x + \gamma u_{xxx} = -\frac{c}{2}u_x u_{xx} + cuu_{xxx}. \tag{12}$$

根据 Painlevé 截尾展开法并结合由以上得到的一个结果 ($\alpha = -2$), 假设方程解为

$$u = u_0\phi^{-2} + u_1\phi^{-1} + u_2. \tag{13}$$

利用 Maple 软件,将 (13)式代入方程(12). 令 ϕ^{-6}, ϕ^{-7} 及 ϕ^0 的系数为零,发现 u_2 恰好是方程(12)的解,且有

$$u_0 = \frac{9c\phi_x^2}{a}, \quad u_1 = -\frac{9c\phi_{x,x}}{a}. \tag{14}$$

再令 ϕ^{-1},ϕ^{-2},ϕ^{-3},ϕ^{-4} 以及 ϕ^{-5} 的系数为零,得到 ϕ 满足下列公式(只列出其中一部分):

$$\begin{aligned}&-18acu_{2,x,t}u_{2,x}\phi_{x,x} - 9c\phi_{x,x} + 9c^2\phi_{x,x}u_{2,x,x,x}\\&-18cw\phi_{x,x,x} - 9acu_{2,x,t}^2\phi_{x,x,x} - 9c^2u_{2,x,x}\phi_{x,x,x}\\&-9c^2u_{2,x}\phi_{x,x,x,x} + 9c\phi_{x,x,x,x,t} - 9c\gamma\phi_{x,x,x,x,x}\\&+9c^2u_{2,x,t}\phi_{x,x,x,x,x} = 0,\\&\cdots\end{aligned} \tag{15}$$

将(14)式代入(13)式,得到方程(12)的自动 Backlund 变换

$$u = \frac{9c\phi_x^2}{a\phi^2} - \frac{9c\phi_{x,x}}{a\phi} + u_2, \tag{16}$$

其中 ϕ 满足(15)式, u_2 是方程(12)的一个解. 利用该变换可以求出孤立波解,假设 $u_2 = v$ (v 为常数) 是方程(12)的一个特解,将其代入(15)式得到

$$\begin{aligned}&-9c\phi_{x,x,t} - 9acv^2\phi_{x,x,x} - 18cw\phi_{x,x,x} + 9c\phi_{x,x,x,x,t}\\&-9c\gamma\phi_{x,x,x,x,x} + 9c^2v\phi_{x,x,x,x,x} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

假设关于 ϕ 的方程(17)中具有如下形式的解:

$$\phi = c_0 + c_1 e^{k(x-\lambda t)}, \tag{18}$$

其中 $c_0 \neq 0, c_1 \neq 0, k, \lambda$ 是待定常数. 通过计算发现,当 k,λ 满足条件

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2av}{c} - \frac{1}{2\sqrt{3}c}\Delta}, \quad \lambda = \frac{1}{8}\left(\frac{3c^2}{4a} - 4av^2 + 16w - \frac{\sqrt{3}c}{2a}\Delta + \frac{1}{4a}\Delta^2\right) \tag{19}$$

或

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2av}{c} + \frac{1}{2\sqrt{3}c}\Delta}, \quad \lambda = \frac{1}{8}\left(\frac{3c^2}{4a} - 4av^2 + 16w + \frac{\sqrt{3}c}{2a}\Delta + \frac{1}{4a}\Delta^2\right) \tag{20}$$

时,(18)式是方程(17)的解. 这里

$$\Delta = \sqrt{3c^2 - 32a\lambda + 8acv + 16a^2v^2 - 64aw}. \tag{21}$$

利用(16),(18)—(21)式,可以得到广义修正 DGH 方程(12)的孤立波解

$$u = -\frac{9cc_0c_1k^2e^{k(x-\lambda t)}}{a(c_0 + c_1e^{k(x-\lambda t)})^2} + v.$$

情形 2 考虑方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2u_x + \gamma u_{xxx} = -cu_xu_{xx} + cuu_{xxx}. \tag{22}$$

类似情形 1 中的方法可以得到方程(22)的自动 Backlund 变换

$$u = \frac{6c\phi_x^2}{a\phi^2} - \frac{6c\phi_{x,x}}{a\phi} + u_2,$$

其中 u_2 是方程(22)的一个解, ϕ 满足

$$\begin{aligned}&-12acu_{2,x,t}u_{2,x}\phi_{x,x} - 6c\phi_{x,x,t} + 6c^2\phi_{x,x}u_{2,x,x,x}\\&-12cw\phi_{x,x,x} - 6acu_{2,x,t}^2\phi_{x,x,x} - 6c^2u_{2,x,x}\phi_{x,x,x}\\&-6c^2u_{2,x}\phi_{x,x,x,} + 6c\phi_{x,x,x,x,t} - 6c\gamma\phi_{x,x,x,x,x}\\&+6c^2u_{2,x,t}\phi_{x,x,x,x,x} = 0,\\&\cdots\end{aligned}$$

假设 $u_2 = v$, 可以得到广义修正 DGH 方程(22)的孤立波解

$$u = -\frac{6cc_0c_1k^2e^{k(x-\lambda t)}}{a(c_0 + c_1e^{k(x-\lambda t)})^2} + v,$$

其中

$$k = \pm\sqrt{\frac{\gamma + av^2 + 2w}{cv}}, \quad \lambda = -\gamma.$$

情形 3 考虑方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^2u_x + \gamma u_{xxx} = 2cu_xu_{xx} + cuu_{xxx}. \tag{23}$$

类似上述方法可以得到方程(23)的自动 Backlund 变换

$$u = \frac{24c\phi_x^2}{a\phi^2} - \frac{24c\phi_{x,x}}{a\phi} + u_2,$$

其中 u_2 是方程(23)的一个解, ϕ 满足

$$\begin{aligned}&-48acu_{2,x,t}u_{2,x}\phi_{x,x} - 24c\phi_{x,x,t} + 24c^2\phi_{x,x}u_{2,x,x,x}\\&-48cw\phi_{x,x,x} - 24acu_{2,x,t}^2\phi_{x,x,x,} + 48c^2u_{2,x,x}\phi_{x,x,x}\\&+48c^2u_{2,x}\phi_{x,x,x,x} + 24c\phi_{x,x,x,x,t} - 24c\gamma\phi_{x,x,x,x,x}\\&+24c^2u_{2,x,t}\phi_{x,x,x,x,x} = 0,\\&\cdots\end{aligned}$$

假设 $u_2 = v$, 可以得到广义修正 DGH 方程(23)的孤立波解

$$u = -\frac{24cc_0c_1k^2\mathrm{e}^{k(x-\lambda t)}}{a(c_0 + c_1\mathrm{e}^{k(x-\lambda t)})^2} + v,$$

其中

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{av}{3c} - \frac{1}{6c}\Delta},$$

$$\lambda = \frac{3c^2}{2a} + \frac{av^2}{3} + 2w - \frac{c}{a}\Delta + \frac{1}{6a}\Delta^2$$

或

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{av}{3c} + \frac{1}{6c}\Delta},$$

$$\lambda = \frac{3c^2}{2a} + \frac{av^2}{3} + 2w + \frac{c}{a}\Delta + \frac{1}{6a}\Delta^2.$$

这里

$$\Delta = \sqrt{9c^2 - 6a\gamma - 6acv - 2a^2v^2 - 12aw}.$$

4. 结 论

修正 DGH 方程是 Painlevé 可积的,非线性项系数一般化以后,通过 Painlevé 分析获得了几类新的可积方程. 利用 Painlevé 截断展开法获得了这几类可积方程的自动 Backlund 变换,借助这些变换得到了一些显式的孤立波解. 今后我们将继续研究这几类可积方程一些其他的重要性质.

[1] Dullin H R, Gottwald G, Holm D D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 1945

[2] Hakkaev S 2006 *Phys. Rev.* A **354** 137

[3] Yin J L, Tian L X 2010 *J. Math. Phys.* **51** 023505

[4] Liu Y 2006 *Math. Ann.* **335** 717

[5] Christov O, Hakkaev S 2009 *Physica* D **238** 9

[6] Tian L X, Gui G L, Liu Y 2005 *Commun. Math. Phys.* **257** 667

[7] Yin J L,Tian L X 2010 *Chaos Solitons Fract.* **42** 643

[8] Dai C Q 2007 *Chin. Phys.* B **16** 1201

[9] Ma Z Y 2007 *Chin. Phys.* B **16** 1848

[10] Camassa R, Holm D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661

[11] Ma H C, Lou S Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 1495

[12] Liu Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7452 (in Chinese) [刘 煜 2009 物理学报 **58** 7452]

[13] Yin J L, Tian L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2821 (in Chinese) [殷久利、田立新 2004 物理学报 **53** 2821]

[14] Liu C S 2007 *Chin. Phys.* B **16** 1832

[15] Yin J L, Tian L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3632 (in Chinese) [殷久利、田立新 2009 物理学报 **58** 3632]

[16] Yan Z Y 2003 *Physica* A **326** 344

Some new integrable nonlinear dispersive equations and their solitary wave solutions*

Yin Jiu-Li† Fan Yu-Qin Zhang Juan Tian Li-Xin

(*Faculty of Science*, *Jiangsu University*, *Zhenjiang* 212013, *China*)

(Received 9 August 2010; revised manuscript received 14 February 2011)

Abstract

Under different system parameters, some new integrable models of the generalized modified Dullin-Gottwald-Holm are obtained by Painlevé analysis. Using the auto-Backlund transformation, solitary wave solutions of these integrable models are obtained.

Keywords: Painlevé analysis, generalized modified Dullin-Gottwald-Holm equation, integrable model

PACS: 02.30.Jr, 02.60.Lj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11026169), the Science Foundation for Postdoctor of China (Grant No. 20090451172) and the Science Foundation for Postdoctor of Jiangsu Province, China (Grant No. 0801028C).

† E-mail: yjlujs@yahoo.com.cn