

双稳系统的随机能量共振和作功效率*

林 敏[†] 张美丽 黄咏梅

(中国计量学院计量测试工程学院, 杭州 310018)

(2010年9月26日收到; 2010年11月18日收到修改稿)

分析了处于双稳系统中的布朗粒子与外界的周期性外力和热随机力的功、热交互作用, 建立了基于 Langevin 方程的随机能量平衡方程. 围绕着受周期力、随机力和阻尼力共同作用的 Langevin 方程, 采用动力学和非平衡热力学相结合的方法, 从以“力”为立足点转到以“能量”为研究核心, 深入分析了布朗粒子沿单一轨线运动时系统与环境之间的能量交换和作功效率, 揭示了双稳系统的随机能量共振现象.

关键词: 双稳系统, 随机能量共振, 作功效率

PACS: 05.70.-a, 05.45.-a, 05.40.-a

1. 引言

随机共振^[1-4]涉及双稳系统、外界周期性作用力和热随机力三个基本要素, 它的动力学特性常用 Langevin 方程来描述. 近 30 年来, 人们针对产生随机共振的各个要素, 对各种不同的随机共振现象进行了广泛而深入的研究^[5-19]. 传统的随机共振常用信噪比、功率谱放大率和驻留时间分布等量加以刻画. 文献[20, 21]采用随机能量法分析了 Langevin 方程所描述的非平衡过程的能量转换关系, 提出了用外部驱动力所做的功作为双稳系统随机共振的一种度量. 随后, 文献[22-24]对受驱动布朗粒子进行了热力学关系研究, 提出了体系的熵以及熵产生都可以基于一条随机轨线来进行定义. 近年来, 小系统非平衡态热力学引起了实验和理论上的极大关注^[25].

处于双稳系统中的布朗粒子在外界的周期力和随机力作用下, 系统与外界的相互作用存在着作功和热交换. 热是无序的微观粒子运动能量, 而功是规则有序的运动能量. 随机力对系统的作用可看作传热的过程, 系统与外界交换的是不规则运动的能量, 不作功时系统从外界吸收热量的直接后果是系统不规则运动增强, 而作功使布朗粒子以有序的方式位移, 外界对系统作功的直接后果是使布朗粒

子有组织地作定向运动. 在外界的持续作用下, 双稳系统远离平衡态, 不断地耗散能量而在两稳态之间变迁, 系统与外界之间交换着热和功.

能量是所有运动形式的共同度量, 引入能量有助于对不同运动形态之间的转换以及同一运动形态在不同物体之间的传递进行定量研究. 本文从受到周期力、随机力和阻尼力共同作用的 Langevin 方程出发, 采用动力学和非平衡热力学相结合的方法, 从以“力”为立足点转到以“能量”为研究核心, 分析了系统的微观行为与宏观演变过程之间的有机联系, 深入分析了布朗粒子沿单一轨线运动时系统与环境之间的能量交换和作功效率, 揭示了双稳系统的随机能量共振现象.

2. Langevin 方程与能量守恒性

2.1. 带惯性项的 Langevin 方程

质量为 m 的布朗粒子处于双势阱中, 受到周期性外力、热随机力和阻尼力的共同作用, 它的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = -V'(x) + A\cos(\omega t) + \xi(t) - \gamma \frac{p}{m}, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}.$$

这里 x 和 p 是布朗粒子的位移和动量; $V(x)$ 是双势

* 国家自然科学基金(批准号:10972207)和浙江省自然科学基金(批准号:Y7080111)资助的课题.

[†] E-mail: linm@cjl. edu. cn

阱函数, $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4}$; $A\cos(\omega t)$ 是外界作用到系统的弱周期力, 其中 $A \ll 1$ 是幅值, ω 是频率; $\xi(t)$ 是具有 $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle = 2k_B T\delta(t)$ 统计性质的热噪声, 其中 k_B 为 Boltzmann 常量, T 为热力学温度, 常用强度 $D = k_B T$ 的高斯白噪声模拟热随机力; γ 是阻尼系数, 在过阻尼情况下, 常略去等式左边的惯性项, 则(1)式成为研究随机共振的经典模型.

布朗粒子在有规力和无规力的共同作用下运动, 存在着有序的定向运动与无序的随机运动. 周期性外力和双稳势场对粒子的作用, 会导致粒子运动的有序和有组织, 而随机力的作用将引起无序和混乱, 这两种对立的倾向相互竞争, 在不同的条件下此长彼消. 随机共振就是随着无规力强度 D 或环境温度 T 的变化而出现的现象.

(1)式是以力为研究着眼点建立的动力学方程, 本文以能量为立足点, 着重分析(1)式中做功及能量转换关系, 从而更加深刻地揭示随机共振中的能量转换机理.

2.2. 能量守恒性

用 dx 点积(1)式两边, 得

$$\frac{dp}{dt} \cdot dx = \left(-\frac{dV(x)}{dx} + A\cos\omega t \right) \cdot dx + \xi(t) \cdot dx - \gamma \frac{p}{m} \cdot dx, \quad (2)$$

式中 $\frac{dp}{dt} \cdot dx = d\left(\frac{p^2}{2m}\right)$ 是动能的变化. 考虑外力 $A\cos(\omega t)$ 的作用, 系统随时间变化的势函数为

$$U(x, t) = V(x) - xA\cos(\omega t). \quad (3)$$

由于

$$\begin{aligned} dU(x, t) &= \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} dt \\ &= -\left(-\frac{dV(x)}{dx} + A\cos\omega t \right) \cdot dx + xA\omega\sin\omega t \cdot dt, \end{aligned} \quad (4)$$

则由(2)式可得如下的能量平衡方程:

$$dE = d'W + d'Q_1 - d'Q_2. \quad (5)$$

这里

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x, t)$$

是系统的总能量;

$$d'W = xA\omega\sin\omega t \cdot dt$$

是外界宏观力对双稳系统所作的元功;

$$d'Q_1 = \xi(t) \cdot dx$$

是热随机力所作的微观功, 究其实质是给系统传递热量;

$$d'Q_2 = \gamma \frac{p}{m} \cdot dx$$

是有序的动能转化为无序运动的热能并向介质散发. 图1所示为 Langevin 方程中的能量守恒性. 总之, 从能量的角度来分析处于双稳势场中的布朗粒子, 系统与外界既有功的交互作用又有热的交互作用, 系统状态的变化伴随着功和热量两种不同形式的能量传递, 而热量又可分为主动提供的 Q_1 和被消耗散的 Q_2 . 随机能量共振就体现在做功 W 随 Q_1 的变化所呈现出的非单调性上.

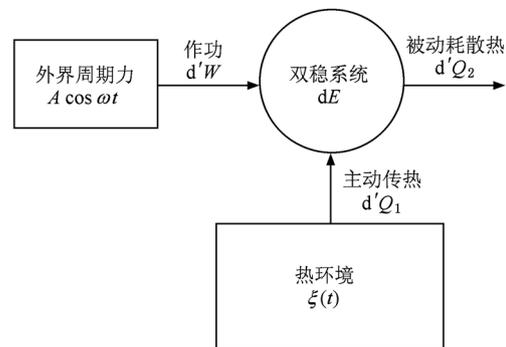


图1 Langevin 方程中的能量守恒性

2.3. 作功效率

由于 $x(t)$ 是随机变量, 双稳系统在不同周期与外界交换的热量、内能的变化和外力的做功并不相同. 本文采用计算 $x(t)$ 单一轨线的多个周期平均值, 并略去初始瞬态的变化. 记

$$W = \frac{1}{n} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau} A\omega \langle x \sin(\omega t) \rangle dt, \quad (6)$$

则 W 代表输入力 $A\cos(\omega t)$ 对系统所作的功, $\tau = 2\pi/\omega$ 是输入力的周期, τ_0 是初始的瞬变时间, $\langle \cdot \rangle$ 表示求集合平均.

幅值为 A 的周期性外力, 其功率为 $\frac{A^2}{2}$, 则一个周期所具有的能量为 $\frac{A^2}{2}\tau$. 尽管外力具有的能量都有作功的本领, 但外力作用到双稳系统却只有部分能量转化为功. 一个周期内外力对双稳系统所作的功 W 与其具有的能量之比定义为作功效率 η , 即

$$\eta = \frac{W}{\frac{A^2\tau}{2}} = \frac{2}{An\tau} \int_{\tau_0}^{n\tau+\tau_0} \omega \langle x \sin(\omega t) \rangle dt. \quad (7)$$

作功效率 η 反映了在热噪声作用下的双稳系统对周期性外力的能量吸收效率. 由于 $x(t)$ 是随机变量, 在绝热近似 ($A \ll 1, \omega \ll 1, D \ll 1$) 的假设条件下, 其统计均值^[2]可表示为

$$\langle x(t) \rangle = X(D) \cos[\omega t + \varphi(D)], \quad (8)$$

式中

$$X(D) = \frac{A \langle x^2 \rangle_0}{D} \frac{2r_k}{\sqrt{4r_k^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi(D) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2r_k}\right).$$

这里 $\langle x^2 \rangle_0$ 是由 D 决定的静态未扰动系统 ($A = 0$) 的方差,

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right)$$

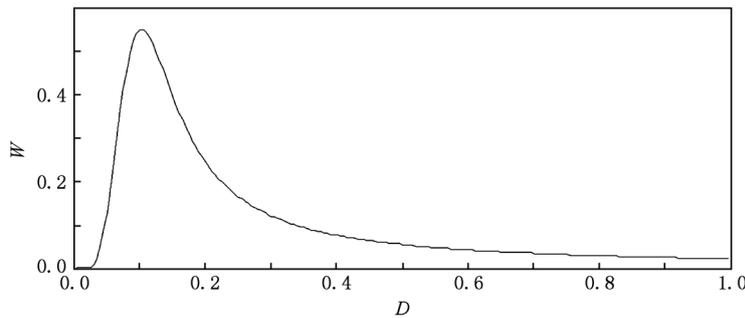


图2 W 与 D 之间关系的理论曲线 $A = 0.2, \omega = 0.02\pi$

3. 数值仿真结果与分析

外力对系统所作的功 W 与 A, ω 和 $x(t)$ 有关, 而 $x(t)$ 的 $X(D)$ 和 $\varphi(D)$ 又是噪声强度 D 的函数. 本文着重分析 W, η 与 A 和 D 的关系. 分析时 (1) 式中的参数取 $m = 1, \gamma = 1$, 数值仿真采用四阶 Runge-Kutta 法, 初始时间 τ_0 取为 20τ , 选择 $n = 50$.

3.1. W 和 Q_2 与 D 的关系

当作用到系统的周期力的频率 $\omega = 0.02\pi$, 而幅值分别为 $A = 0.2, 0.3$ 和 0.4 时, 通过调节热随机力强度 D , 外力所作的功 W 随之而变, 结果如图 3 所示. 图 3 表明: 随着噪声强度的变化, 外力对系统所作的功也随之而变, 且呈现出明显的非单调峰值

是 Kramers 逃逸率.

将 (8) 式代入 (6) 式可得

$$\begin{aligned} W &= A\omega X(D) \frac{1}{n} \int_{\tau_0}^{\tau_0+n\tau} \sin\omega t \cdot \cos[\omega t + \varphi(D)] dt \\ &= -\pi A X(D) \sin\varphi(D) \\ &= \frac{A^2 \pi \omega}{D \sqrt{\frac{2e^{-1/(2D)}}{\pi^2} + \omega^2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} e^{1/(2D)} \pi^2 \omega^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式表明功 W 的大小与 x 的幅值 $X(D)$ 和相位 $\varphi(D)$ 有关. 因此, 与传统的度量随机共振的信噪比、功率谱放大率等相比, 采用功这一过程量能更全面地刻画双稳系统产生随机共振的动态过程. 当取 $A = 0.2, \omega = 0.02\pi$ 时, 图 2 给出了 (9) 式中 W 与 D 之间关系的理论曲线. 图 2 表明, 随着噪声强度的变化, 外力对系统所作功的大小变化呈现出明显的单峰曲线, 存在着随机能量共振现象.

特性, 存在着随机能量共振现象; 而不同幅值的外力所作功的大小也各不相同, 幅值较大的外力所作的功也较大. 数值仿真结果表明在双稳系统中存在着随机能量共振, 这与图 2 所示的理论曲线结果一致. 图 2 的理论曲线是在 $A \ll 1, \omega \ll 1$ 和 $D \ll 1$ 的小参数近似条件下得出的, 而图 3 的仿真曲线所选取的参数值较大, 因而仿真曲线中的峰值及其位置与理论结果相比存在着偏差, 这是由双稳系统的非线性所引起的.

随着热随机力强度 D 的变化, 系统所耗散的热量 Q_2 也随之而变, 结果如图 4 所示, 图中纵坐标 Q_2/D 是单位噪声强度所耗散的热量. 图 4 表明: 当噪声强度较小时, 在不同幅值的外力作用下系统所耗散的热量相差较大, 幅值较大的系统所耗散的热量 Q_2 也较大; 而随着 D 的不断增大, 在不同幅值的外力作用下系统所耗散的热量 Q_2 逐渐趋于相同. 从

图3和图4可以看出,较大幅值的外力具有较高的能量,对双稳系统所作的功 W 也较大,但在低噪声

强度下系统所耗散的热量 Q_2 也较大.由此可知,幅值越大的外力做功的效率不一定越高.

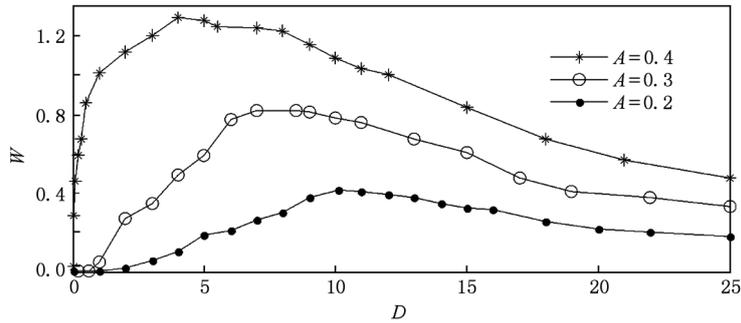


图3 $A = 0.2, 0.3, 0.4$ 时的随机能量共振曲线 $\omega = 0.02\pi$

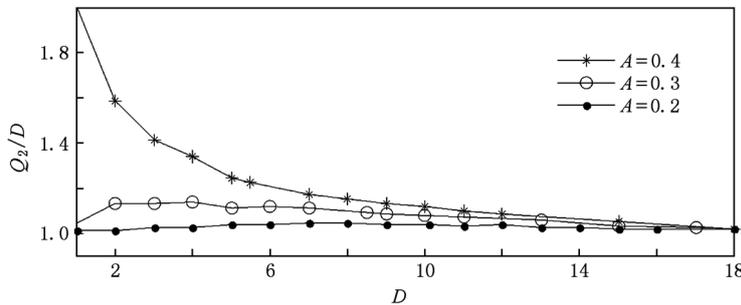


图4 系统耗散能量 Q_2 随 D 的变化曲线

3.2. η 与 A 和 D 的关系

随着噪声强度 D 的变化,作功效率 η 也随之而变,图5所示是幅值 A 分别取 $0.2, 0.3, 0.4$ 三个值时所对应的三条作功效率曲线.图5表明:随着噪

声强度 D 的变化, η 呈现出单峰曲线.对于不同的幅值 A , η 峰值及其所对应的 D 值各不相同,当幅值 A 较大时, η 的峰值较小,所对应的 D 值也较小.由于双稳系统存在着非线性特性,因而不同幅值 A 的仿真曲线与(9)式的理论结果有些偏差.

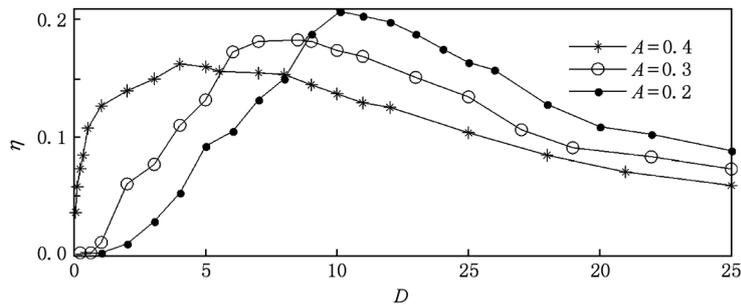


图5 $A = 0.2, 0.3, 0.4$ 时 η 与 D 的关系曲线

4. 结 论

以能量为核心分析了双稳系统的微观行为与宏观演变过程之间的联系,建立了布朗粒子沿单一轨线运

动时系统与环境之间的能量平衡方程.研究结果表明,随着噪声强度的变化,周期力对系统所作的功和作功效率都呈现出非单调的单峰曲线,存在着随机能量共振现象;在不同幅值的周期力作用下,对系统做功的峰值和作功效率的峰值也不相同.这些现象的物理本

质是有序运动与无序运动、能量的增值与贬值这两种对立倾向相互竞争,在不同条件下此长彼消的结果.

- [1] Benzi R, Suter A, Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** 1453
- [2] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海:上海科技教育出版社)]
- [4] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [5] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [6] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [7] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 952
- [8] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [9] Lin M, Mao Q M, Zheng Y J, Li D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5021 (in Chinese) [林 敏、毛谦敏、郑永军、李东升 2007 物理学报 **56** 5021]
- [10] Wang C J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030503
- [11] Lin M, Fang L M, Zheng Y J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1725
- [12] Dong X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010502
- [13] Lin M, Fang L M, Zhu R G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2638 (in Chinese) [林 敏、方利民、朱若谷 2008 物理学报 **57** 2638]
- [14] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wang W J, Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、郭 焱、汪文津、胡世广 2005 物理学报 **54** 1118]
- [15] Lin M, Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
- [16] Dong X J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 70
- [17] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张 莉、刘 立、曹 力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [18] Lin L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林 灵、闫 勇、梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]
- [19] Guo Y F, Xu W, Wang L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040503
- [20] Iwai T 2001 *Physica A* **300** 350
- [21] Dan D, Jayannavar A M 2005 *Physica A* **345** 404
- [22] Saikia S, Roy R, Jayannavar A M 2007 *Phys. Lett. A* **369** 367
- [23] Sekimoto K 2007 *Phys. Rev. E* **76** 060103
- [24] Seifert U 2008 *Eur. Phys. J. B* **64** 423
- [25] Bustamante C, Liphardt J, Ritort F 2005 *Phys. Today* **58**(7) 43

The stochastic energetics resonance of bistable systems and efficiency of doing work *

Lin Min[†] Zhang Mei-Li Huang Yong-Mei

(College of Metrology Technology and Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 26 September 2010; revised manuscript received 18 November 2010)

Abstract

The interaction of work and heat between Brownian particles in a bistable system, the external periodic force and the thermal stochastic force are analyzed. The stochastic energy balance equation based on Langevin equation is established. For the Langevin equation subjected to periodic force, stochastic force and damping force, the method of combining dynamics and non-equilibrium thermodynamics is used. From force as the foothold changed into energy as the research core, the exchange of energy between system and environment and the efficiency of doing work are deeply analyzed with this method when the Brownian particle motion is along single trajectories, which reveals that the bistable system exhibits stochastic energetic resonance phenomenon.

Keywords: bistable systems, stochastic energetics resonance, efficiency of doing work

PACS: 05.70.-a, 05.45.-a, 05.40.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972207) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y7080111).

[†] E-mail: linn@cjl.u.edu.cn