砖墙模型不能给出黑洞熵*

杨学军1)† 赵 峥2)

1)(绍兴文理学院物理与电子信息系,绍兴 312000)

2)(北京师范大学物理系,北京 100875)

(2010 年 9 月 29 日收到;2011 年 1 月 12 日收到修改稿)

砖墙模型被广泛用于静态或稳态黑洞熵的计算,但为了避免发散,砖墙模型需要引入一紫外截断因子. 截断因子的引入至今没有给以合理的解释. 有工作表明,用砖墙模型或薄膜模型计算黑洞熵时,若采用广义不确定关系则可以去掉截断因子. 证明了将广义不确定关系用于砖墙模型计算 Schwarzschild 黑洞熵时,由于砖墙模型给出熵的第一项既是 Bekenstein-Hawking 项又含有截断因子,因此在去掉截断因子的同时也丢掉了 Bekenstein-Hawking 项,将得不到黑洞熵.

关键词: 黑洞熵, 砖墙模型, 截断因子, 广义不确定关系

PACS: 04.70.Dy, 04.62.+v

1. 引 言

Hooft 提出的砖墙模型[1]给出了黑洞熵一种可能的统计解释. 该模型研究了黑洞外量子场的统计特性,计算了这些量子场在砖墙条件下的统计熵,当两堵砖墙之间的距离足够大时 (即考虑黑洞外全部量子场),其中必有一项正比于黑洞视界面积,比例系数由紫外截断因子决定,选取合适的截断因子可使比例系数为 1/4,该项正好就是黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵. 砖墙模型以及在其基础上发展得到的薄膜模型已被广泛应用于静态、稳态甚至动态黑洞熵的计算[1—9]. 为避免发散,砖墙模型需要引入一紫外截断因子. 截断因子的引入至今没有给以合理的解释. 李翔[10]的工作表明,用砖墙模型或薄膜模型计算黑洞熵时若采用广义不确定关系则可以去掉截断. 砖墙模型计算得出的 Schwarzschild 黑洞熵为

$$S = \frac{M}{180\varepsilon} + \frac{1}{90}\ln\frac{L-2M}{\varepsilon} + \frac{8\pi^3}{135}\beta^{-3}(L-2M)^3 . \tag{1}$$

这里 M 为黑洞质量,其正比于 Schwarzschild 黑洞的视界面面积; ε 为紫外截断因子; L 为红外截断因子; $\beta^{-1} = \kappa/(2\pi) = 1/(8\pi M) = 1/(4\pi r_0)$,其中 κ 为黑洞表面重力, r_0 为 Schwarzschild 黑洞视界面的径向坐标. (1) 式的第一项取合适截断因子 ε 后即成为 Bekenstein-Hawking 项. 我们认为,将广义不确定关系用于砖墙模型,在去掉截断的同时也丢掉了 Bekenstein-Hawking 项,而得不到黑洞熵.

2. 广义不确定关系

由于量子引力理论和微扰弦理论的缘故,人们提出了广义不确定关系. 微扰量子引力理论的主要问题之一是将引力场作为一种给定背景下的物质场引入量子场论时在有源情况下会存在不可重正化的困难. 长期以来,人们相信引力效应会导致一个最小可观测长度的存在,这个最小长度的尺度为 Planck 长度的量级,而且认为如果真是这样,引力不可重正化的问题会迎刃而解. 非微扰量子引力理论也得出空间能被量子化为 Planck 网格的结论[11]. 弦理论与此类似[12—15],认为不能探测到比弦尺度 $l_S \equiv \sqrt{\lambda}$ 更小的空间距离, l_S 也为 Planck 长度的量级. 因此,人们普遍认可最小空间长度的存在,而且认为这个最小空间长度应该用量子理论描述为空间位置的最小不确定量,从而提出了正则变量的广义对易关系

* 国家自然科学基金(批准号:10873003, 11045005)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090739)资助的课题.

† E-mail: yang_xue_jun@163.com

$$[\hat{x},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\left(1 + \frac{\lambda}{\hbar^2}\hat{p}^2\right). \tag{2}$$

由(2)式能得到广义不确定关系

$$\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{\lambda}{\hbar}\Delta p. \tag{3}$$

由(3)式可得

$$\Delta x \geqslant 2\sqrt{\lambda}, \tag{4}$$

即存在最小空间不确定量,也就是最小空间长度 $2\sqrt{\lambda}$.

广义不确定关系受到人们的普遍重视并得到一系列令人满意的结果[16,17],特别需要提到的是广义不确定关系对量子场态密度计算[17]和黑洞熵计算[10]的影响.

当用半经典方法描述量子态时,若采用通常的不确定关系 $\Delta x\Delta p \geqslant 2\pi\hbar$, 则在粒子相空间中的体元 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$ 内的量子态数为

$$\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{5}$$

若用广义不确定关系(3)式,文献[17]给出如下的量子态数:

$$\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3}. \tag{6}$$

这里

$$p^2 \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

当用于弯曲时空时, $p^2 \equiv p_ip^i = g^{i\mu}p_ip_\mu$,其中 $g^{i\mu}$ 为度规的逆变分量, $i = 1,2,3, \mu = 0,1,2,3$.

3. 砖墙模型的失效

我们知道,尽管砖墙模型已被广泛用于静态和稳态黑洞熵的计算,但却不能用来计算动态黑洞的熵. 作者认为,采用广义不确定关系以后,砖墙模型不仅不能用于计算动态黑洞的熵,而且对稳态甚至静态黑洞熵也无能为力. 下面以最简单的 Schwarzschild 黑洞为例来印证作者的这一观点.

砖墙模型的基本思想如下:计算黑洞外两堵砖墙之间 $[r_0+\varepsilon, L]$ 量子场的熵, 当两堵砖墙之间的距离足够大(L 足够大)时(即考虑黑洞外全部量子场),其中必有一项正比于黑洞的视界面面积,比例系数由紫外截断因子决定,选取合适的截断因子可使比例系数为 1/4, 该项正好就是黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵,此项即(1)式的第一项. 将广义不确定关系用于砖墙模型后,计算出静态球对称黑洞外两堵砖墙之间 $[r_0+\varepsilon, L]$ 的无质量 Klein-Gordon 场的熵为[10]

$$S(r_0,L) = \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0}^{L}\frac{\mathrm{d}r}{f^2} \times\int_0^\infty \frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)\left(1+\frac{\lambda x^2}{\beta^2 f}\right)^3}. \tag{7}$$

对于 Schwarzschild 黑洞,

$$\begin{aligned} f(r) &= 1-\frac{r_0}{r}, \\ \beta &= 4\pi r_0, \\ r_0 &= 2M. \end{aligned} \tag{8}$$

由 $1-\mathrm{e}^{-x} > \frac{x}{1+x}$ 和 $\mathrm{e}^x-1 > x$ 可知,

$$\begin{aligned} 0 < S(r_0,L) &< \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0}^{L}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty\frac{(x^3+x^2)\mathrm{d}x}{(1+ax^2)^3} \\ &= \frac{\beta}{18\pi\lambda^2}(L^3-r_0^3) + \frac{\lambda^{-3/2}}{24}\Big[\frac{1}{3}L^{5/2}(L-r_0)^{1/2} \\ &\quad + \frac{5r_0}{12}L^{3/2}(L-r_0)^{1/2} + \frac{5r_0^2}{8}\sqrt{L(L-r_0)} \\ &\quad + \frac{5r_0^3}{8}\ln\frac{\sqrt{L}+\sqrt{L-r_0}}{\sqrt{r_0}}\Big] \\ &\equiv F(r_0,L), \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$a = a(r_0,r) = \frac{\lambda}{\beta^2 f} = \frac{\lambda}{16\pi^2r_0^2(1-r_0/r)}.$$

由(9)式可以得到命题 1.

命题 1　对一定的 L 和 r_0, (7)式的积分是不发散的.

在 $[r_0, L]$ 内 $f(r) < 1$, 由(7)式容易看出,当 $L\to\infty$ 时, $S(r_0,L)\to\infty$. 由求极限的罗必塔法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{L\to\infty}S(r_0,L)/L^3 &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^3}\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0}^{L}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)(1+\lambda x^2/(\beta^2 f))^3} \\ &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{3L^2}\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\frac{L^2}{f^2(L)}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)(1+\lambda x^2/(\beta^2 f))^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{9\pi}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)(1+\lambda x^2/\beta^2)^3} \equiv g(r_0), \end{aligned} \tag{10}$$

其中用到 $\lim\limits_{L\to\infty} f(L)=1$. 由(9)式有

$$\lim_{L\to\infty}\frac{S(r_0,L)}{L^3}<\lim_{L\to\infty}\frac{F(r_0,L)}{L^3}=\frac{\beta}{18\pi\lambda^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{24}\lambda^{-2/3}. \qquad (11)$$

(11)式表明,积分 $g(r_0)$ 是不发散的且为 r_0 的函数,于是可得到命题2.

命题2　对一定的 r_0, 当 $L\to\infty$ 时, $S(r_0,L)/L^3$ 不发散,即积分 $g(r_0)$ 不发散.

(7)式可以改写成

$$S(r_0,L)=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0}\left[\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0+\delta}^{L}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\times\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}-1)(1+ax^2)^3}\right]. \qquad (12)$$

由于 $(1-\mathrm{e}^{-x})^{-1}(e^{x}-1)^{-1}$ 和 $x^4(1+ax^2)^{-3}$ 在区间 (ε,∞) 内均为有界连续函数,(12)式可由积分中值定理写成

$$S(r_0,L)=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0}\left[\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\times\int_{r_0+\delta}^{L}\frac{r^2}{f^2}\frac{\mathrm{d}r}{(1-\mathrm{e}^{-\xi(r_0,r,\varepsilon)})(\mathrm{e}^{\xi(r_0,r,\varepsilon)}-1)}\times\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+ax^2)^3}\right]. \qquad (13)$$

因(12),(13)式中 $\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}-1)(1+ax^2)^3}$ 和 $\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+ax^2)^3}$ 在区间 $(r_0+\delta,L)$ 内均是 r 的有界连续函数,导致 $(1-\mathrm{e}^{-\xi(r_0,r,\varepsilon)})^{-1}(\mathrm{e}^{\xi(r_0,r,\varepsilon)}-1)^{-1}$ 在区间 $(r_0+\delta,L)$ 内是 r 的有界连续函数. 因此,可以再次应用积分中值定理得到

$$\begin{aligned}S(r_0,L)&=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0}\left[(1-\mathrm{e}^{-\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)})^{-1}(\mathrm{e}^{\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)}-1)^{-1}\right]\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0}^{L}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^{\infty}\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+ax^2)^3}\\&=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0}\left[\frac{\beta^2}{8\lambda^{5/2}}(1-\mathrm{e}^{-\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)})^{-1}(\mathrm{e}^{\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)}-1)^{-1}\right]\\&\quad\times\left[\frac{1}{3}L^{3/2}(L-r_0)^{3/2}+\frac{r_0}{4}\left(L-\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{L(L-r_0)}-\frac{r_0^3}{8}\ln\frac{\sqrt{L}+\sqrt{L-r_0}}{\sqrt{r_0}}\right],\end{aligned} \qquad (14)$$

其中 $\xi(r_0,r,\varepsilon)\in[\varepsilon,+\infty)$, $\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)\in[\varepsilon,+\infty)$, $\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon)\in[r_0+\delta,L]$. 令

$$h(r_0,L)\equiv\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0}\left[\frac{\beta^2}{8\lambda^{5/2}}(1-\mathrm{e}^{-\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)})^{-1}(\mathrm{e}^{\xi(r_0,\bar{r}(L,r_0,\delta,\varepsilon),\varepsilon)}-1)^{-1}\right],$$

则

$$S(r_0,L)=h(r_0,L)\left[\frac{1}{3}L^{3/2}(L-r_0)^{3/2}+\frac{r_0}{4}\left(L-\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{L(L-r_0)}-\frac{r_0^3}{8}\ln\frac{\sqrt{L}+\sqrt{L-r_0}}{\sqrt{r_0}}\right]. \qquad (15)$$

将(15)式方括号内各项在其收敛域内按 $\frac{r_0}{L}$ $(L\gg r_0)$ 展开,可得到

$$\begin{aligned}S(r_0,L)=h(r_0,L)\Bigg\{&\frac{1}{3}L^3-\frac{1}{2}r_0L^2+\frac{1}{8}r_0^2L+\frac{1}{48}r_0^3+\cdots+\frac{r_0}{4}L^2-\frac{1}{4}r_0^2L+\frac{1}{16}r_0^3+\cdots\\&-\frac{1}{8}(\ln2)r_0^3+\frac{1}{16}r_0^3\left[\left(\frac{r_0}{L}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{L}-1\right)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{L}-1\right)^n+\cdots\right]\\&+\frac{1}{8}r_0^3\left[\frac{r_0}{4L}+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{4L}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{4L}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{4L}\right)^n+\cdots\right]\Bigg\}\\=h(r_0,L)&(P_3+P_2+P_1+P_0+P_{-1}+\cdots),\end{aligned} \qquad (16)$$

其中

$$P_3=\frac{1}{3}L^3,$$

$$P_2=-\frac{1}{2}r_0L^2+\frac{1}{4}r_0L^2=-\frac{1}{4}r_0L^2,$$

$$P_1=\frac{1}{8}r_0^2L-\frac{1}{4}r_0^2L=-\frac{1}{8}r_0^2L,$$

$$P_0=\left[\frac{1}{48}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}(\ln2)+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]r_0^3$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\ln 2\right) r_0^3,$$

$$P_{-1} = \cdots,$$

$$\cdots \tag{17}$$

分别为 L 的三次方项、二次方项、一次方项、零次方项、负一次方项…. 由(16)和(10)式可得

$$\lim_{L\to\infty} \frac{S(r_0,L)}{L^3} = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{1}{3}h(r_0,L)\right] = g(r_0). \tag{18}$$

由(18)式和命题 2 可得命题 3.

命题 3 对一定的 r_0, 当 $L\to\infty$ 时, $h(r_0,L)$ 不发散.

(10)式表明 $g(r_0)\neq 0$. 由此和(18)式即可得命题 4.

命题 4 当 $L\to\infty$ 时, $h(r_0,L)$ 不趋于零.

由命题 3 和命题 4 得到命题 5.

命题 5 当 L 足够大时, $h(r_0,L)$ 的主导项为 $3g(r_0)$.

(16)式和命题 5 给出,当 L 足够大时, S 的主导项为 $3g(r_0)(P_3+P_2+P_1+P_0)$. 因此,当 L 足够大时,Schwarzschild 黑洞外两堵砖墙之间 $[r_0+\varepsilon, L]$ 的 Klein-Gordon 场的熵,即黑洞外全部 Klein-Gordon 场的熵为

$$S(r_0,L) \approx 3g(r_0)(P_3+P_2+P_1+P_0). \tag{19}$$

该熵与 L 零次幂同阶的项是 $3g(r_0)P_0$,当 L 足够大时,此项是唯一可能与黑洞视界面面积成正比的项,即与 r_0^2 成正比的项. 由(17)式容易得到命题 6.

命题 6 只有 $g(r_0)$ 与 r_0^{-1} 成正比, $3g(r_0)P_0$ 才能正比于 r_0^2.

由 $\beta=4\pi r_0$ 和 (10), (11)式可得命题 7.

命题 7 当 $r_0\to 0$ 时, $g(r_0)$ 不发散.

命题 7 也意味着命题 8.

命题 8 $3g(r_0)$ 不正比于 r_0^{-1}.

4. 结 论

由命题 6 和命题 8 可知,黑洞外全部 Klein-Gordon 场的熵(19)或(16)式中不含正比于黑洞视界面面积的项,即没有 Bekenstein-Hawking 项. 本文研究表明,当采用广义不确定关系时,对最简单的静态黑洞——Schwarzschild 黑洞,砖墙模型也会失效. 砖墙模型和广义不确定关系在大量文献中均有所讨论,如果广义不确定关系得到普遍认同,那么是否意味着砖墙模型的失效呢?

[1] Hooft G't 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[2] Ho J, Kim W T, Park Y J, Shin H 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 2617

[3] Jing J L 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1441

[4] Li G Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1346 (in Chinese) [李固强 2003 物理学报 **52** 1346]

[5] Mi L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2065 (in Chinese) [米丽琴 2004 物理学报 **53** 2065]

[6] Zhao R, Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 593 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 593]

[7] Su J Q, Li C A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 530 (in Chinese) [苏九清、李传安 2005 物理学报 **54** 530]

[8] Liu C Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]

[9] Zhang J H, Zhang Q S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5500 (in Chinese) [张建华、张青松 2005 物理学报 **54** 5500]

[10] Li X 2002 *Phys. Lett.* B **540** 9

[11] Ashtekar A, Rovelli C, Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237

[12] Gross D J, Mende P F 1988 *Nucl. Phys.* B **303** 407

[13] Amati D, Ciafaloni M, Veneziano G 1987 *Phys. Lett.* B **197** 81

[14] Maggiore M 1994 *Phys. Rev.* D **49** 5182

[15] Witten E 1997 *Phys. Today* **49** 24

[16] Kempf A, Mangano G, Mann R B 1995 *Phys. Rev.* D **52** 1180

[17] Chang L N, Minic D, Okaruma N, Takeuchi T 2002 *Phys. Rev.* D **65** 125028

The brick-wall model unapplicable to the calculating of black hole entropy*

Yang Xue-Jun[1)†] Zhao Zheng[2)]

1) (*Department of Physics and Electronic Information, Shaoxing University of Arts and Sciences, Shaoxing 312000, China*)

2) (*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

(Received 29 September 2010; revised manuscript received 12 January 2011)

Abstract

The brick-wall model is widely used to calculate the entropies of static or stationary black holes. An ultraviolet cutoff factor needs to be introduced to remove the divergence of the result in brick-wall model. The cutoff factor has not been explained reasonably up to now. A study indicated that when the brick-wall model or thin film model was used to calculate the black hole entropy, the ultraviolet cutoff factor could be discarded if the generalized uncertainty relation was adopted. In this paper, it is proved that since the first term of Schwarzschild black hole entropy formula in the brick-wall model is not only the Bekenstein-Hawking term but also the term containing the ultraviolet cutoff factor, when the cutoff factor is removed, the Bekenstein-Hawking term is lost and the black hole entropy cannot be obtained by using the generalized uncertainty relation in brick-wall model.

Keywords: black hole entropy, brick-wall model, cutoff factor, generalized uncertainty relation

PACS: 04.70.Dy, 04.62.+v

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10873003, 11045005) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090739).

† E-mail: yang_xue_jun@163.com