

瞬态热传导问题的一阶对称 SPH 方法模拟*

蒋涛 欧阳洁[†] 栗雪娟 张林 任金莲

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2010年11月21日收到; 2010年12月18日收到修改稿)

为提高传统光滑粒子动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法模拟瞬态热传导问题的精度和稳定性, 本文提出了一种一阶对称光滑粒子动力学(first order symmetric SPH, FO-SSPH)方法. 该方法将具有二阶热传导方程分解成两个一阶偏微分方程, 然后基于梯度离散和 Taylor 级数展开思想, 对一阶核梯度形式进行修正, 并将得到的局部矩阵对称化. 数值结果表明: 与传统 SPH 方法相比, FO-SSPH 方法精度高、数值稳定性好; 该方法能较准确地直接施加混合边值条件, 且求解多边形抛物型偏微分问题可靠、灵活. 文中最后运用 FO-SSPH 方法研究了一维非线性热传导问题趋近稳态时温度分布出现的“凹”、“凸”奇异现象, 并讨论了热流系数对“凹”、“凸”现象的影响.

关键词: 瞬态热传导, 光滑粒子动力学, 非线性

PACS: 02. 60.-x, 02. 70.-c, 44. 10.+i

1. 引言

传热现象^[1,2]普遍存在于材料加工行业, 其研究涉及瞬态热传导问题的求解, 在其温度场随时间变化时, 由于结构形状以及温度条件的复杂性, 很难依靠传统解析方法精确地得到温度分布的解析解, 特别是非线性的热传导问题. 目前解决该类问题的数值方法主要有基于网格的有限差分法、有限元法(finite element method, FEM)^[3]等. 近年来, 粒子方法(或无网格方法)以其独特优势在热传导问题的研究中得到广泛应用, 如 Lattice-Boltzmann^[4,5]方法、Element-Free Galerkin (EFG)方法^[6,7]等. 但其研究较多的是稳态热传导问题, 对瞬态或非线性热传导问题的研究还处于探索阶段. 至今, 采用光滑粒子动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法模拟瞬态热传导问题, 在其数值精度和数值稳定性方面仍是一个很具挑战性的问题. SPH 是一种纯粹的粒子类方法, 该方法 1977 年提出并应用于天文学领域^[8,9]. SPH 方法的改进与瞬态传热的研究是两个有意义的研究领域^[10-12], 但至今关于热传导问题的 SPH 模拟^[10]研究在国际上尚不多见. 用 SPH 方法模拟热传导问题较上述方法具有自身的

优点: 计算空间导数时不需要借助网格; 具有较高的计算效率; 易于处理多维复杂区域问题; 程序上容易实现.

众所周知, 传统 SPH 方法在精度和数值稳定性方面存在缺陷, 尤其在边界处或粒子分布不均匀区域. 针对上述缺陷, 已提出了一些改进方法^[13-17], 并将其应用到线性瞬态热传导问题, 如 Corrective Smoothed Particle Method^[13] (CSPM), Modified Smoothed Particle Hydrodynamics^[14] (MSPH) 和 Finite Particle Method^[15] (FPM) 方法等. 这些改进格式大多着眼于恢复 SPH 方法中核近似的相容性^[10,18], 以改善其计算精度, 但增加了对核函数的要求且形成的局部矩阵非奇异性差, 降低了计算效率. 事实上, 瞬态热传导传统 SPH 模型中, 通常需将热传导抛物方程中温度的导数形式近似成以核梯度一阶或二阶形式的粒子离散格式. 于是, 边界处核近似的相容性, 离散模型中核梯度的精度、核函数的选择都会直接影响整个温度场计算的准确性、稳定性等.

基于上述分析, 本文针对线性或非线性瞬态热传导的传统 SPH 离散模型, 为提高其精度和稳定性, 先将具二阶热传导方程分解成两个一阶偏微分方程, 然后基于梯度离散和 Taylor 级数展开思想, 对一阶核梯度形式进行修正, 并将得到的局部矩阵对

* 国家自然科学基金(批准号:10871159)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

称化,提出了一阶对称 SPH (first order symmetrical SPH, FO-SSPH)方法. 相对于传统 SPH 模型而言,此新模型具有较高的精度和更好的稳定性. 值得注意的是,提出的新方法除了具有 CSPM^[13]方法、MSPH^[14]方和 FPM^[15]法的优点外,还改善了它们的一些缺陷. 文中首先通过模拟一维线性瞬态热传导问题^[11],对 FO-SSPH 离散格式的精度、稳定性和收敛性进行了验证. 其次,对具有 Dirichlet 或 Neumann 边界条件的二维线性瞬态热传导问题^[11,19,20]进行了数值模拟,并与 FEM^[3]或 EFG^[19]的数值结果进行了比较. 研究表明:此方法能够准确地施加混合边值问题;求解多边值抛物型问题可靠、灵活. 最后,对一维非线性热传导问题^[5]趋近稳态时温度分布出现的“凹”或“凸”奇异现象进行了研究.

2. 瞬态热传导问题

在二维直角坐标系下,瞬态热传导问题的控制方程^[3,20]为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(k_\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \right) + G, \quad \text{in} \Omega, \quad (1)$$

其中, T 为温度, ρ 为材料密度, c_p 为材料比热容, G 为热源, x^α 为坐标系 (x, y) 中第 α 个分量, $k_\alpha(T)$ 为沿 x^α 方向的热传导率. 文中考虑矩形区域 $\Omega = [a, b] \times [a, b]$.

为封闭方程(1),施加的初始条件

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \text{in} \Omega, \quad (2)$$

和边界条件^[3,19]为

$$T(t) = T_1, \quad \text{on} \partial \Gamma_D (\text{Dirichlet 边界条件}), \quad (3)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} + bT = 0, \quad \text{on} \partial \Gamma_N (\text{Neumann 边界条件}), \quad (4)$$

其中, T_0 为初始时刻的温度, T_1 为任意时刻边界上的温度, $\mathbf{T} = \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}, k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为区域边界外单位法向量, bT 为边界热源, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi$, $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial \Omega$ 为区域边界.

定义热传导率与温度之间的关系^[5]为

$$k_\alpha(T) = \theta_\alpha + \beta_\alpha T + \gamma_\alpha T^2, \quad (5)$$

其中, $\theta_\alpha, \beta_\alpha, \gamma_\alpha$ 均为常数 ($\theta_\alpha \neq 0$). 当 $\beta_\alpha = \gamma_\alpha = 0$ 时,方程(1)对应线性问题,否则为非线性问题.

3. 瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型

对瞬态热传导方程(1)直接数值求解会涉及二

阶导数的处理,而传统 SPH 方法中二阶导数离散格式的精度不足一阶^[11,13]. 为避免高阶导数离散带来的数值精度低和数值不稳定问题,将其分解成两个一阶偏微分方程问题进行求解.

令

$$q^\alpha = -k_\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}, \quad (6)$$

则方程(1)变为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + G, \quad (7)$$

其中, $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ 为热流量.

3.1. 一阶 SPH 离散模型

传统 SPH 方法,通过核函数进行积分插值^[8,9]. 数值模拟中流体域 Ω 用有限个粒子表示,每个粒子赋有一定的密度、质量、温度等相关的物理性质.

对任意物理量 f 及其一阶导数 ∇f 在位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ 处的 SPH 核近似通常表示为

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_\Omega f(\mathbf{x}') \nabla W d\mathbf{x}' \\ &\quad - f(\mathbf{x}) \int_\Omega \nabla W d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $W = W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$ 称为核函数或光滑函数,它的选择一般需要满足正则化、对称性、紧致性和 Dirac 函数性质^[9,10,21], ∇W 为核函数梯度, h 为光滑长度. 通过(8)式对第 i 个粒子在 $\mathbf{x}_i = (x, y)$ 处进行粒子插值近似,可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = \sum_j (f_j - f_i) \frac{1}{np_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (9)$$

其中 np_j 为第 j 个粒子对应的密度数, $W_{ij} = W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, h)$, $\partial W_{ij} / \partial \mathbf{x}_i = \partial W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, h) / \partial \mathbf{x}_i$, $\partial W_{ij} / \partial \mathbf{x}_i = -\partial W_{ji} / \partial \mathbf{x}_j$. 为提高数值模拟精度,本文取分段三次样条作为核函数^[18],此时支持域半径为 $2h$.

由(9)式,得到温度梯度的 SPH 粒子离散格式为

$$(\nabla f)_i = \sum_j \frac{1}{np_j} (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij}, \quad (10)$$

其中 f 可代表温度 T 和热流量 q^α .

将(10)式应用于(6)和(7)式,得到

$$(q^\alpha)_i = (k_\alpha)_i \sum_j \frac{1}{np_j} (T_i - T_j) \nabla_i^\alpha W_{ij}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i(c_p)_i} \left(\sum_j \frac{1}{np_j} (q_i^\alpha - q_j^\alpha) \nabla_i^\alpha W_{ij} + G_i \right), \quad (12)$$

(11)式和(12)式称为瞬态热传导方程的一阶 SPH 离散模型,其中只涉及核函数一阶导数的计算.值得注意的是,在热传导方程 SPH 数值模拟中,由于边界粒子缺陷和离散公式的截断误差,对 Dirichlet 和 Neumann 边界条件不能直接准确地施加,需要特殊处理^[10,16]才能得到较好的效果.

为求解方程(12),采用具有二阶精度和较好稳定性的预估校正格式离散时间.预估校正格式以及时间步长选取原则可见文献[16,21].

3.2. FO-SSPH 离散模型

离散公式(8)中,核梯度 $\nabla_i W_{ij}$ 对热传导问题离散模型的相容性、精度和数值稳定性有直接的影响.

将(8)式中右端第一项 $f(\mathbf{x}')$ 在 \mathbf{x} 处进行二阶 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W d\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \nabla W d\mathbf{x}' + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \int_{\Omega} (x' - x) \nabla W d\mathbf{x}' \\ & \quad + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \int_{\Omega} (y' - y) \nabla W d\mathbf{x}' + O(h^2), \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \int_{\Omega} (x' - x) \nabla W d\mathbf{x}' \\ & \quad + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \int_{\Omega} (y' - y) \nabla W d\mathbf{x}' \\ & \quad + O(h^2), \end{aligned} \quad (14)$$

忽略掉(14)式中 $O(h^2)$,进行粒子离散,并联合(10)式得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i A_{xx} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_i A_{yx} \\ &= \sum_j \frac{1}{np_j} (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}, \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i A_{xy} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_i A_{yy} \\ &= \sum_j \frac{1}{np_j} (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $A_{\alpha\beta} = \sum_j (x_j^\alpha - x_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \frac{1}{np_j}$.

显然,方程组(15)中对应的系数矩阵 $\mathbf{A} = [A_{\alpha\beta}]$ 是非对称的,使得矩阵的奇异性将过分依赖核函数、光滑长度等参数的选择.为改善矩阵的非奇异性,将方程组(15)中的 $\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}$ 用 $(x_j^\beta - x_i^\beta) W_{ij}$ 来替换,则矩阵 \mathbf{A} 对称化为 $\mathbf{A}^s = [A_{\alpha\beta}^s]$.于是,可得到

$$(\nabla f)_i = \sum_j \frac{1}{np_j} (f_j - f_i) \nabla_i^s W_{ij}, \quad (16)$$

其中核梯度 $\nabla_i^s W_{ij}$ 为

$$\nabla_i^s W_{ij} = (\mathbf{A}^s)^{-1} \begin{pmatrix} (x_j - x_i) W_{ij} \\ (y_j - y_i) W_{ij} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

\mathbf{A}^s 为对称矩阵.(16)式称为一阶对称 SPH (FO-SSPH) 离散格式,该格式中虽只涉及核函数的计算,但也能够弥补传统 SPH 离散格式边界处不满足一阶相容性的缺陷,并改善了非对称矩阵奇异可能导致的误差和数值不稳定性问题.事实上,无论区域内粒子分布是否均匀或在边界处,离散格式(16)均将具有二阶精度和较好的稳定性(见 4.1.1 节).

将(16)式应用于(6)和(7)式,得到瞬态热传导控制方程的 FO-SSPH 离散模型

$$(q^\alpha)_i = (k_\alpha)_i \sum_j \frac{1}{np_j} (T_i - T_j) \frac{\partial^s W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i (c_p)_i} \left(\sum_j \frac{1}{np_j} (q_i^\alpha - q_j^\alpha) \frac{\partial^s W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + G_i \right), \quad (19)$$

在热传导方程 FO-SSPH 数值模拟中,边界处满足函数梯度一阶相容性,且 Dirichlet 和 Neumann 边界条件可以直接准确地施加,不需要特殊处理.经数值验证(见 4.1 节),本文提出的瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型,与文献[11,13—15,22]中的离散模型有很大的区别,且较一阶 SPH 离散模型具有较高的精度和更好的稳定性,并具有自身的优点.

与 CSPM^[13], FPM^[15] 离散格式相比,FO-SSPH 离散格式的优点在于:局部矩阵对称、不涉及高阶核函数导数计算、具有较高的计算效率且在程序上容易实施;与 MSPH^[14] 离散格式相比,FO-SSPH 离散格式的优点在于:不含高阶核函数的求导计算、降低了对核函数选择的特殊要求、计算效率高、能够降低粒子间非连续性产生的误差、程序上易于实施、且更易推广应用到复杂的三维问题.此外,通过对上述三种改进 SPH 离散格式(见文献[17—19])构造的过程以及本文 FO-SSPH 离散形式进行观察可知:已有三种改进 SPH 方法形成局部矩阵非对称性以及高阶的核导数都会对矩阵的非奇异性有一定影响,因此在粒子分布及其他参数(如核函数、光滑长度)相同情况下,FO-SSPH 方法模拟中形成的局部矩阵会较上述三种改进 SPH 方法具有更好的非奇异性.

同时,相对于 FEM 等网格数值方法,模拟基于

Euler 描述的瞬态热传导问题时,FO-SSPH 方法具有更高的计算效率(见表 3),且通过 4.1.2 中数值模拟以及 FO-SSPH 方法本身具有插值格式^[10,21]的灵活性特点易知:FO-SSPH 方法在应用上较 FEM,EFG 更具灵活性的优势.

4. 瞬态热传导问题 FO-SSPH 模拟

4.1. FO-SSPH 离散模型的可靠性分析

本节通过一维线性热传导问题的模拟,对 FO-SSPH 离散模型的精度、收敛性和数值稳定性进行了分析.并通过与不同边界条件下二维线性热传导问题的 FEM,EFG 数值结果进行比较,对二维热传导 FO-SSPH 离散模型的准确性和可靠性进行了验证.

本节数值模拟中,平板区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\theta_\alpha = 1, \beta_\alpha = \gamma_\alpha = 0, \frac{k_\alpha}{\rho c_p} = 1, G = 0$. 取光滑长度 $h = d_0$ (d_0 为粒子间初始距离),粒子分布非均匀时取 $h_{ij} = (d_i + d_j)/2$, (d_i 为第 i 个粒子对应的间距).由于数值模拟中粒子位置保持不变,为提高计算效率,程序中使用链表法标记相邻粒子^[21].

4.1.1. 一维线性情况的温度变化

考虑无量纲的一维线性热传导问题

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_x}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (20)$$

初始和边界条件分别为 $T(x,0) = T_0, T(0,t) = T_0, T(1,t) = T_1$ 对应的解析解^[11]为

$$T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)x + 2(T_1 - T_0) \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\lambda_j} \exp(-\lambda_j^2 t) \sin(\lambda_j x), \quad (21)$$

其中, $\lambda_j = \pi j, T_0 = 0, T_1 = 1$.

模拟中,取 31 个粒子,时间步长 $dt = 1 \times 10^{-4}$. 从 $x = 1$ 位置处开始加热,随时间延长温度分布达到稳定状态 ($t \approx 0.5$), 并成 45° 的直线型(见图

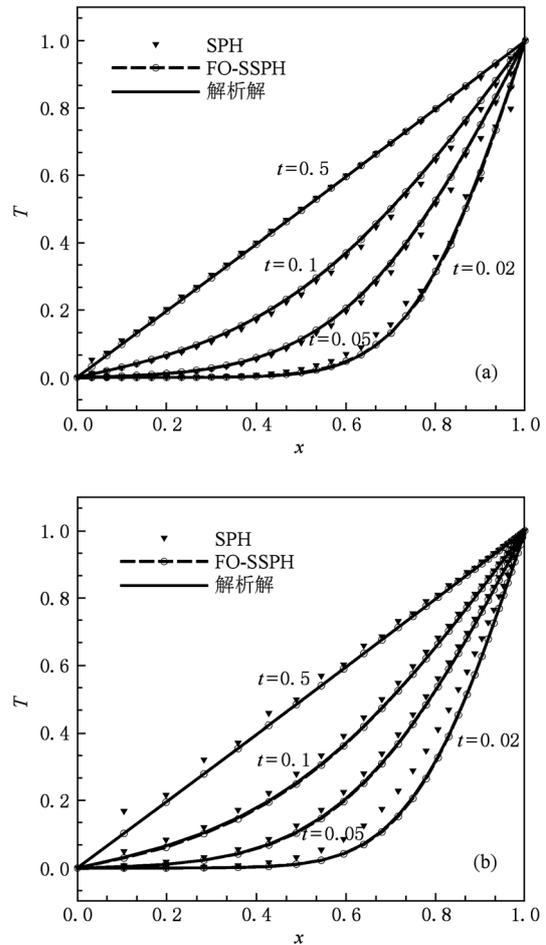


图 1 不同时刻温度变化曲线数值解比较 (a) 粒子分布均匀; (b) 粒子分布不均匀

1). 图 1 比较了传热过程中不同时刻温度变化曲线的数值解与解析解,同时给出了粒子分布均匀和不均匀情况下的数值解变化情况.从图 1 中可以看出,无论粒子分布是否均匀,FO-SSPH 法得到的数值解均与解析解符合很好;传统 SPH 法得到的数值解与解析解有一定差距,在边界处或粒子分布不均匀时这一差距更加明显;该结果表明 FO-SSPH 离散模型较传统 SPH 模型具有更高的精度和更好的数值稳定性,边界处或粒子分布不均匀时,该优点尤为明显.

表 1 中心位置 $x = 0.5$ 处粒子温度 FO-SSPH 数值解与解析解之间的绝对误差值 (Δe)

粒子数 (N)	粒子等间距 (Δx)	$\Delta e(t = 0.02)$	$\Delta e(t = 0.05)$	$\Delta e(t = 0.1)$	$\Delta e(t = 0.5)$
21	0.05000000	0.00488063	0.00141239	0.00087740	0.00017878
41	0.02500000	0.00139862	0.00022943	0.00032239	0.00003967
81	0.01250000	0.00044263	0.00002418	0.00014297	0.00001415
121	0.00833333	0.00026292	0.00000732	0.00007688	0.00001022

为了体现 FO-SSPH 模型具有较高的精度,表 1 给出了不同时刻中心位置 $x = 0.5$ 处粒子温度数值解与解析解之间的绝对误差值 ($\Delta e = |T_s - T_a|$, T_s, T_a 分别为数值解和解析解). 由表 1 可见,不同粒子数在不同时刻下的绝对误差值 $\Delta e \approx C(\Delta x)^2$ (C 为 1 附近的常数),这表明 FO-SSPH 方法在求解域内具有二阶精度格式. 而对于传统 SPH 方法模拟热传导问题,区域内的数值结果无法达到二阶精度.

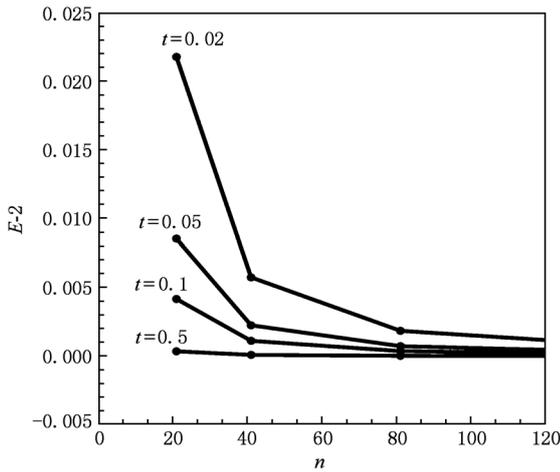


图 2 FO-SSPH 模拟不同时刻不同粒子数温度的 2 范数误差

考虑温度的 2 范数误差

$$E_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (T_{s,i} - T_{a,i})^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^n T_{a,i}^2},$$

$T_{s,i}, T_{a,i}$ 分别为数值解和解析解. 图 2 给出了不同时刻不同粒子数下温度 FO-SSPH 数值解的 2 范数误差. 由图 2 知,FO-SSPH 法模拟瞬态热传导在不同时刻里均具有较好的收敛性. 值得注意的是,FO-SSPH 法与 CSPM 法具有接近的精度和收敛性(见文献 [17]),但 FO-SSPH 法中涉及的局部矩阵对称,且不涉及核函数高阶导数计算,计算效率高.

4. 1. 2. 二维线性情况的温度变化

考虑无量纲的二维线性瞬态热传导问题

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_x}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (22)$$

初始条件 $T(x, y; 0) = -1$, 以及 Dirichlet 边界条件

$$\begin{aligned} T(0, y; t) = T(1, y; t) = T(x, 0; t) \\ = T(x, 1; t) = 1, \end{aligned} \quad (23)$$

Neumann 边界条件

$$\frac{\partial T(x, 1; t)}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

为体现 FO-SSPH 能直接准确地施加边界条件,

模拟中包括两种不同的边界条件 1) 对四个固壁考虑 Dirichlet 边界条件 (23); 2) 只对上固壁考虑 Neumann 边界条件,其他固壁考虑 Dirichlet 边界条件. 另外,由于问题 (22) 联合上面的初始和边界条件并无解析解,因此将 FO-SSPH 数值结果与 FEM, EFG 数值结果进行对比. FO-SSPH 模拟中取 51×51 个均匀分布粒子,时间步长 $dt = 1 \times 10^{-4}$.

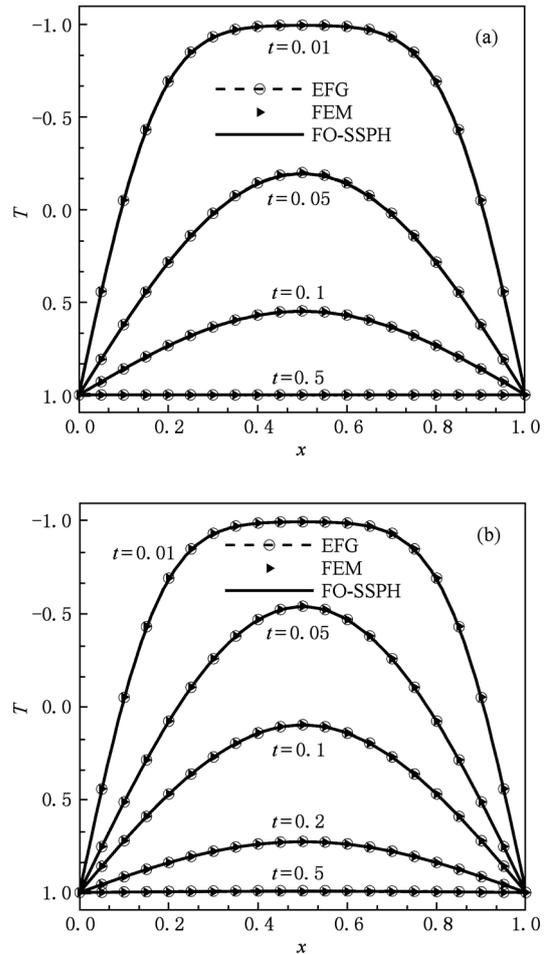


图 3 不同时刻温度变化的数值结果 (a) 边界条件 1) ($y = 0.5$); (b) 边界条件 2) ($y = 1$)

图 3 给出了两种边界条件下平板上某位置处 ($y = 0.5$ 和 $y = 1$ 处) 不同时刻沿 x 轴方向温度变化的数值结果比较. 从图 3 可看出,边界条件 1) 和 2) 不同时刻下的三种数值结果都符合很好,表明二维线性瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型得到的数值解准确、可靠,且 FO-SSPH 方法可以较准确地施加 Dirichlet 和 Neumann 边界条件. 同时可以观察到,两种不同边界条件下同一时刻平板上温度分布情况不同,第一种边界条件下温度分布达到稳定状态需要的时间较短. 值得注意的是,模拟中发现, FEM 法

和 EFG 法模拟此瞬态问题时,要准确捕捉瞬时时刻平板上的温度分布,需要较小的时间步长和较密的

网格. 因而该算例更加凸显出 FO-SSPH 法较 FEM 法和 EFG 法的灵活性.

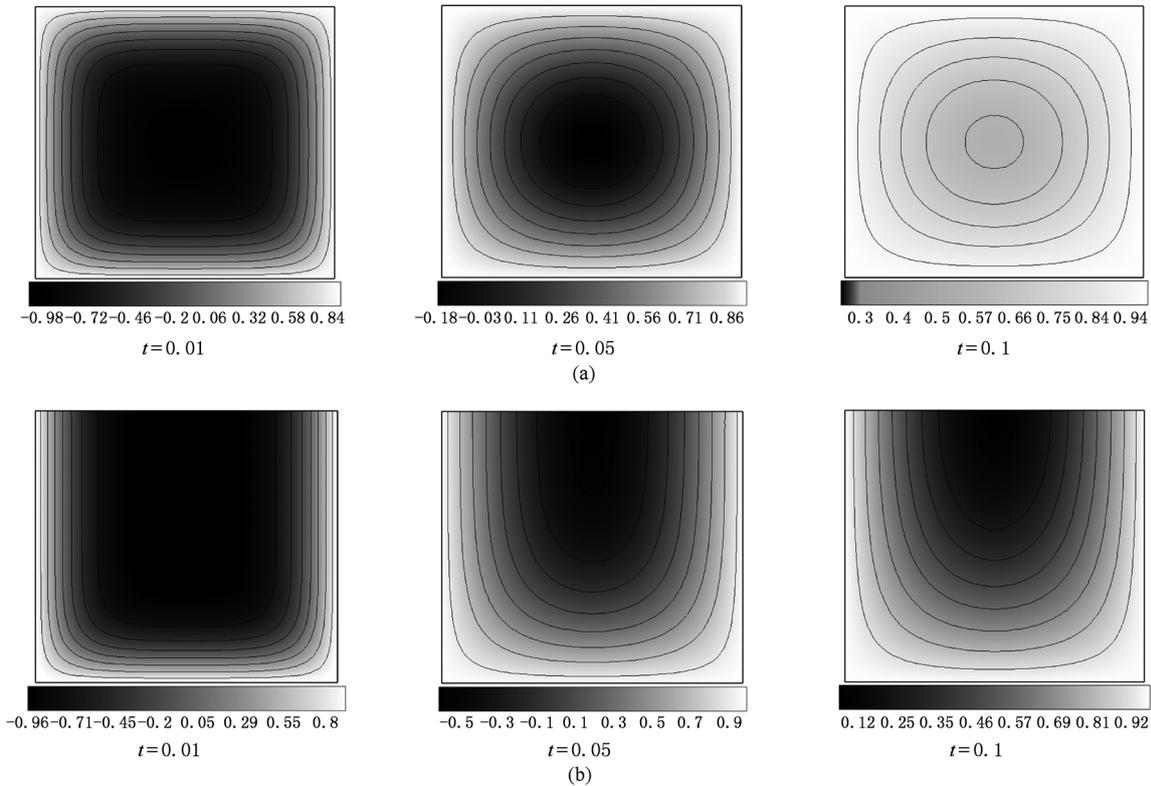


图 4 不同边界条件、不同时刻下的温度分布情况 (a) 边界条件 1) 情况下的温度分布; (b) 边界条件 2) 情况下的温度分布

图 4 给出了两种边界条件下不同时刻温度分布的 FO-SSPH 数值结果云图. 通过图 3 不同数值结果比较可知, 图 4 中不同时刻温度的 FO-SSPH 数值结果正确. 由图 4 可以看出, 边界条件 1) 下从平板四边界向中心位置处温度逐渐升高, 而边界条件 2) 下从平板三边界向上固壁中心位置处温度逐渐升高.

为进一步体现瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型在工程应用中的准确性和有效性, 下面对文献 [19, 20, 23] 中有量纲的实际平板传热问题进行了模拟, 并与稳态时平板中心位置处温度值以及 FEM, EFG 数值结果作了对比. 所有物理参数选择均与文献 [19, 23] 中相同: 取单位长度为 1 m 正方形平板, 上边固壁上温度为 500°C, 其他三个固壁温度为 100°C; 区域上分布 81 × 81 个均匀分布粒子, 粒子间初始间距 $d_0 = 0.0125$ m, 光滑长度 $h = 1.1d_0$, 时间步长 $dt = 10^{-4}$ s. 模拟中, 假设材料的热传导系数为一常数 10 W/m°C, 对应稳态时的解析解^[20]为

$$T(x, y) = (T_{top} - T_{side}) \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j + 1}{j}$$

$$\times \sin\left(\frac{\lambda_j x}{H_w}\right) \frac{\sinh(\lambda_j y / H_w)}{\sinh(\lambda_j H_h / H_w)} + T_{side}, \quad (25)$$

其中, $\lambda_j = j\pi$, T_{top} 为平板上固壁温度, T_{side} 为平板其他边的温度, H_w, H_h 分别为平板的宽和长. 由 (25) 式知, 稳态时平板中心位置温度 $T(0.5, 0.5) = 200$ °C.

图 5 给出了 FO-SSPH 模拟不同时刻的温度等值线分布. 表 2 给出了平板中心位置处粒子温度在不同时刻的数值结果对比. 从图 5 和表 2 中可以看出, 在初始阶段三种数值结果在平板中心位置处温度均都接近零度. 随着时间延长, 热量从上固壁边界迅速扩散到整个平板, 在 $t = 0.5$ s 左右达到稳态状态. 图 5 中的温度等值线分布情况与 EFG, FEM 方法得到的结果基本一致 (见文献 [23]). 从初始时刻到约 $t = 0.05$ s 左右, 靠近下固壁处温度等值线分布出现环绕现象, 由外向里温度渐高, 且温度低于 100°C (见图 5(a) 和 (b)), 当靠近固壁处温度大于 100°C 后整个平板上温度等值线分布出现图 5(c) 和 (d) 的阶梯形现象.

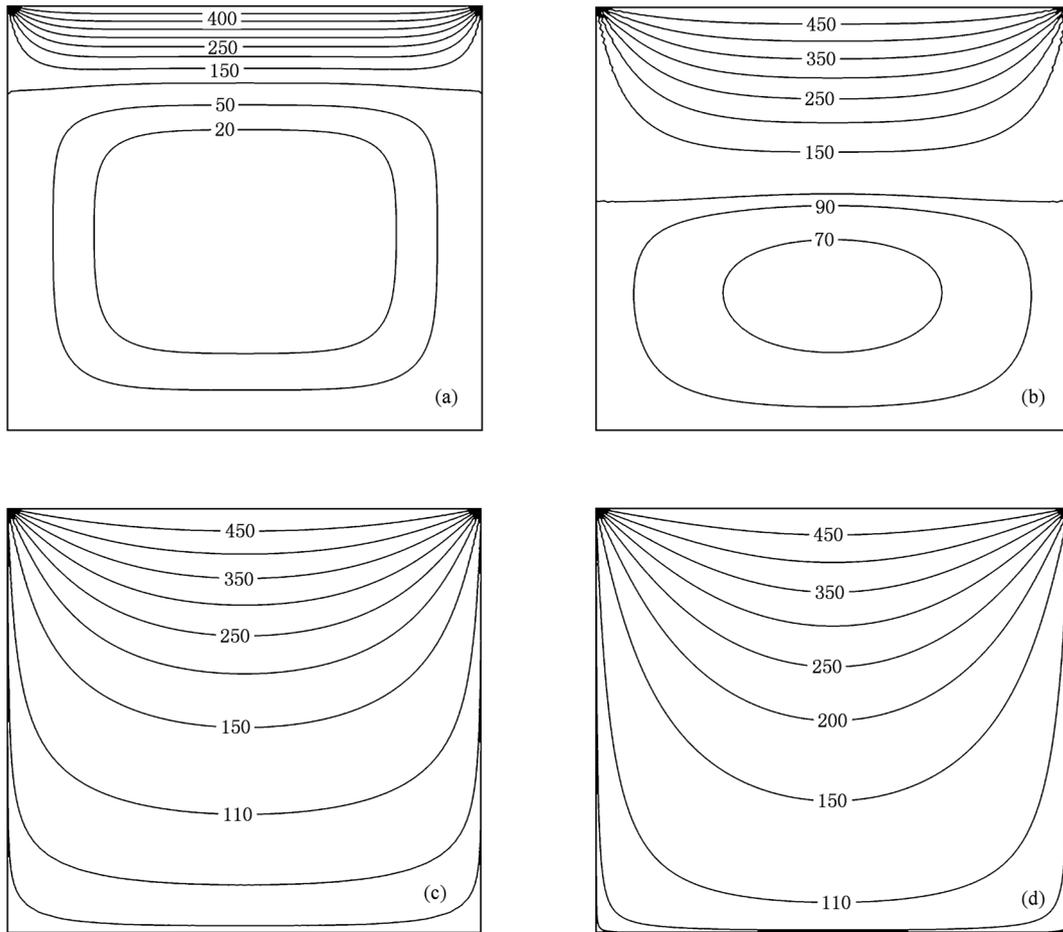


图5 FO-SSPH方法在不同时刻温度等值线分布情况 (a) $t = 0.01\text{ s}$; (b) $t = 0.05\text{ s}$; (c) $t = 0.1\text{ s}$; (d) $t = 0.5\text{ s}$

由表2可知,不同时刻平板中心位置处三种数值温度基本符合,达到稳态后 FO-SSPH法和EFG法数值结果均为 199.98°C ,与解析解 200°C 非常符

合.该结果进一步表明了 FO-SSPH方法模拟瞬态热传导问题非常可靠、有效.

对于Euler描述的瞬态热传导问题求解,FO-

表2 平板中心位置 (0.5,0.5) 处粒子温度在不同时刻的数值结果对比

数值方法	$t = 0.001\text{ s}$	$t = 0.01\text{ s}$	$t = 0.05\text{ s}$	$t = 0.1\text{ s}$	$t = 0.5\text{ s}$	$t = 1.0\text{ s}$
FO-SSPH	0.00°C	0.358°C	80.69°C	154.93°C	199.96°C	199.98°C
EFG	0.00°C	0.365°C	80.72°C	154.87°C	199.95°C	199.98°C
FEM	0.00°C	0.335°C	80.87°C	155.06°C	200.12°C	200.30°C

SSPH方法模拟中的粒子位置始终不变,即通过初始化时标记相邻粒子法避免了每一时间步内对相邻粒子进行重新搜索,从而 FO-SSPH法具有较高的计算效率.而传统 FEM和EFG方法需要形函数的构造和巨型矩阵的求解.表3给出了在双核奔腾4单机上,不同总粒子数(网格点)下、不同数值模拟中平均每步所需 CPU(s)时间的对比.通过表3可知,FO-SSPH法模拟基于 Euler描述的抛物型问题,

会较 FEM和EFG法更节省计算量.从而凸显了该方法易于推广求解三维热传导问题的优势.

表3 不同方法在总粒子数 N (网格节点)下,平均每步所需的 CPU时间(s)对比

数值方法	$N = 21 \times 21$	$N = 41 \times 41$	$N = 81 \times 81$
FO-SSPH	0.082	0.335	3.812
EFG	0.952	23.210	1223.322
FEM	0.470	18.561	999.211

4.2. 非线性热传导问题的数值研究

实际的传热问题,对应的瞬态热传导方程普遍为非线性形式(即(5)式中参数 β_x, γ_x 不同时等于零).非线性瞬态热传导问题的准确解很难用解析法得到^[20],且用基于网格的数值方法求解也不易.传热过程中由于非线性项的影响,在达到稳定状态时温度分布会出现“凹”、“凸”奇异现象.

本节将利用 FO-SSPH 法对一维非线性热传导问题进行研究,并讨论导热系数对奇异现象的影

响.数值算例中包括与 FEM, EFG 数值结果的比较,以说明非线性瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型预测不同参数下出现“凹”、“凸”奇异现象的可靠性.

考虑无量纲的一维非线性瞬态热传导问题

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left((\theta_x + \beta_x T + \gamma_x T^2) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (26)$$

初始和边界条件分别为 $T(x, 0) = 0, T(0, t) = 0, T(1, t) = 1$. 当 $\beta_x = \gamma_x = 0$ 时,为线性问题(20).数值模拟中取定 $\rho c_p = 1, \theta_x = 1, 101$ 个粒子, $d_0 = 0.01$, 光滑长度 $h = 0.9d_0$, 时间步长 $dt = 10^{-4}$.

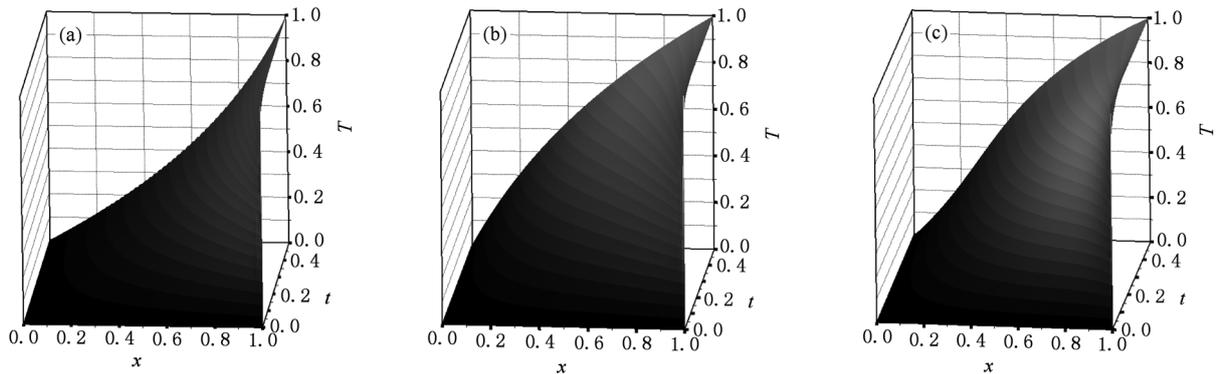


图6 非线性情况下温度随时间变化过程的 FO-SSPH 模拟结果 (a) $\beta_x = -1, \gamma_x = 0.3$; (b) $\beta_x = \gamma_x = 1$; (c) $\beta_x = -2, \gamma_x = 3$

图6给出了几种非线性情况下温度随时间变化过程的 FO-SSPH 数值模拟结果.从图6和图1分析中可以得知:1) 非线性与线性情况下温度变化达到稳定状态所需时间基本一致 ($t \approx 0.5$),即温度变化达到稳态所需的时间与导热系数关系不大;2) 温度分布趋近稳态时,非线性情况下温度分布出现

“凹”或“凸”的奇异现象,意味此时无限长单位平板上的温度高于或低于线性情况(两端点除外);3) 导热系数参数的选择对稳态时的温度分布有重要影响;4) 非线性情况下,达到稳态时温度分布更加复杂.

为验证非线性热传导 FO-SSPH 离散模型预测

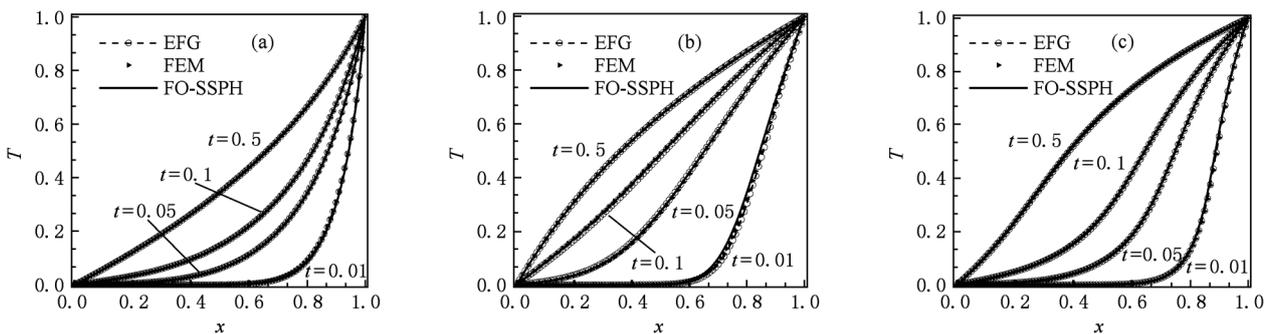


图7 非线性情况下温度在不同时刻的数值结果对比 (a) $\beta_x = -1, \gamma_x = 0.3$; (b) $\beta_x = \gamma_x = 1$; (c) $\beta_x = -2, \gamma_x = 3$

复杂非线性情况下温度变化的可靠性和有效性,图7给出了几种非线性情况下温度在不同时刻的三种数值结果对比.由图7可以清晰地看到,不同非线性情况、不同时刻 FO-SSPH 法得到的数值结果均与

FEM, EFG 法得到的结果符合.

上述所有结果表明,本文提出的 FO-SSPH 离散格式为模拟线性或非线形传热问题提供了一种可靠和有效的模型,特别对发现新的传热现象给出了

一种比传统 SPH 更可靠,且比 CSPM, MSPH 更灵活的数值模拟方法.

5. 结 论

本文将具有二阶导数的热传导偏微分抛物型方程分解成两个一阶导数偏微分方程,然后基于 Taylor 级数展开思想,对传统 SPH 一阶导数离散格式进行修正,并将得到的局部矩阵对称化,提出了模拟瞬态热传导问题的 FO-SSPH 离散模型.通过对线性或非线性瞬态热传导问题的数值模拟,以及与解析解或其他数值结果的比较得到如下结论:

1. FO-SSPH 模型很好地改善了传统 SPH 模型的精度和数值稳定性,且与 CSPM, MSPH 或 FPM 法相比,具有计算效率高、应用灵活等优点;

2. 二维瞬态热传导 FO-SSPH 模型能直接准确地施加 Dirichlet 和 Neumann 边界条件,且其数值结

果与 FEM, EFG 数值结果符合很好;

3. 瞬态热传导 FO-SSPH 离散模型具有二阶精度,且该方法比传统 FEM, EFG 方法的计算效率更高,灵活性和普适性更好;

4. 本文提出的 FO-SSPH 离散模型能准确、有效地预测非线性热传导问题在达到稳态时温度分布出现的“凹”或“凸”的奇异现象.

值得注意的是,目前未有任何文献运用纯粒子类方法求解非线性瞬态热传导问题,本文针对瞬态热传导问题的求解以及非线性情况下温度分布奇异现象的预测,给出了一种有效的粒子方法.并且,本文针对瞬态热传导问题给出的 FO-SSPH 离散模型较传统 SPH 模型更为准确,较已有改进 SPH 模型更具自身优势,较 FEM, EFG 更具灵活性,它为传热现象的预测提供了一个非常可靠的数值方法,并为求解混合边值问题的求解提供了一个有效的粒子方法.

- [1] Wang J F, Sun F X, Cheng R J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060201
- [2] Lopez H, Sigalotti L D G 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051201 - 1
- [3] Lewis R W, Nithiarasu P, Seetharamu K N 2004 *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow* (Chichester: John Wiley)
- [4] Zhong C W, Xie J F, Zhuo C S, Xiong S W, and Yin D C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4083
- [5] Zhang D H, Liu F G, Zhang J C, Rui X F 2010 *Chin. J. Comp. Phys.* **27** 699 (in Chinese) [张东辉、刘方贵、张金存、芮孝芳 2010 计算物理 **27** 699]
- [6] Wang J F, Sun F X, Cheng R J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060201
- [7] Cheng R J, Cheng Y M, Ge H X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4059
- [8] Gingold R A, Monaghan J J 1977 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **181** 375
- [9] Lucy L B 1977 *Astron. J.* **82** 1013
- [10] Liu M B, Liu G R 2010 *Archives of Computational Methods in Engineering* **17** 25
- [11] Jeong J H, Jhon M S, Halow J S, Osdol J V 2003 *Computer Phys. Comm.* **153** 71
- [12] Cheng R J, Ge H X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090201
- [13] Chen J K, Beraun J E, Carney T C 1999 *Int. J. Num. Meth. Eng.* **46** 231
- [14] Zhang G M, Batra R C 2004 *Comp. Mech.* **34** 137
- [15] Liu M B, Xie W P, Liu G R 2005 *Appl. Math. Model.* **29** 1252
- [16] Bonet J, Lok T S L 1999 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **180** 97
- [17] Liu M B, Chang J Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3654 (in Chinese) [刘谋斌、常建忠 2010 物理学报 **59** 3654]
- [18] Liu M B, Liu G R 2006 *Appl. Num. Math.* **56** 19
- [19] Zhang X H, Ouyang J, Zhang L 2010 *Int. J. Heat Mas Transfer* **52** 2161
- [20] Holman J P 2002 *Heat Transfer*, ninth ed. (Singapore: McGraw-Hill)
- [21] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed Particle Hydrodynamics; A Mesh-free Particle Method* (Singapore: World Scientific)
- [22] Jiang T, Ouyang J, Zhao X K, Ren J L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** (in Chinese) [蒋涛、欧阳洁、赵晓凯、任金莲 2011 物理学报 **60**]
- [23] Lewis R W, Nithiarasu P, Seetharamu K N 2004 *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow* (Chichester: Wiley)

The first order symmetric SPH method for transient heat conduction problems^{*}

Jiang Tao Ouyang Jie[†] Li Xue-Juan Zhang Lin Ren Jin-Lian

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 21 November 2010; revised manuscript received 18 December 2010)

Abstract

In order to improve the accuracy and the stability of the conventional smoothed particle hydrodynamics (SPH) method for simulating the transient heat conduction problems, a first order symmetric smoothed particle hydrodynamics (FO-SPH) method is proposed. In order to solve the heat conduction problem with second derivative, the proposed FO-SSPH method is first to decompose the problem into two first order partial differential equations (PDEs), and then the first order kernel gradient is corrected based on the discretization of gradient and the concept of Taylor series. Finally, the obtained local matrix is locally symmetrized. All the numerical results demonstrate that the FO-SSPH possesses a higher accuracy and better stability than the SPH method, that the mixed boundary conditions can be well imposed using FO-SSPH method, and that the reliability and the flexibility of the FO-SSPH method can also be observed for PDEs with multi-boundary conditions. Finally, the one-dimensional nonlinear heat conduction problem is investigated by the FO-SSPH method, and the phenomena of concave and bulge are observed when the temperature achieves the stable state, in which the influence of the coefficients for heat flux is discussed.

Keywords: transient heat conduction, SPH, non-linear

PACS: 02. 60.- x, 02. 70.- c, 44. 10.+ i

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10871159).

[†] Corresponding author. E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn