Boussinesq 方程组的广义变分原理*

曹小群† 宋君强 张卫民 朱小谦 赵 军
(国防科学技术大学计算机学院,长沙 410073)
(2010 年 10 月 18 日收到;2010 年 11 月 19 日收到修改稿)

半反推法是何吉欢为了寻求物理问题的变分原理而提出的,可避免由拉氏乘子法引起的临界变分现象. 应用半反推法分别获得了描述水波运动的两类 Boussinesq 方程组的一族广义变分原理,并验证了它们的正确性.

关键词: 半反推法, 广义变分原理, Boussinesq 方程组
PACS: 04.20.Fy, 47.11.-j

1. 引 言

近年来,变分原理在物理和数学等众多领域中得到了广泛研究和应用[1—20]. 与其他近似方法比较,变分方法具有许多优点. 变分方法能够直观地提供待求问题解的基本特征(包括初边值条件),其所获得的解是所有可能的试探函数中最好的. 为此,许多研究者在研究变分问题的逆问题,即利用问题的场方程来反推变分问题的泛函. 随着高性能电子计算机的广泛应用及基于变分的有限元方法和无网格方法的兴起,建立各个学科领域的变分原理和广义变分原理便成为非常重要的研究内容. 在广义变分原理的研究中,拉氏乘子法是一种有效且被普遍采用的方法,但是在使用中经常出现临界变分现象[13]. 何吉欢[12—18]提出和发展了一种半反推方法(semi-inverse method),可以直接从场方程出发建立问题的变分原理. 何氏半反推法可以成功地消除约束条件,构造多变量的广义变分原理,而且避免了运用拉氏乘子法时可能出现的临界变分现象,已经在许多领域得到了非常成功的应用[12—20].

Boussinesq 方程组是一类非常重要的数学物理模型,能够有效描述规则波和不规则波在复杂地形上发生浅化、折射、绕射和反射的效应. 最初的 Boussinesq 理论考虑了自由面曲率对浅水长波流的影响. 经过多年的发展,该理论已被推广用于深水短波的研究. 许多学者应用 Boussinesq 方程组或其改进形式研究了浅水中的长波、短波以及波流相互作用,目前该方程已成为模拟近岸区波浪运动的强有力工具. 鉴于 Boussinesq 方程组在物理学研究中占有重要位置,获得其变分原理无论是理论上还是在实际中都是一件非常有意义的工作. 本文采用何氏半反推法[12—18],对描述水波运动的两类 Boussinesq 方程组进行了变分分析,分别获得它们的一族广义变分原理,并对变分原理的正确性进行了验证. 研究过程表明,与传统的拉氏乘子法相比,何氏半反推方法[12—18]在构造流体力学问题的广义变分原理时十分有效、简洁和方便.

2. Boussinesq 方程组的广义变分原理

对浅水波而言,其 x 方向的速度 u 和自由面的高度 h 通常满足下列形式的 Boussinesq 方程组:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + gh_x + Hh_{ttx}/3 = 0, \\ h_t + uh_x + hu_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

方程组(1)中的 g 为重力加速度, H 为水深. 方程组(1)可以改写为下列等价形式:

$$\begin{aligned} u_t + (u^2/2 + gh + Hh_{tt}/3)_x = 0, \\ h_t + (hu)_x = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

引入一个特殊函数 Φ, 定义如下:

$$\begin{aligned} \Phi_x = h, \\ \Phi_t = -hu. \end{aligned} \tag{3}$$

类似地, 可以引入另外一个特殊函数 Π, 定义如下:

* 国家自然科学基金(批准号: 61070041, 40775064)资助的课题.
† E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

$$\Pi_x = u,\quad \Pi_t = -(u^2/2 + gh + Hh_{tt}/3). \tag{4}$$

如果采用方程组(3),则方程组(2)的第二式自动满足. 此处的目标是建立一个广义变分公式,它的 Euler-Lagrange 方程满足方程组(2)的第一式及方程组(3). 为了达到此目的,这里将使用何吉欢[12—18]提出的半反推方法来构造 Boussinesq 方程组(2)的广义变分公式

$$J(u,h,\Phi) = \iint L_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{5}$$

(5)式中的 L_1 是试拉格朗日函数,定义为

$$L_1 = u\Phi_t + (u^2/2 + gh)\Phi_x + Hh\Phi_{ttx}/3 + F_1. \tag{6}$$

方程(6)中的 F_1 是一个关于 u 和 h 及它们导数的待定函数. 一般存在各种选择来构造试拉格朗日函数,有关例子可以在文献[12—20]中找到. 方程(6)所表示的试拉格朗日函数具有一个优点,即通过其关于 Φ 的驻值条件

$$\frac{\partial L_1}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \Phi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \Phi_t}\right) - \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \Phi_{ttx}}\right) = 0, \tag{7}$$

可以自动导出方程组(2)中的第一式. 现在分别考虑 L_1 关于 u 和 h 的驻值条件,有

$$\frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_t}\right) + \frac{\delta F_1}{\delta u} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial h_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial h_t}\right) + \frac{\delta F_1}{\delta h} = 0. \tag{9}$$

方程(8)和(9)中的 $\frac{\delta F_1}{\delta u}$ 和 $\frac{\delta F_1}{\delta h}$ 分别称为 F_1 关于 u 和 h 的何氏变分导数[12—18],定义如下:

$$\frac{\delta F_1}{\delta u} = \frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F_1}{\partial u_{xx}} + \cdots,$$

$$\frac{\delta F_1}{\delta h} = \frac{\partial F_1}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial h_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial h_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F_1}{\partial h_{xx}} + \cdots.$$

由方程(8)有

$$\Phi_t + u\Phi_x + \frac{\delta F_1}{\delta u} = 0. \tag{10}$$

构造待定函数 F_1 的目的是使方程(8)和(9)等价于方程组(3)中的场方程. 因此,将方程组(3)代入方程(10)有

$$\frac{\delta F_1}{\delta u} = 0,$$

说明 $F = F(h)$ 只是 h 及其导数的函数,与 u 无关. 由方程(9)有

$$g\Phi_x + H\Phi_{ttx}/3 + \frac{\delta F_1}{\delta h} = 0. \tag{11}$$

将方程组(3)中的第一式代入方程(11)有

$$\frac{\delta F_1}{\delta h} = -gh - Hh_{tt}/3,$$

从而得到

$$F_1 = -gh^2/2 + Hh_t^2/6. \tag{12}$$

将方程(12)代入方程(6),然后将方程(6)代入方程(5),则得到 Boussinesq 方程组(1)的广义变分原理公式

$$J(u,h,\Phi) = \iint [u\Phi_t + (gh + u^2/2)\Phi_x + Hh\Phi_{ttx}/3 - (gh^2 - Hh_t^2/3)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{13}$$

下面验证获得的方程(13)所表示的 Boussinesq 方程组广义变分原理的正确性. 通过分别求泛函表达式(13)关于 Φ,u 和 h 的一阶变分,并取驻值条件,则可以得到

$$\begin{gathered} -u_t - \left(\frac{u^2}{2} + gh\right)_x - \frac{H}{3}h_{ttx} = 0, \\ \Phi_t + u\Phi_x = 0, \\ g(\Phi_x - h) + \frac{H}{3}(\Phi_x - h)_{tt} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

方程组(14)又称为泛函方程(13)的 Euler-Lagrange 方程组. 显然方程组(14)的第一式与方程组(2)的第一式是等价的. 另外,由方程组(14)的第三式有 $\Phi_x = h$,将其代入 $\Phi_t + u\Phi_x = 0$,得到 $\Phi_t = -hu$,说明方程组(14)的第二式和第三式与方程组(3)是等价的. 从而验证了由广义变分原理公式(13)所得到的 Euler-Lagrange 方程组(14)分别与方程组(3)表示的场方程和方程组(2)的第一式是等价的,即证明了获得的 Boussinesq 方程组(1)的广义变分原理公式(13)是正确的.

如果引入的是方程(4)中所表示的特殊函数 Π,类似地可以得到 Boussinesq 方程组(1)的另外一个广义变分原理公式

$$J(u,h,\Pi) = \iint [h\Pi_t + hu\Pi_x + (gh^2 - hu^2)/2 - Hh_t^2/6]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{15}$$

如果分别求泛函方程(15)关于 Π,u 和 h 的一阶变分,并取驻值条件,则可以得到

$$\begin{gathered} -h_t - (hu)_x = 0, \\ h\Pi_x - hu = 0, \\ \Pi_t + u\Pi_x + gh - u^2/2 + Hh_{tt}/3 = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

显然,方程组(16)的第一式与方程组(2)的第二式

是等价的. 另外,由方程组(16)的第二式得到 $\Pi_x = u$, 并将其代入方程组(16)的第三式得到 $\Pi_t = -(gh + u^2/2 + Hh_{tt}/3)$. 从而验证了由广义变分原理公式(15)所得到的 Euler-Lagrange 方程组(16)分别与方程组(4)表示的场方程和方程组(2)的第二式是等价的.

综上所述,利用何氏半反推法[12—18]得到了 Boussinesq 方程组(1)的两个广义变分原理,并通过从泛函方程导出的 Euler-Lagrange 方程与原方程的之间的一致性,证明了获得的两个广义变分原理的正确性.

3. 变形 Boussinesq 方程组的广义变分原理

考虑另外一个水波模型方程组

$$\begin{aligned} u_t + h_x + uu_x &= 0, \\ h_t + (hu)_x + u_{xxx} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

方程组(17)中的 u 和 h 分别表示水波在 x 方向的速度和绝对高度. 在许多有关研究中,方程组(17)被称作变形 Boussinesq 方程组. 方程组(17)可以进一步改写为下列等价形式:

$$\begin{aligned} u_t + (h + u^2/2)_x &= 0, \\ h_t + (hu + u_{xx})_x &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

引入一个特殊函数 Φ, 定义如下:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= u, \\ \Phi_t &= -(h + u^2/2). \end{aligned} \tag{19}$$

类似地,也可以引入另外一个特殊函数 Π, 定义如下:

$$\begin{aligned} \Pi_x &= h, \\ \Pi_t &= -(hu + u_{xx}). \end{aligned} \tag{20}$$

如果采用方程组(19),则方程组(18)的第一式自动满足,此处的目标是建立一个广义变分公式,它的 Euler-Lagrange 方程分别满足变形 Boussinesq 方程组(18)的第二式及方程组(19). 为了避免拉格朗日乘子法引起的临界变分现象,将使用何氏半反推方法[12—18]来构造下列形式的广义变分公式:

$$J(u,h,\Phi) = \iint L_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{21}$$

方程(21)中的 L_2 是试拉格朗日函数,定义为

$$L_2 = h\Phi_t + hu\Phi_x + u\Phi_{xxx} + F_2(h,u). \tag{22}$$

方程(22)中的 F_2 是一个与 Φ 无关,只与 u 和 h 及它们的导数有关的待定函数. 一般存在各种选择来构造试拉格朗日函数,有关例子可以在文献[12—20]中找到. 方程(22)表示的试拉格朗日函数具有一个明显的优点,即通过其关于 Φ 的驻值条件

$$\frac{\partial L_2}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \Phi_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \Phi_x}\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \Phi_{xxx}}\right) = 0, \tag{23}$$

可以自然导出方程组(18)的第二式. 现在分别考虑 L_2 关于 h 和 u 的驻值条件,有

$$\Phi_t + u\Phi_x + \frac{\delta F_2}{\delta h} = 0, \tag{24}$$

$$h\Phi_x + \Phi_{xxx} + \frac{\delta F_2}{\delta u} = 0. \tag{25}$$

方程(24)和(25)中的 $\frac{\delta F_2}{\delta h}$ 和 $\frac{\delta F_2}{\delta u}$ 分别称为 F_2 关于 h 和 u 的何氏变分导数,它们的定义与上述 $\frac{\delta F_1}{\delta h}$ 和 $\frac{\delta F_1}{\delta u}$ 的定义相似. 我们构造待定函数 F_2 的目的是使方程(24)和(25)转化为方程组(19)中的两个场方程. 因此,将方程组(19)分别代入方程(24)和(25)得到

$$\frac{\delta F_2}{\delta h} = h - \frac{u^2}{2}, \tag{26}$$

$$\frac{\delta F_2}{\delta u} = -hu - u_{xx}. \tag{27}$$

因为

$$\delta F_2 = \frac{\delta F_2}{\delta h}\delta h + \frac{\delta F_2}{\delta u}\delta u,$$

所以从方程(26)和(27)可以构造出下列形式的待定函数 F_2:

$$F_2 = (h^2 - hu^2 + u_x^2)/2. \tag{28}$$

将方程(28)代入方程(22),然后将方程(22)代入方程(21),则得到变形 Boussinesq 方程组(17)的广义变分原理公式

$$\begin{aligned} J(u,h,\Phi) = \iint [& h\Phi_t + hu\Phi_x + u\Phi_{xxx} \\ & + (h^2 - hu^2 + u_x^2)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{29}$$

下面验证获得的方程(29)所表示的变形 Boussinesq 方程组广义变分原理的正确性. 分别求泛函方程(29)关于 Φ, u 和 h 的一阶变分,并取驻值条件,则得到

$$\begin{aligned} -h_t - (hu)_x - u_{xxx} &= 0, \\ h(\Phi_x - u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_x - u) &= 0, \\ \Phi_t + u\Phi_x + h - u^2/2 &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

方程组(30)又称为泛函方程(29)的 Euler-Lagrange

方程组. 显然,方程组(30)的第一式与方程组(17)的第二式是等价的. 另外,由方程组(30)的第二式得到 $\Phi_x = u$, 并将其代入方程组(30)的第三式得到 $\Phi_t = -\left(h + \frac{u^2}{2}\right)$, 从而说明了方程组(30)分别与方程组(19)和方程组(17)的第二式是等价的.

类似地,如果引入的是(20)式中的特殊函数 Π, 则得到变形 Boussinesq 方程组的另一个广义变分原理公式

$$J(u,h,\Pi) = \iint [u\Pi_t + (h + u^2/2)\Pi_x - (h^2 + u_x^2)/2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{31}$$

分别求泛函方程(31)关于 Π, u 和 h 的一阶变分,并取驻值条件,则得到

$$\begin{aligned} -u_t - (h + u^2/2)_x &= 0, \\ \Pi_t + u\Pi_x + u_{xx} &= 0, \\ \Pi_x - h &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

显然,方程组(32)的第一式与方程组(17)的第一式是等价的. 另外,由方程组(32)的第三式得到 $\Pi_x = h$, 将其代入方程组(32)中第二式得到 $\Pi_t = -(hu + u_{xx})$. 从而验证所得到的 Euler-Lagrange 方程组与方程组(20)和(17)的第一式是等价的.

综上所述,利用何氏半反推法[12—18]得到了一类变形 Boussinesq 方程组的两个广义变分原理,并通过从泛函方程导出的 Euler-Lagrange 方程与原来方程之间的一致性,证明了所获得的两个广义变分原理的正确性.

4. 结　论

半反推法是何吉欢为了寻求数学物理问题的变分原理而提出的,可避免由拉氏乘子法引起的临界变分现象,在众多领域已经有许多成功的应用. 本文应用半反推法分别获得了描述浅水波流体运动的 Boussinesq 方程组和变形 Boussinesq 方程组的一族广义变分原理,并验证了它们的正确性. 利用获得的广义变分公式可以在基于变分的有限元方法和其他变分方法中直接应用,因此具有重要意义.

[1] Cai Q F, Huang S X, Gao S T, Zhong K, Li Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3912 (in Chinese) [蔡其发、黄思训、高守亭、钟　科、李自强 2008 物理学报 **57** 3912]

[2] Wang Y G, Cai Q F, Huang S X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4359 (in Chinese) [王业桂、蔡其发、黄思训 2010 物理学报 **59** 4359]

[3] Huang S X, Cai Q F, Xiang J, Zhang M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3022 (in Chinese) [黄思训、蔡其发、项　杰、张　铭 2007 物理学报 **56** 3022]

[4] Cao X Q, Huang S X, Du H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3912 (in Chinese) [曹小群、黄思训、杜华栋 2008 物理学报 **57** 3912]

[5] Zhang L, Huang S X, Liu Y D, Zhong J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2889 (in Chinese) [张　亮、黄思训、刘宇迪、钟　剑 2010 物理学报 **59** 2889]

[6] Huang S X, Zhao X F, Sheng Z 2009 *Chin. Phys.* B **18** 5084

[7] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* B **14** 1063

[8] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* B **15** 249

[9] Li G C, Mei F X 2006 *Chin. Phys.* B **15** 2496

[10] Fu J L, Dai G D, Jimenez S, Tang Y F 2007 *Chin. Phys.* B **16** 570

[11] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 385

[12] He J H 2008 *Int. J. Mod. Phys.* B **22** 3487

[13] He J H 1997 *Int. J. Turbo. Jet-Eng.* **14** 23

[14] He J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 797

[15] He J H 2001 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **2** 309

[16] He J H 2005 *Phys. Lett.* A **335** 182

[17] He J H 2007 *Phys. Lett.* A **371** 39

[18] He J H, Lee E W M 2009 *Phys. Lett.* A **373** 1644

[19] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1369

[20] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1523

Generalized variational principles for Boussinesq equation systems*

Cao Xiao-Qun†　Song Jun-Qiang　Zhang Wei-Min　Zhu Xiao-Qian　Zhao Jun

(*School of Computer Science*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

(Received 18 October 2010; revised manuscript received 19 November 2010)

Abstract

The semi-inverse method is proposed by He to establish the generalized variational principles for physical problems, which can eliminate variational crisis brought by the Lagrange multiplier method. Via the He's semi-inverse method, a family of variational principles is constructed for the Boussinesq equation systems and variant Boussinesq equation systems of fluid dynamics. The obtained variational principles have also proved to be correct.

Keywords: semi-inverse method, generalized variational principles, Boussinesq equation systems

PACS: 04.20.Fy, 47.11.-j

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61070041, 40775064).

† E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn