

一类准周期参激非线性相对转动动力系统的稳定性与时滞反馈控制*

时培明^{1)†} 李纪召¹⁾ 刘彬¹⁾ 韩东颖²⁾

1)(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

2)(燕山大学车辆与能源学院, 秦皇岛 066004)

(2010年9月19日收到; 2010年12月20日收到修改稿)

建立了一类含准周期参数激励和时滞反馈的相对转动非线性系统的动力学方程. 采用多尺度法求解 1/2 亚谐波主参数共振下的分岔响应方程, 并分析了系统的稳定性. 在求解非受控系统的定常解的基础上, 通过讨论系统的动力学特性, 研究了准周期参数激励对系统响应的影响. 采用时滞反馈控制的方法对系统分岔和极限环(域)进行控制, 数值模拟的结果表明通过改变时滞参数可以实现对系统分岔的控制, 并能有效地控制极限环(域)的幅值和稳定性.

关键词: 相对转动, 准周期参激, 时滞反馈, 极限环

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

1. 引言

转动运动是自然界中最普遍的运动之一. 在研究转动运动的过程中, Carmeli 于 1985 年提出了转动相对论力学理论^[1,2], Luo 于 1996 年建立了转动相对论分析力学理论, 并构建了转动相对论系统分析力学的基本理论框架^[3-7]. 转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论、对称性理论、积分的场方法、代数结构、几何理论、积分不变量及平衡稳定性等的研究取得了进展^[8-13]. 基于相对性原理, 人们建立了弹性转轴任意两横截面间的相对转动线性和非线性动力学方程^[14]. 研究了含非线性刚度和非线性阻尼的相对转动系统的混沌运动^[15]及其在谐波激励下的动力学特性^[16]. Belhaq 等用双摄动法分析了含有阻尼和非线性刚度的准周期 Mathieu 方程的稳定性^[17,18]. 近年来, 利用时滞反馈的方法来控制动力系统的行为, 取得了一些成果. Maccari 研究了含有时滞反馈的 Van der Pol 振子系统的参激振动^[10,20]. 祁伟等研究了用多延迟反馈控制方法对时滞系统的控制^[21].

相对转动系统是工程中广泛存在的动力传递

系统, 文献[14, 15]对两惯量相对转动系统做了一些分析和研究. 以往的关于参激的相对转动系统的研究中, 主要集中在单周期参激相对转动系统^[22]. 但实际工程物理结构中, 往往同时存在双周期参数激励, 表现为准周期特性. 本文建立了一类含准周期参激刚度、非线性摩擦阻尼和时滞反馈的相对转动非线性动力学方程. 应用多尺度法给出了准周期参激非线性系统的近似解, 分析了该系统的分岔特性及定常解的稳定性. 针对系统的分岔特性, 采用时滞反馈的控制方法对系统进行控制. 通过数值模拟证明改变时滞参数可以改变系统的分岔性质, 控制系统的极限环(域).

2. 准周期参激相对转动非线性动力学方程

在文献[22]的基础上考虑准周期参激刚度, 即

$$K = K_0(1 + \rho' \cos(\nu t) + h' \cos(\Omega t)), \quad (1)$$

其中, ν 为与系统固有频率相关的共振频率, Ω 为缓变频率, ρ' , h' 为刚度的变动幅值, K 为系统的扭转刚度, K_0 为等效刚度. 采用文献[14, 15]所用的推

* 国家自然科学基金(批准号: 51005196)和河北省自然科学基金(批准号: F2010001317)资助的课题.

† E-mail: spm@ysu.edu.cn

导方法可得到动力学方程

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_0(1 + \rho' \cos(\nu t)) + h' \cos(\Omega t)(\theta_1 - \theta_2) = F_1, \quad (2)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K_0(1 + \rho' \cos(\nu t)) + h' \cos(\Omega t)(\theta_1 - \theta_2) = F_2, \quad (3)$$

其中, J_1, J_2 为相对转动系统集中质量的转动惯量, $\theta_i (i = 1, 2)$ 分别为两个集中质量的转角, $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 分别为两个集中质量的转速, F_1, F_2 分别是两个集中质量的外加力矩. $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 分别为系统集中质量的角加速度.

对于相对转动动力系统, 考虑相对转角变化, 由(2)式乘以 $\frac{1}{J_1}$ 减去(3)式乘以 $\frac{1}{J_2}$ 得到

$$\ddot{x} + \omega^2 x + f(\dot{x}) + \omega^2(\rho' \cos(\nu t)) + h' \cos(\Omega t)x = F(t), \quad (4)$$

其中, $x = \theta_1 - \theta_2, \dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2, \alpha = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}, \omega^2 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} K_0, F(t) = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 F_1 - J_1 F_2)$.

考虑一类非线性摩擦阻尼, 令 $f(\dot{x}) = -\alpha \dot{x} + \beta \dot{x}^3, \alpha, \beta$ 均大于 0. 仅考虑准周期参数激励作用, 令外扰激励 $F(t) = 0, \omega^2 \rho' = \rho, \omega^2 h' = h$, 则(4)式变为

$$\ddot{x} + \omega^2 x + (\rho \cos(\nu t) + h \cos(\Omega t))x - \alpha \dot{x} + \beta \dot{x}^3 = 0, \quad (5)$$

其中, ω 表示系统的固有频率. 上式就是一类含准周期参激刚度和非线性摩擦的相对转动非线性动力学方程. 当采用时滞反馈对准周期参激相对转动非线性系统的动力学行为进行控制时, 含时滞反馈控制项的受控系统为

$$\ddot{x} + \omega^2 x + (\rho \cos(\nu t) + h \cos(\Omega t))x - \alpha \dot{x} + \beta \dot{x}^3 = g_1 x(t - H) + g_2 \dot{x}(t - H), \quad (6)$$

其中, H 为时滞量, g_1 和 g_2 为增益系数, g_1 和 g_2 大于 0 为正反馈, g_1 和 g_2 小于 0 为负反馈.

3. 受控准周期参激系统的分岔响应方程

引入摄动参数 ε , 对时滞准周期参激非线性受控系统进行分析. 将方程(6)中的参数改写为 $\rho = \varepsilon \tilde{\rho}, h = \varepsilon \tilde{h}, \alpha = \varepsilon \tilde{\alpha}, \beta = \varepsilon \tilde{\beta}, \Omega = \varepsilon^p \tilde{\Omega}, \tau = \varepsilon^p t, g_1 = \varepsilon \tilde{g}_1, g_2 = \varepsilon \tilde{g}_2$. 则方程(6)可以表示为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon [(\tilde{\rho} \cos(\nu t) + \tilde{h} \cos(\tilde{\Omega} \tau))x - \tilde{\alpha} \dot{x} + \tilde{\beta} \dot{x}^3 - \tilde{g}_1 x(t - H) - \tilde{g}_2 \dot{x}(t - H)]. \quad (7)$$

采用多尺度法^[23-25], 设方程(7)的摄动解形式为

$$x(t) = x_0(T_0, T_1, \tau) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \tau) + \dots \quad (8)$$

其中, $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 为慢变时间尺度, $\tau = \varepsilon^p t$ 为缓变时间尺度. 分析系统在 1/2 亚谐波共振情况下的动力学行为, 设 $\nu = 2\omega + \sigma$, 这里 $\sigma = \varepsilon \tilde{\sigma}$ 为调谐参数.

将(8)式代入(7)式, 可得到各阶近似的线性偏微分方程组

$$D_0^2 x_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad (9)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - x_0(\tilde{\rho} \cos(\nu T_0) + \tilde{h} \cos(\tilde{\Omega} \tau)) + \tilde{\alpha} D_0 x_0 - \tilde{\beta} (D_0 x_0)^3 + \tilde{g}_1 x_0(t - H) + \tilde{g}_2 D_0 x_0(t - H), \quad (10)$$

其中, 微分算子 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, n = 0, 1, \dots$. 设方程(9)的复数形式解为

$$x_0(T_0, T_1, \tau) = A(T_1, \tau) e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1, \tau) e^{-i\omega T_0}, \quad (11)$$

其中, $A(T_1, \tau)$ 和 $\bar{A}(T_1, \tau)$ 为共轭函数且均为关于 T_1 的函数. 将(11)式代入(10)式可以得到

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = \left[-2i\omega D_1 A - \frac{\tilde{\rho}}{2} \bar{A} e^{i\tilde{\sigma} T_1} - \tilde{h} A \cos(\tilde{\Omega} \tau) + i\omega \tilde{\alpha} A - 3i\omega^3 \tilde{\beta} A^2 \bar{A} + \tilde{g}_1 A(\cos\omega H - i\sin\omega H) + \tilde{g}_2 \omega A(\sin\omega H + i\cos\omega H) \right] e^{i\omega T_0} + \left[-\frac{\tilde{\rho}}{2} A e^{i\tilde{\sigma} T_1} + i\omega^3 \tilde{\beta} A^3 \right] \times e^{3i\omega T_0} + cc, \quad (12)$$

其中, (12)式中 cc 项表示等式右端各项的共轭复数部分. 消除久期项, 令

$$2i\omega D_1 A = -\frac{\tilde{\rho}}{2} \bar{A} e^{i\tilde{\sigma} T_1} - \tilde{h} A \cos(\tilde{\Omega} \tau) + i\omega \tilde{\alpha} A - 3i\omega^3 \tilde{\beta} A^2 \bar{A} + \tilde{g}_1 A(\cos\omega H - i\sin\omega H) + \tilde{g}_2 \omega A(\sin\omega H + i\cos\omega H). \quad (13)$$

将复函数 A 写为指数形式, 即 $A = \frac{1}{2}ae^{i\theta}$. 其中, a 和 θ 为关于 T_1 的实函数. 函数 A 满足微分方程 $\frac{dA}{dT_1} = (D_0 + \varepsilon D_1)A$. 其中, $D_0A = 0$. D_1A 可由 (13) 式求出, 则

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dT_1} = & -\frac{i\varepsilon}{2\omega} \left(-\frac{\tilde{\rho}}{2}\bar{A}e^{i\tilde{\sigma}T_1} - \tilde{h}A\cos(\tilde{\Omega}T) \right. \\ & + i\omega\tilde{\alpha}A - 3i\omega^3\tilde{\beta}A^2\bar{A} \\ & + \tilde{g}_1A(\cos\omega H - i\sin\omega H) \\ & \left. + \tilde{g}_2\omega A(\sin\omega H + i\cos\omega H) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

将 $A = \frac{1}{2}ae^{i\theta}$ 代入 (14) 式, 得到极坐标下的平均方程

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} = & -\frac{\varepsilon\tilde{\rho}}{4\omega}a\sin(\tilde{\sigma}T_1 - 2\theta) + \frac{\varepsilon\tilde{\alpha}}{2}a - \frac{3}{8}\varepsilon\tilde{\beta}\omega^2a^3 \\ & - \frac{\varepsilon\tilde{g}_1}{2\omega}\sin\omega H + \frac{\varepsilon\tilde{g}_2}{2}\cos\omega H, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a\frac{d\theta}{dT_1} = & \frac{\varepsilon\tilde{\rho}}{4\omega}a\cos(\tilde{\sigma}T_1 - 2\theta) + \frac{\varepsilon\tilde{h}}{2}a\cos(\tilde{\Omega}T) \\ & - \frac{\varepsilon\tilde{g}_1}{2\omega}\cos\omega H - \frac{\varepsilon\tilde{g}_2}{2}\sin\omega H. \end{aligned} \quad (16)$$

令 $\gamma = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}T_1 - \theta$, 由 $\rho = \varepsilon\tilde{\rho}$, $h = \varepsilon\tilde{h}$, $\alpha = \varepsilon\tilde{\alpha}$, $\beta =$

$\varepsilon\tilde{\beta}$, $\Omega = \varepsilon\tilde{\Omega}$, $\tau = \varepsilon\tilde{\tau}$, $g_1 = \varepsilon\tilde{g}_1$, $g_2 = \varepsilon\tilde{g}_2$, 则

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} = & -\frac{\rho}{4\omega}a\sin(2\gamma) + \frac{\alpha}{2}a - \frac{3}{8}\beta\omega^2a^3 \\ & - \frac{g_1}{2\omega}a\sin\omega H + \frac{g_2}{2}a\cos\omega H, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a\frac{d\gamma}{dT_1} = & \frac{\sigma}{2}a - \frac{\rho}{4\omega}a\cos(2\gamma) - \frac{h}{2\omega}a\cos(\Omega t) \\ & - \frac{g_1}{2\omega}a\cos\omega H - \frac{g_2}{2}a\sin\omega H. \end{aligned} \quad (18)$$

由 (17), (18) 式可得到分岔响应方程为

$$\left(\alpha_e - \frac{3}{8}\beta\omega^2a^2 \right)^2 + \left(\sigma_e - \frac{h}{2\omega}\cos(\Omega t) \right)^2 = \frac{\rho^2}{16\omega^2}, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_e = & \frac{\alpha}{2} - \frac{g_1}{2\omega}\sin\omega H + \frac{g_2}{2}\cos\omega H, \\ \sigma_e = & \frac{\sigma}{2} - \frac{g_1}{2\omega}\cos\omega H - \frac{g_2}{2}\sin\omega H. \end{aligned}$$

4. 非受控准周期参激系统的近似解及稳定性

4.1. 非受控系统的近似解

对非受控参激系统的动力学行为进行研究. 令 (17), (18) 式中的 H, g_1 和 g_2 为 0, 非受控准周期参激系统的幅频调制方程为

$$\frac{da}{dT_1} = -\frac{\rho}{4\omega}a\sin(2\gamma) + \frac{\alpha}{2}a - \frac{3}{8}\beta\omega^2a^3, \quad (20)$$

$$a\frac{d\gamma}{dT_1} = \frac{\sigma}{2}a - \frac{\rho}{4\omega}a\cos(2\gamma) - \frac{h}{2\omega}a\cos(\Omega t). \quad (21)$$

由于缓变参激项 $\cos(\Omega t)$ 的存在, 幅频调制方程是非自治的. 方程 (12) 在没有时滞反馈时的特解为

$$\begin{aligned} x_1(T_0, T_1, \tau) = & -\frac{\tilde{\rho}}{2(\omega^2 - (\nu + \omega)^2)}Ae^{i(\omega + \nu)T_0} \\ & - i\frac{\tilde{\beta}}{8}\omega A^3 e^{3i\omega T_0} + cc. \end{aligned} \quad (22)$$

将 (11), (22) 式合并, 可得到方程 (5) 的近似解为

$$\begin{aligned} x(t) = & a\cos\left(\frac{\nu}{2}t - \gamma\right) - \frac{\rho}{2(\omega^2 - (\nu + \omega)^2)} \\ & \times a\cos\left(\frac{3\nu}{2}t - \gamma\right) - \frac{\beta}{32}\omega a^3 \\ & \times \sin\left(\frac{3\nu}{2}t - 3\gamma\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (23)$$

通过 (20), (21) 式可以得到非受控参激系统的分岔响应方程

$$C_1a^4 + C_2a^2 + C_3 = 0, \quad (24)$$

其中

$$C_1 = \frac{9}{64}\beta^2\omega^4,$$

$$C_2 = -\frac{3}{8}\alpha\beta\omega^2,$$

$$C_3 = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\rho^2}{16\omega^2} + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{h}{2\omega}\cos(\Omega t)\right)^2.$$

4.2. 非受控系统的定常解及稳定性分析

根据分岔响应方程 (24), 非受控系统的定常解为

1) 零解: $a = 0$.

2) 非零解: $\alpha_{\pm}^2 = \frac{4}{3\beta\omega^2}[\alpha \pm 2\sqrt{H(t)}]$. 其中,

$H(t) = \frac{\rho^2}{16\omega^2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{h}{2\omega}\cos(\Omega t)\right)^2$. a_+ 存在时是稳定解, 而 a_- 存在时是不稳定解.

为了便于分析零解的稳定性, 将幅频调制方程转换为直角坐标方程. 下面令 $u = a\cos(\gamma)$, $v = -a\sin(\gamma)$, 代入(20), (21)式, 有

$$\frac{du}{dT_1} = \frac{\alpha}{2}u + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\rho}{4\omega}\right)v - \frac{h}{2\omega}v\cos(\Omega t) - \frac{3}{8}\beta\omega^2(u^2 + v^2)u, \quad (25)$$

$$\frac{dv}{dT_1} = \frac{\alpha}{2}v + \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{\rho}{4\omega}\right)u + \frac{h}{2\omega}u\cos(\Omega t) - \frac{3}{8}\beta\omega^2(u^2 + v^2)v. \quad (26)$$

方程(25), (26)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{2} - \lambda & \frac{\rho}{4\omega} + \frac{\sigma}{2} - \frac{h}{2\omega}\cos(\Omega t) \\ \frac{\rho}{4\omega} - \frac{\sigma}{2} + \frac{h}{2\omega}\cos(\Omega t) & \frac{\alpha}{2} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (27)$$

对应于零解的特征方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + C_3 = 0. \quad (28)$$

上式的特征值为 $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{H(t)}$. 因此有

1) $C_3 < 0$ 时, λ_1 和 λ_2 为符号相异实根, 零解为鞍点, 不稳定.

2) $C_3 > 0$ 时, 根据特征方程的判别式 $H(t)$ 来判定: (a) 如果 $H(t) > 0$, 因为 $\alpha > 0$, 零解为不稳定结点; (b) 如果 $H(t) < 0$, 则有一对共轭复根, 因为 $\alpha > 0$, 零解为不稳定焦点.

$h = 0$ 时非受控系统仅含有参激 $\rho\cos(\nu t)$, 非零解 a_{\pm}^2 为常数解. $h \neq 0$ 时非受控系统在准周期参激的作用下, 非零解 a_{\pm}^2 不再是常数解而是以 $2\pi/\Omega$ 为周期的周期解. 由近似解方程(23), 非受控系统的解为频率分别为 $\nu/2$ 和 Ω 的二周期的准周期解.

非线性摩擦阻尼项的参数取值为 $\alpha = 0.2, \beta = 0.1, \omega = 1$. 对 $h = 0$ 和 $h \neq 0$ 时的奇点分布分别如图1和图2所示. 图1和图2的区域I含不稳定焦点, 区域II含不稳定结点, 区域III含不稳定鞍点. 与图1相比, 由于缓变参激项 $\cos(\Omega t)$ 的作用, 图2中的区域I和II, II和III之间的区域发生周期簇发现象.

图3为 $h = 0$ 时参激幅值 ρ 与非零解 a 的关系曲线. 从图中可以看出, 当响应幅值 $a^2 = 8/3$, 即 $a \approx 1.633$ 时, 非零解的性质发生改变, 由不稳定解变为稳定解. 此时 $H(t) = 0$, 即曲线 $H(t) = 0$ 是所有

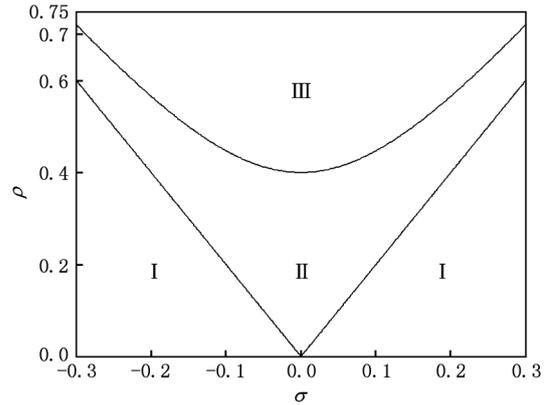


图1 $h = 0$ 时奇点的分布

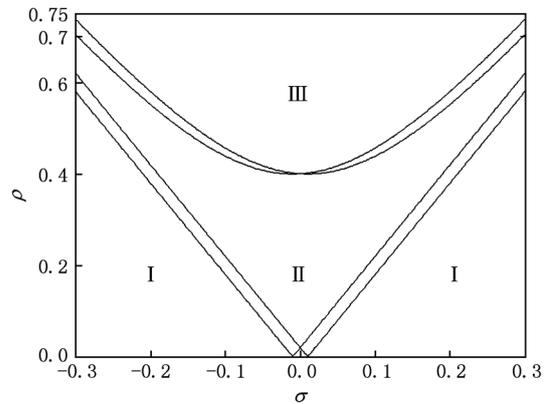


图2 $h \neq 0$ 时奇点的分布 $h = 0.01, \Omega = 0.01$

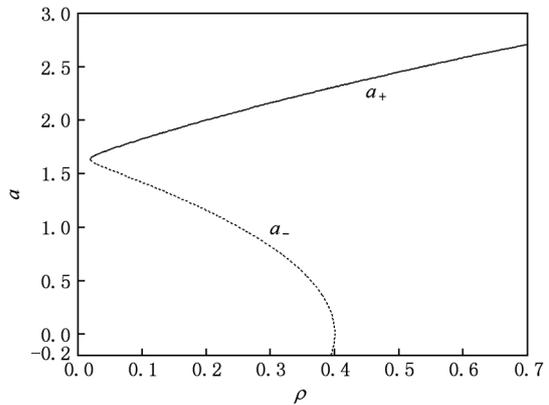


图3 ρ 与 a 的关系曲线 $\sigma = 0.01$

非零解中稳定解与不稳定解的交界线. 而且随着参激幅值 ρ 的增大, 稳定解也逐渐增大. 其中, 虚线部分为不稳定解, 实线部分为稳定解. 图4为 $h = 0$ 时不同参激幅值 ρ 下的非零解 a 与调谐参数 σ 的幅频特性曲线. 可以看出, 当 $\sigma = 0$ 时幅值达到最大. 随着参激幅值 ρ 的增大, 非零解的幅值也逐渐增大, 而且响应曲线所包含的频率区间也逐渐变大.

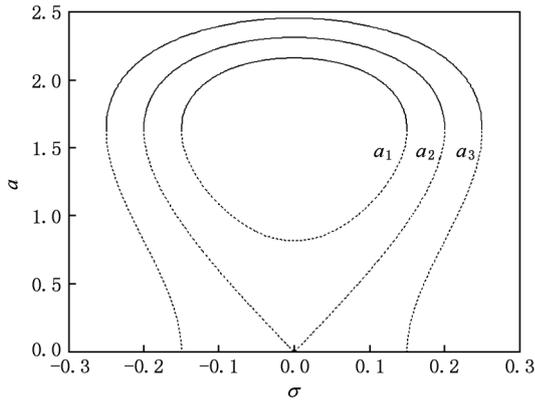


图4 不同参激幅值下的幅频特性曲线 (a_1) $\rho=0.3$, (a_2) $\rho=0.4$, (a_3) $\rho=0.5$

4.3. 非受控系统的极限环(域)

图5和图6分别是参数取值为图1中的Ⅲ区域时方程(5)的时间历程和相空间. 从图中可以看出从初始位置经过一段时间之后, 系统的响应达到一个稳定的极限环.

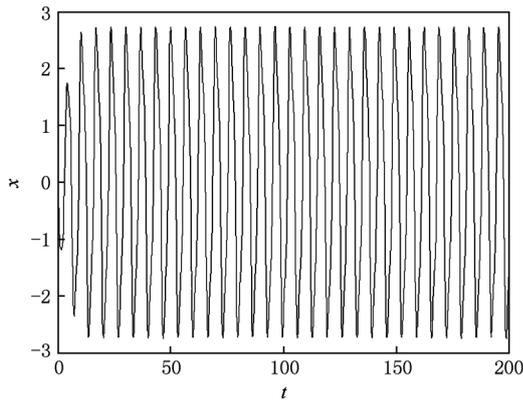


图5 非受控系统(5)的时间历程($\sigma=-0.1, \rho=0.6, \Omega=0.01, h=0.01$)

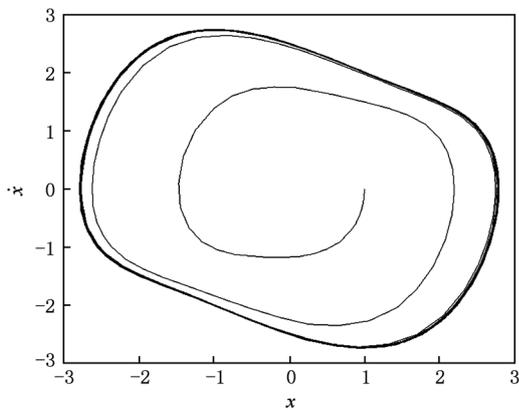


图6 非受控系统(5)的相空间($\sigma=-0.1, \rho=0.6, \Omega=0.01, h=0.01$)

图7和图8分别是参数取值为图1中远离边界的区域Ⅰ中时方程(5)的时间历程和相空间. 从图中可以看出从初始位置经过一段时间之后, 系统的响应达到一个稳定的极限环域.

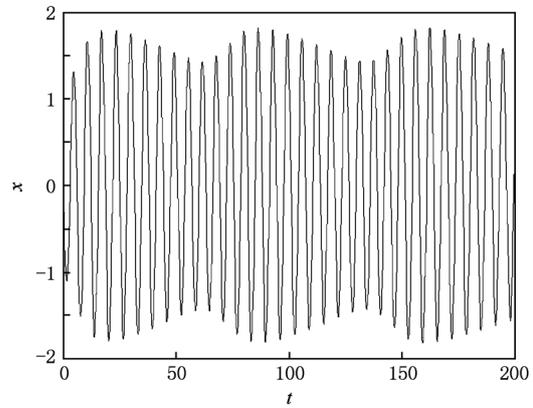


图7 非受控系统(5)的时间历程($\sigma=-0.1, \rho=0.1, \Omega=0.01, h=0.01$)

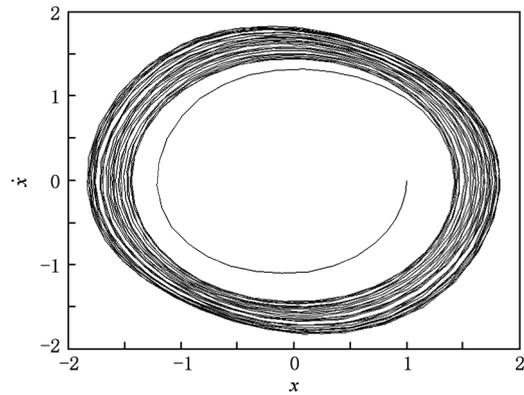


图8 非受控系统(5)的相空间($\sigma=-0.1, \rho=0.1, \Omega=0.01, h=0.01$)

5. 时滞反馈控制

5.1. $h=0$ 时对系统的鞍结分岔进行控制

对图3中的鞍结分岔进行控制. 由于系统中 α_e, σ_e 为可调参数, 即可以通过调节参数 g_1, g_2, H 来控制系统的鞍结分岔. 当 $g_1 = g_2 = 0$ 时, 为不含时滞反馈控制的非受控系统.

5.1.1. 当增益系数 g_1, g_2 固定时改变延迟量 H 的值对分岔进行控制

令 $g_1 = 0.2, g_2 = 0.1$, 图9中, 实线部分为稳定

解,虚线部分为不稳定解. 当延迟量 $H \in [\pi/2, 19\pi/24]$ 时,系统的鞍结分岔消失,没有不稳定解. 其中当 $H=2\pi/3$ 时,取得最佳控制效果. H 取其他值时则不能消除鞍结分岔,即 $[0, \pi/2)$ 和 $(19\pi/24, 2\pi]$ 为延迟量的较差取值区间. 其中当 $H=5\pi/3$ 时,控制效果最差. 这表明,当延迟量取合适值时,会取得较好的控制效果;然而,如果延迟量取值不当,反而会使原系统更加不稳定.

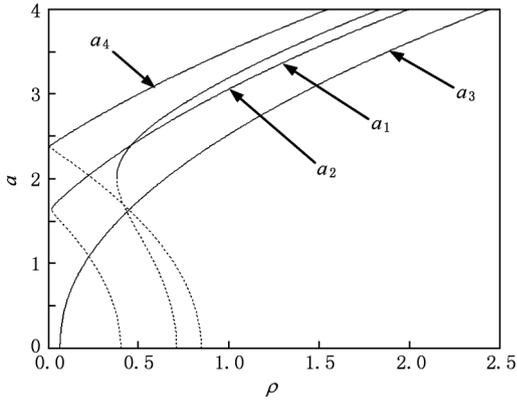


图9 延迟量 H 不同的分岔曲线 ($g_1 = 0.2, g_2 = 0.1, \sigma = 0.01$, (a_1)非受控系统(a_2) $H=0$ (a_3) $H=2\pi/3$ (a_4) $H=5\pi/3$)

5.1.2. 当延迟量 H 固定时改变增益系数对分岔进行控制

令 $H = \pi/4, g_2 = 0.1$, 改变增益系数 g_1 对分岔进行控制. 如图 10 所示,实线部分为稳定解,虚线部分为不稳定解. 可以看出,当逐渐增大 g_1 的值时,不稳定解部分逐渐减少,直至消除鞍结分岔. 可见,通过改变增益系数,可以对分岔特性进行较好的控制.

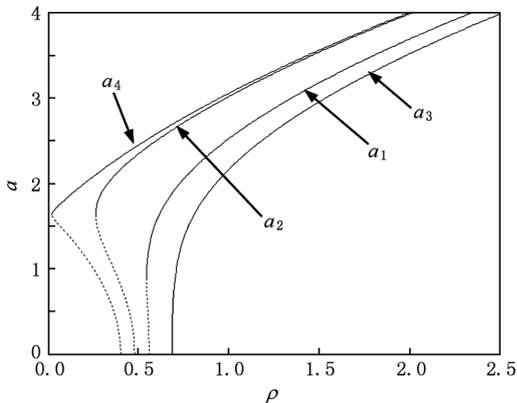


图10 增益参数 g_1 不同的分岔曲线 ($g_2 = 0.1, H = \pi/4, \sigma = 0.01$, (a_1)非受控系统(a_2) $g_1 = 0.1$ (a_3) $g_1 = 0.3$ (a_4) $g_1 = 0.4$)

5.2. 延迟量 H 对频率响应 a 及频率分布区间的影响

图 11 和图 12 为给定参数激励的幅值 $\rho = 0.3$, 时滞反馈系数 $g_1 = 0.2, g_2 = 0.1$ 时,改变延迟量 H 时系统的频率响应曲线. 其中虚线部分为不稳定解. 图 11 中,以 $2\pi/3$ 为界,延迟量小于 $2\pi/3$ 趋近于 $2\pi/3$ 时,频率响应 a 逐渐减小;图 12 中,延迟量大于 $2\pi/3$ 趋近于 $2\pi/3$ 时,频率响应 a 逐渐减小. 故延迟量取最佳值 $2\pi/3$ 时,在参数激励 $\rho \cos(\nu t)$ 的频率范围内,频率响应曲线 a_2 的响应值最小;而且,此时响应曲线 a_2 所包含的频率分布区间也是最宽的.

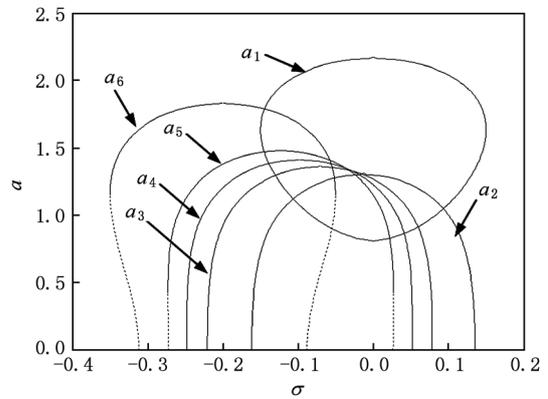


图11 不同 H 时的频率响应曲线, (a_1)非受控系统, (a_2) $H = 2\pi/3$, (a_3) $H = 3\pi/4$, (a_4) $H = 19\pi/24$, (a_5) $H = 5\pi/6$, (a_6) $H = \pi$

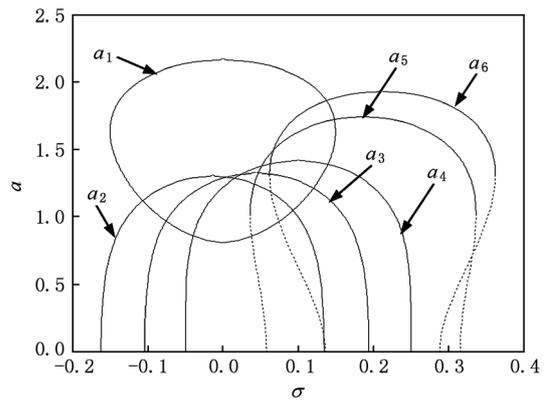


图12 不同 H 时的频率响应曲线, (a_1)非受控系统, (a_2) $H = 2\pi/3$, (a_3) $H = 7\pi/12$, (a_4) $H = \pi/2$, (a_5) $H = \pi/3$, (a_6) $H = \pi/4$

5.3. $h \neq 0$ 时对系统的极限环(域)进行控制

改变增益系数对极限环的控制. 选取参数为 σ

$= -0.1, \rho = 0.7, \Omega = 0.01, h = 0.01$. 图 13—18 为受控非线性动力学方程(6)在保持时滞参数 $g_2 = 0.1, H = \pi/2$, 不同 g_1 时系统的时间历程和相空间. 可以看到, 随着 g_1 的值从 0.2 增大到 0.4, 极限环的幅值从 2.35 减小到 1.5, g_1 的值继续增大到 0.6 时, 受控系统的极限环变为一个稳定焦点. 可以看出, 调节时滞反馈控制项的增益系数, 可以改变极限环的幅值, 达到控制要求.

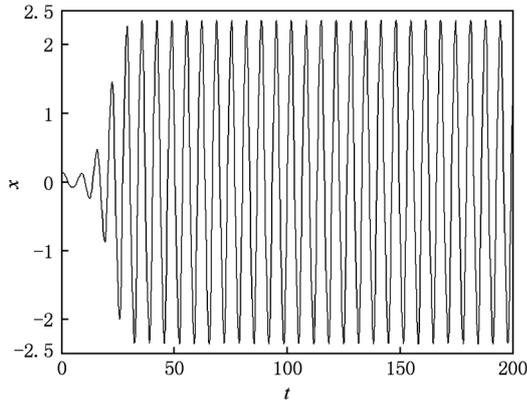


图 13 受控系统的时间历程, $g_1 = 0.2$

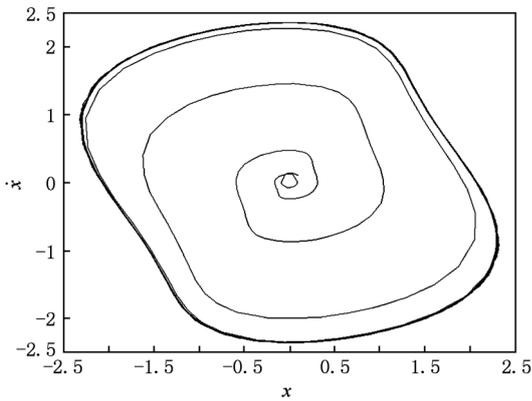


图 14 受控系统的相空间, $g_1 = 0.2$

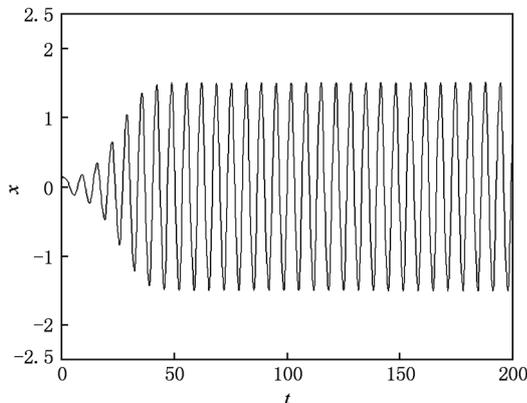


图 15 受控系统的时间历程, $g_1 = 0.4$

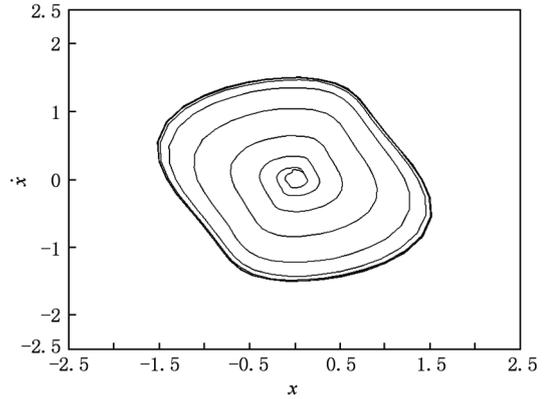


图 16 受控系统的相空间, $g_1 = 0.4$

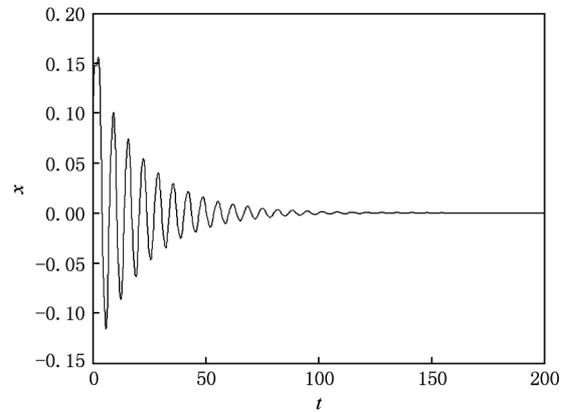


图 17 受控系统的时间历程, $g_1 = 0.6$

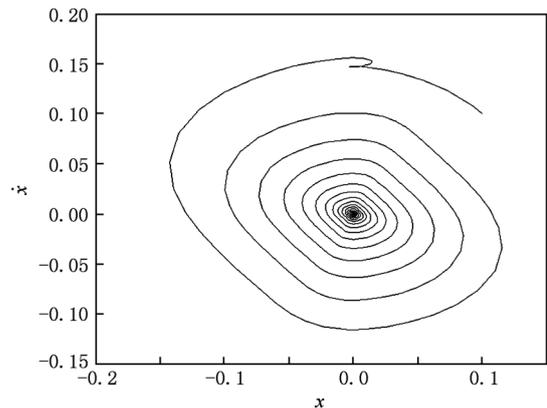


图 18 受控系统的相空间, $g_1 = 0.6$

改变延迟量 H 对极限环域的控制. 选取参数为 $\sigma = -0.1, \rho = 0.7, \Omega = 0.01, h = 0.01$. 图 19—24 为受控非线性动力学方程(6)在保持时滞参数 $g_1 = 0.5, g_2 = 0.1$, 不同延迟量 H 时系统的时间历程和相空间. 可以看到, 随着 H 的值从 $\pi/3$ 增大到 $\pi/2$, 受

控系统也由区域稳定的极限环变为稳定的极限环,幅值也变小. H 的值增大到 $2\pi/3$ 时,受控系统的极限环变为一个稳定焦点. 可见,通过调节时滞反馈控制项中的延迟量,可以改变极限环的幅值及极限环的性质. 取得较好的控制效果.

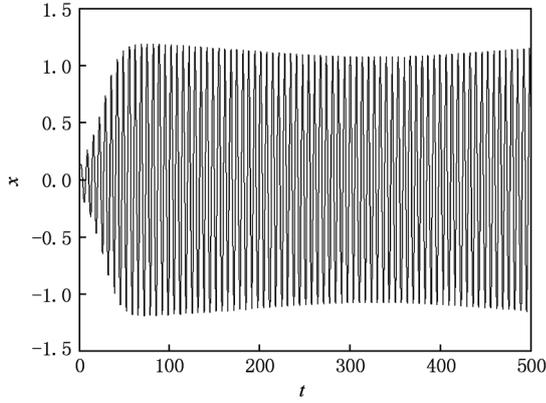


图 19 受控系统的时间历程, $H = \pi/3$

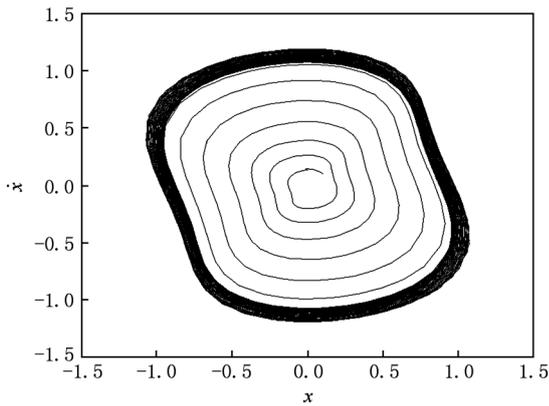


图 20 受控系统的时间历程, $H = \pi/3$

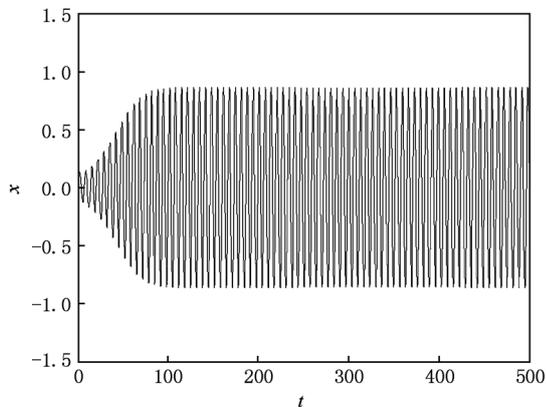


图 21 受控系统的时间历程, $H = \pi/2$

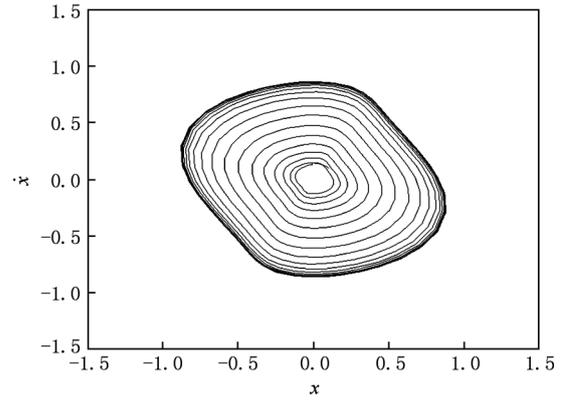


图 22 受控系统的时间历程, $H = \pi/2$

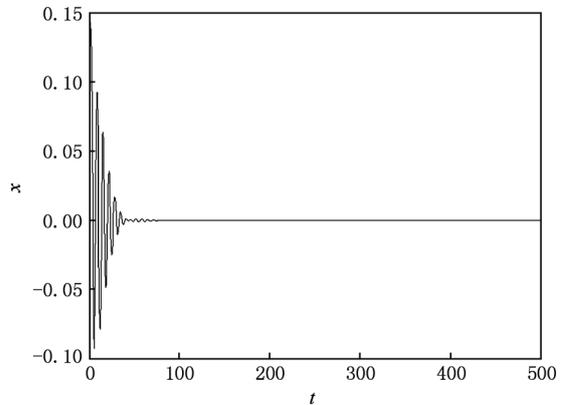


图 23 受控系统的时间历程, $H = 2\pi/3$

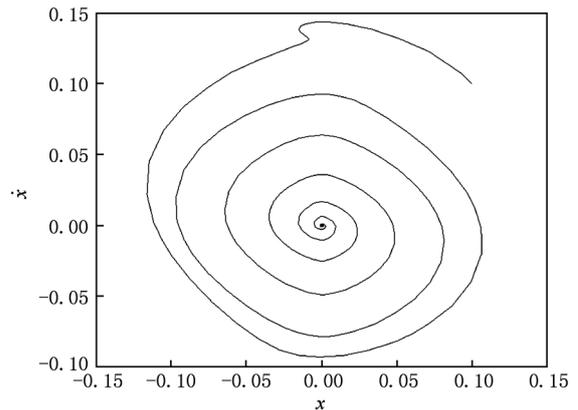


图 24 受控系统的时间历程, $H = 2\pi/3$

6. 结 论

对一类含准周期参激刚度、非线性摩擦阻尼的

时滞反馈相对转动非线性动力系统进行了研究. 建立了系统的一般动力学方程. 运用多尺度法求解 $1/2$ 亚谐波主参数共振下的非受控系统的近似解, 并分析了零解的稳定性及系统的分岔特性. 利用时滞反馈控制的方法对该系统的分岔进行控制. 研究结

果表明系统在选取合适的时滞参数可以对系统实现较好的控制, 改变时滞参数可以控制极限环(域)的幅值, 直到将系统控制到稳定的焦点. 对工程中广泛存在的动力传动系统的动力学行为分析与控制具有理论意义和应用价值.

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **15** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266
- [6] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
- [7] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [8] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [9] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [10] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
- [11] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
- [12] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
- [13] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]
- [14] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [15] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明、刘彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]
- [16] Shi P M, Liu B, Hou D X 2009 *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **22** 132
- [17] Belhaq M, Guennoun K, Houssni M 2002 *Int. J. Non-Linear Mech.* **37** 445
- [18] Guennoun K, Belhaq M, Houssni M 2002 *Nonlin Dyn.* **27** 211
- [19] Maccari A 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 123
- [20] Maccari A 2003 *J. Sound Vib.* **259** 241
- [21] Qi W, Zhang Y, Wang Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1404
- [22] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090306
- [23] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [24] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* (New York: Academic) p46
- [25] Shi P M, Liu B, Jiang J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2147 (in Chinese) [时培明、刘彬、蒋金水 2009 物理学报 **58** 2147]

Stability and time-delayed feedback control of a relative-rotation nonlinear dynamical system under quasic-periodic parametric excitation^{*}

Shi Pei-Ming^{1)†} Li Ji-Zhao¹⁾ Liu Bin¹⁾ Han Dong-Ying²⁾

1)(*College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2)(*College of Vehicles and Energy, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 19 September 2010; revised manuscript received 20 December 2010)

Abstract

The dynamical equation of a relative-rotation nonlinear dynamic system, which contains quasi-periodic parametric excitation and time delays, is established. Bifurcation response equation of 1/2 subharmonic primary parametric resonance is obtained by the method of multiple scales, and the stability of the system is analyzed. By solving the steady state solutions of the uncontrolled system, the effect of quasi-periodic parametric excitation on system response is studied through discussing the dynamics of the system. Time-delay feedback control method is used to control the bifurcation and limit cycle(region). Numerical results show that the bifurcation and the stability of the limit cycle(region) are controlled effectively by changing the time – delay parameters.

Keywords: relatively rotation, quasic-periodic parametric excitation, time-delayed feedback, limit cycle

PACS: 45. 20. dc, 05. 45. – a

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51005196) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China(Grant No. F2010001317).

[†] E-mail: spm@ysu.edu.cn