

## 原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性\*

卢道明<sup>†</sup>

(武夷学院电子工程系,武夷山 354300)

(2010年11月30日收到;2010年12月30日收到修改稿)

本文研究将两个二能级原子分别注入耦合腔 A 和 B 中,并且原子与腔场发生共振相互作用的情况.采用 Negativity 熵度量两子系统间的纠缠,利用数值计算方法研究了两个原子之间、腔内原子与腔场之间和两个腔场之间的纠缠性质.讨论了腔场间的耦合强度对纠缠特性的影响.研究表明:随腔场间耦合的增强,两原子间的纠缠增强,而原子与腔场间和两腔场间的纠缠减弱.

**关键词:** 量子光学, 二能级原子, 耦合腔, 量子纠缠

**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv

## 1. 引言

量子纠缠是量子系统独有的性质,没有经典对应.它在量子信息处理中的量子态隐形传输、量子编码、量子纠错和量子计算中具有重要的应用.因此,纠缠态制备、度量和保持一直倍受人们的关注.关于纠缠态度量已有一些描述纠缠态纠缠的物理量,如 Von-Neumann 熵、纠缠相对熵<sup>[1]</sup>、密度算符之间的距离<sup>[2]</sup>、Renyi 纠缠度<sup>[3]</sup>和共生纠缠度<sup>[4]</sup>等.至今,人们已对 Jaynes-Cummings 模型中原子与光场的纠缠特性和 Tavis-Cummings 模型中两原子的纠缠特性有了较充分的了解<sup>[5-7]</sup>.另一方面,因为腔 QED 技术是实现多比特纠缠、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术之一,人们对其已进行了大量研究,提出了许多利用原子与腔场相互作用系统进行量子态制备和传送的方案<sup>[8,9]</sup>,也对其纠缠特性进行了研究<sup>[10,11]</sup>.近年来,人们对原子与耦合腔相互作用系统也进行了研究<sup>[12-15]</sup>.例如,Zheng 等人提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统产生双模压缩态的方案<sup>[16]</sup>.本文研究将两个二能级原子分别注入耦合腔 A 和 B 中,并且原子与腔场发生共振相互作用的情况.采用 Negativity 熵来度量两子系统间的纠缠,利用数值计算方法研究了两个原子之间、腔内原子与腔场之间和两个腔场之间的纠缠性质.

## 2. 理论模型

如图 1 所示,将两个二能级原子(原子 1 和原子 2)分别注入初始处于真空态的耦合腔 A 和 B 中,并且原子与腔场发生共振相互作用.在旋波近似下,在相互作用表象中系统的哈密顿为

$$H_I = f_1(a_A s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_2(a_B s_2^+ + a_B^+ s_2^-) + J(a_A a_B^+ + a_A^+ a_B). \quad (1)$$

式中  $a_A^+, a_A, a_B^+, a_B$  分别为腔场的产生和湮没算符,  $s_i^+$  和  $s_i^-$  ( $i = 1, 2$ ) 为第  $i$  个原子的赝自旋算符.  $f_1, f_2$  分别表示两个腔中原子与腔场的耦合系数,  $J$  为两个腔之间的耦合系数.定义激发数算符  $\hat{N} = |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| + a_A^+ a_A + a_B^+ a_B$ , 因  $[\hat{N}, H_I] = 0$ , 所以在系统演化过程中激发数守恒.  $|e_i\rangle$  和  $|g_i\rangle$  ( $i = 1, 2$ ) 分别表示原子的激发态和基态.

假设初始时刻,原子 1 处于激发态,原子 2 处于基态,腔场 A 和腔场 B 均处于真空态,那么整个系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = |e_1\rangle |g_2\rangle |0_A\rangle |0_B\rangle. \quad (2)$$

在演化过程中,系统将保留在以

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= |e_1\rangle |g_2\rangle |0_A\rangle |0_B\rangle, \\ |\varphi_2\rangle &= |g_1\rangle |g_2\rangle |1_A\rangle |0_B\rangle, \\ |\varphi_3\rangle &= |g_1\rangle |g_2\rangle |0_A\rangle |1_B\rangle, \end{aligned}$$

\* 福建省自然科学基金(批准号:2008J0217)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: daominglu79@hotmail.com

$|\varphi_4\rangle = |g_1\rangle |e_2\rangle |0_A\rangle |0_B\rangle$  为基矢构成的子空间中. 在这子空间中, 系统的哈密顿的矩阵表示为

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & J & 0 \\ 0 & J & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其本征值为

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \pm \alpha, \\ E_{3,4} &= \pm \beta, \\ \alpha &= 2^{-1/2} \{f_1^2 + f_2^2 + J^2 + [(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}\}^{1/2}, \\ \beta &= 2^{-1/2} \{f_1^2 + f_2^2 + J^2 - [(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}\}^{1/2}. \end{aligned}$$

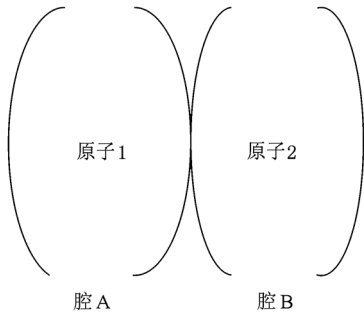


图1 系统的框图

相应的本征态为

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= P_1 \left( \frac{Jf_1}{\alpha^2 - f_1^2} |\varphi_1\rangle + \frac{\alpha J}{\alpha^2 - f_1^2} |\varphi_2\rangle \right. \\ &\quad \left. + |\varphi_3\rangle + \frac{f_2}{\alpha} |\varphi_4\rangle \right), \\ |\psi_2\rangle &= P_2 \left( \frac{Jf_1}{\alpha^2 - f_1^2} |\varphi_1\rangle - \frac{\alpha J}{\alpha^2 - f_1^2} |\varphi_2\rangle \right. \\ &\quad \left. + |\varphi_3\rangle - \frac{f_2}{\alpha} |\varphi_4\rangle \right), \\ |\psi_3\rangle &= P_3 \left( \frac{Jf_1}{\beta^2 - f_1^2} |\varphi_1\rangle + \frac{\beta J}{\beta^2 - f_1^2} |\varphi_2\rangle \right. \\ &\quad \left. + |\varphi_3\rangle + \frac{f_2}{\beta} |\varphi_4\rangle \right), \\ |\psi_4\rangle &= P_4 \left( \frac{Jf_1}{\beta^2 - f_1^2} |\varphi_1\rangle - \frac{\beta J}{\beta^2 - f_1^2} |\varphi_2\rangle \right. \\ &\quad \left. + |\varphi_3\rangle - \frac{f_2}{\beta} |\varphi_4\rangle \right). \end{aligned} \quad (4)$$

上式中  $P_j$  为归一化常数. 在(2)式表示的初态情况

下, 任意时刻  $t$  系统的态矢为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= C |\varphi_1\rangle + D |\varphi_2\rangle + F |\varphi_3\rangle + G |\varphi_4\rangle, \\ C &= \frac{Jf_1}{[(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}} \\ &\quad \times \left[ \frac{Jf_1}{\alpha^2 - f_1^2} \cos(\alpha t) - \frac{Jf_1}{\beta^2 - f_1^2} \cos(\beta t) \right], \\ D &= \frac{-iJf_1}{[(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}} \\ &\quad \times \left[ \frac{\alpha J}{\alpha^2 - f_1^2} \sin(\alpha t) - \frac{\beta J}{\beta^2 - f_1^2} \sin(\beta t) \right], \\ F &= \frac{Jf_1}{[(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}} \\ &\quad \times [\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)], \\ G &= \frac{-iJf_1}{[(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}} \\ &\quad \times \left[ \frac{f_2}{\alpha} \sin(\alpha t) - \frac{f_2}{\beta} \sin(\beta t) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. 原子与原子间纠缠的演化

采用 Negativity 熵来描述两子系统间的纠缠<sup>[17]</sup>, 即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两个子系统, 其纠缠可用部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值来定义

$$N = -2 \sum_i \lambda_i. \quad (6)$$

式中  $\lambda_i$  是部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值.  $N = 0$  表示两子系统是分离的;  $N = 1$  表示两子系统处于最大纠缠态;  $0 < N < 1$  表示两子系统是纠缠的. 利用(5)式, 对腔场 A 和腔场 B 的态求迹, 以  $|e_1\rangle |e_2\rangle$ ,  $|e_1\rangle |g_2\rangle$ ,  $|g_1\rangle |e_2\rangle$ ,  $|g_1\rangle |g_2\rangle$  为基矢, 可得到原子 1 和原子 2 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & CG^* & 0 \\ 0 & GC^* & |G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |D|^2 + |F|^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

利用(7)式可得到原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$\begin{aligned} N_{12} &= \sqrt{(|D|^2 + |F|^2)^2 + 4|CG|^2} \\ &\quad - (|D|^2 + |F|^2). \end{aligned} \quad (8)$$

利用(8)式, 可以计算出原子 1 和原子 2 间的纠缠量  $N_{12}$  随时间的演化. 为简单起见, 设  $f_1 = f_2 = f$ . 两个腔之间的耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f, 4f$  时, 纠缠量  $N_{12}$  随时间的演化如下图 2 所示. 从图中可以看出: 原子 1 和原子 2 间的纠缠量  $N_{12}$  随时间作

不规则振荡. 图 2(a) 和 (b) 曲线显示腔场间的耦合较弱时出现消纠缠现象, 并且随腔场间的耦合的增强, 出现消纠缠的时间缩短. 另一方面, 随腔场间的

耦合的增强, 曲线重心缓慢上升, 纠缠量的平均值增大, 表明原子间的纠缠随腔场间的耦合的增强而增强.

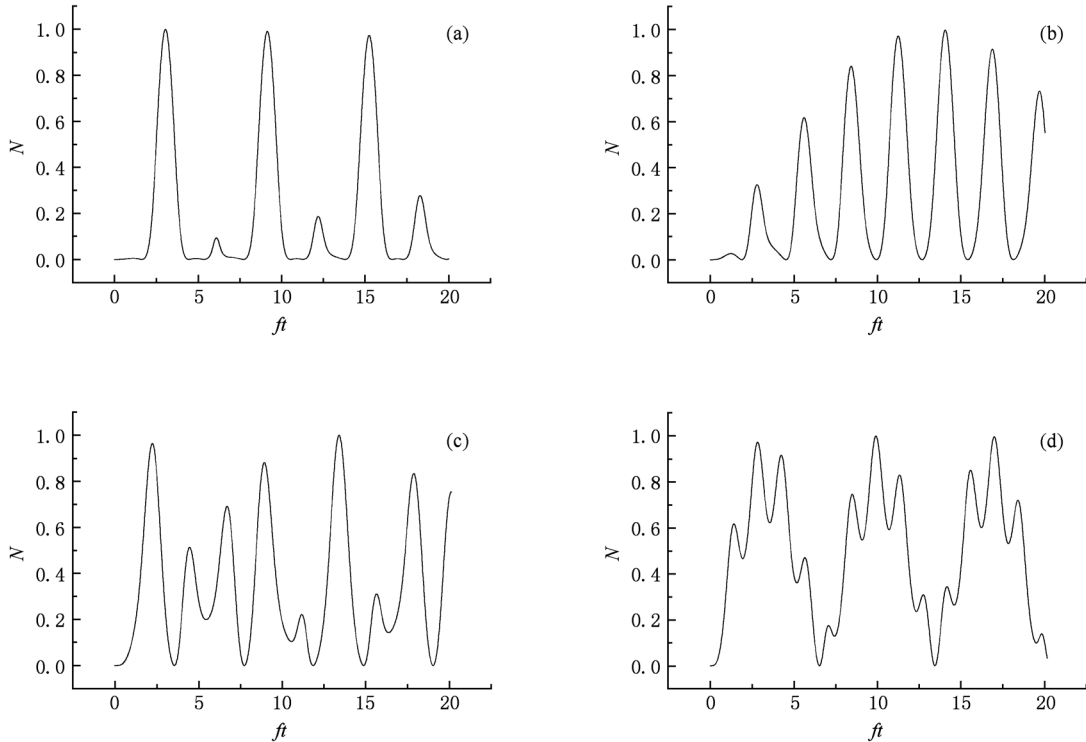


图 2 原子 1 与原子 2 间纠缠量  $N_{12}$  随时间的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2.0f$ ; (d)  $J = 4.0f$

#### 4. 腔场 A 与腔场 B 间纠缠的演化

腔场 A 与 B 间的纠缠仍然采用 Negativity 熵来描述. 利用(5)式, 对原子 1 和原子 2 的态求迹, 以  $|1\rangle_A |1\rangle_B$ ,  $|1\rangle_A |0\rangle_B$ ,  $|0\rangle_A |1\rangle_B$ ,  $|0\rangle_A |0\rangle_B$  为基矢, 可得到腔 A 和腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |D|^2 & DF^* & 0 \\ 0 & FD^* & |F|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |G|^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

通过计算可得到腔 A 和腔 B 间的纠缠量为

$$N_{AB} = \left( \sqrt{(|C|^2 + |G|^2)^2 + 4|DF|^2} - (|C|^2 + |G|^2) \right). \quad (10)$$

同样, 取  $f_1 = f_2 = f$ . 两个腔之间的耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f, 4f$  时腔 A 与腔 B 间的纠缠量  $N_{AB}$  随时间的演化, 如图 3 所示. 从图中可以看出: 纠缠量  $N_{AB}$  随时间作不规则振荡, 振荡频率随腔场间的耦合的增强而增大. 另一方面, 随腔场间的耦合的增

强, 曲线峰值下降, 曲线重心下移和纠缠量的平均值减小. 表明随腔场间的耦合的增强, 腔场 A 与腔场 B 间的纠缠减弱.

#### 5. 原子与腔场间纠缠的演化

原子 1 与腔场 A 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述. 利用(5)式, 对原子 2 和腔场 B 的态求迹, 以  $|e\rangle_1 |1\rangle_A$ ,  $|e\rangle_1 |0\rangle_A$ ,  $|g\rangle_1 |1\rangle_A$ ,  $|g\rangle_1 |0\rangle_A$  为基矢, 可得到原子 1 和腔 A 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & CD^* & 0 \\ 0 & DC^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |F|^2 + |G|^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

利用(11)式可得到原子 1 和腔场 A 间的纠缠量为

$$N_{1A} = \left( \sqrt{(|F|^2 + |G|^2)^2 + 4|CD|^2} - (|F|^2 + |G|^2) \right). \quad (12)$$

同样, 取  $f_1 = f_2 = f$ . 当两个腔之间的耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f, 4f$  时, 利用数值计算方法可得出

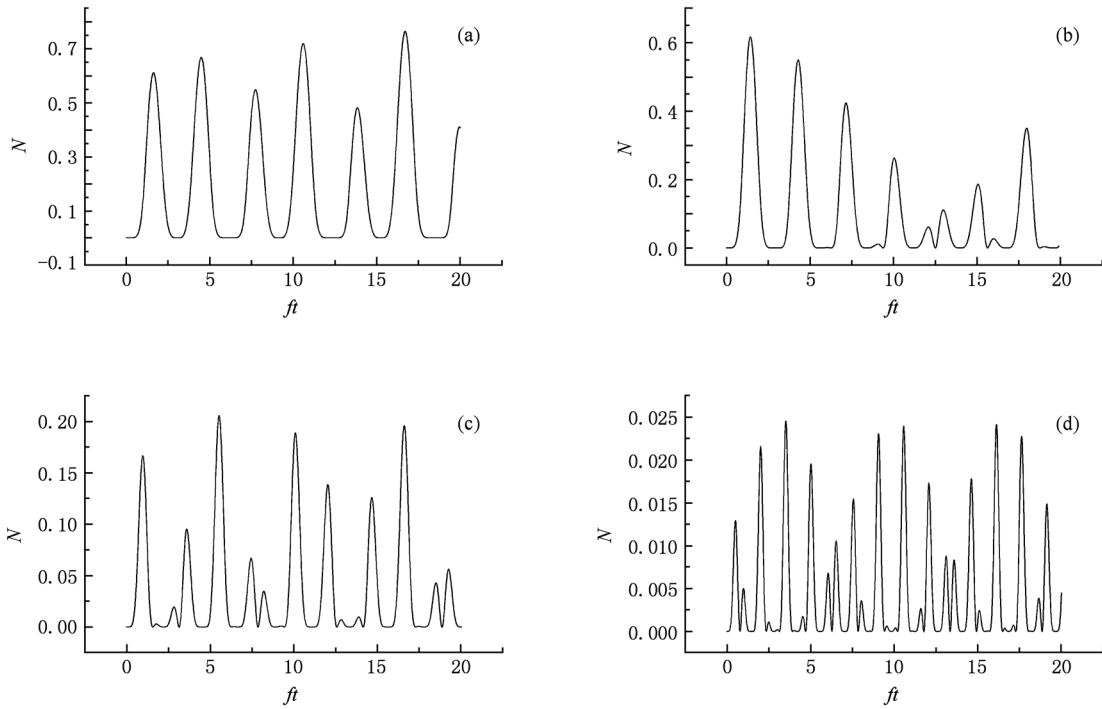


图3 腔场 A 与腔场 B 间纠缠量  $N_{AB}$  随时间的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2.0f$ ; (d)  $J = 4.0f$

原子 1 和腔场 A 间的纠缠量  $N_{1A}$  随时间的演化, 结果如下图 4 所示. 从图中可以看出: 一方面, 原子与腔场间的纠缠量作不规则振荡, 振荡频率随腔场间

耦合的增强而增大. 另一方面, 随腔场间耦合的增强, 曲线的最大值减小, 重心下移, 其平均值也减小. 表明随腔场间耦合的增强原子与腔场间的纠缠

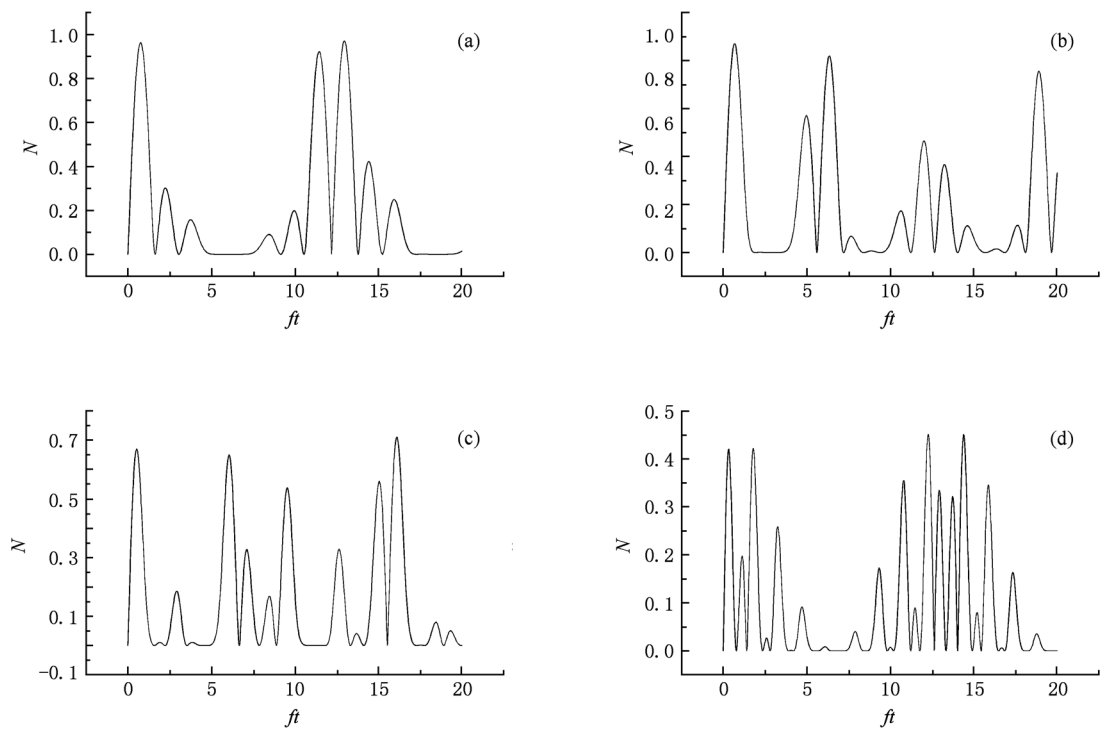


图4 原子 1 与腔场 A 间纠缠量  $N_{1A}$  随时间的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2.0f$ ; (d)  $J = 4.0f$

减弱. 进一步研究表明, 原子 2 和腔场 B 间的纠缠演化与原子 1 和腔场 A 间的纠缠演化结果一致.

概括两子系统间纠缠随腔场间耦合强度的变化, 可得出结论: 随腔场间耦合增强, 两原子间的纠缠增强, 而原子与腔场间和两腔场间的纠缠减弱. 从物理机理上看, 两个相互耦合的腔模的哈密顿可对角化为两个频率不同的没有耦合的非定域场模哈密顿<sup>[12]</sup>, 因此系统等效为两个二能级原子与独立的两个场模的非共振相互作用. 腔场间耦合增强相当于系统的失谐量增加, 因而场模被激发的可能性降低, 导致原子与场模间和场模间的纠缠减弱. 另一方面, 随腔场间耦合增强, 初始的激发子由两原子分享的可能性增加, 导致两原子间的纠缠增强.

## 6. 结 论

本文研究了将两个二能级原子分别注入耦合腔 A 和 B 中, 并与光场发生共振相互作用的情况. 利用 Jaynes-Cummings 模型给出了系统态矢的演化. 运用 Negativity 熵来描述两个子系统间的纠缠, 采用数值计算方法给出了两个原子之间、两个腔场之间和原子与腔场之间的纠缠量随规范时间  $ft$  的演化曲线. 讨论了耦合腔的耦合系数的变化对纠缠演化的影响. 研究表明: 随耦合腔的耦合系数增大, 两原子间的纠缠增强, 而原子与腔场间和两腔场间的纠缠减弱.

- 
- [1] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
  - [2] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
  - [3] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
  - [4] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
  - [5] Kim M S, Lee J Y, Ahn D 2002 *Phys. Rev. A* **65** 040101
  - [6] Shan C J, Xia Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1585 (in Chinese) [单传家、夏云杰 2006 物理学报 **55** 1585]
  - [7] Zhang Y J, Zhou Y, Xia Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 21 (in Chinese) [张英杰、周原、夏云杰 2008 物理学报 **57** 21]
  - [8] Zhan Z M, Yang W X, Li J H 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 846
  - [9] Yang Z B 2007 *Chin. Phys.* **16** 329
  - [10] Zhang J S, Xu J B 2009 *Optics Communications* **282** 3652
  - [11] Cardoso W B, Avelar A T, Baseia B, Almeida N G 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 195507
  - [12] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063805
  - [13] Hartmann M J, Brandao F G S L, Plenio M B 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160501
  - [14] Zheng S B, Yang C P, Nori F 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042327
  - [15] Zheng S B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 064204
  - [16] Zheng S B, Yang Z B, Xia Y 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015804
  - [17] Zou Y 2009 *Chin. J. Quantum Electronics* **26** 69 (in Chinese) [邹艳 2009 量子电子学报 **26** 69]

# Entanglement properties in the system of atoms interacting with coupled cavities<sup>\*</sup>

Lu Dao-Ming<sup>†</sup>

(*Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China*)

(Received 30 November 2010; revised manuscript received 30 December 2010)

## Abstract

We study the entanglement dynamics of the system composed of two two-level atoms resonantly interacting with two coupled cavities. The evolutions of atom-atom entanglement, cavity-cavity entanglement and atom-cavity entanglement are investigated. The influence of coupling constant between cavities on entanglement property is discussed. The numerical results show that atom-atom entanglement property is strengthened while atom-cavity entanglement property and cavity-cavity entanglement property are weakened with the increasing of the coupling constant between cavities.

**Keywords:** quantum optics, two-level atom, coupling cavities, quantum entanglement

**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2008J0217).

<sup>†</sup> E-mail: daominglu79@hotmail.com