

高维广义蔡氏电路中的快慢动力学行为及其分岔分析*

季颖 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2010年11月19日收到; 2011年5月3日收到修改稿)

讨论了四阶广义蔡氏电路在两时间尺度下的动力学行为. 由数值模拟得到了系统在不同参数条件下的周期簇发解和混沌吸引子. 通过引入快慢分析法, 从分岔的角度, 以周期解为例, 对系统动力学行为产生的机理及其演化规律进行了理论分析和解释, 其结论与数值计算的结果基本符合.

关键词: 高维广义蔡氏电路, 簇发, 分岔, 特征值

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Ac, 05.45.Pq

1 引言

自蔡氏电路中的混沌现象被揭示以来, 非线性电路的理论及实验研究引起了各国学者的广泛关注. 作为典型的混沌电路, 蔡氏电路不仅结构简单, 还可以很方便地加以修改. 人们通过改变其中的部分结构, 得到了许多形式更为广泛的混沌电路, 比如引入各种反馈控制装置^[1,2]. 这些改变后的电路(称作广义蔡氏电路)不仅包含更为丰富的非线性特性, 同时也具有更为广泛的应用背景. 各国学者从理论和实验等多个方面对各种形式的广义蔡氏电路进行了大量的研究工作, 揭示了许多诸如超混沌、混沌危机等复杂特性^[3,4]. 1994年 Zhong^[5]首先提出用光滑函数代替原蔡氏电路中的分段线性因素. 这样做的一个优点是避免了绝对值函数, 构造了一个光滑的混沌系统, 有利于理论上的分析研究. 研究表明, 在利用混沌加密的保密通信中, 低维混沌系统容易被破译而高维的超混沌系统则难以破译. 因此, 围绕超混沌系统的产生与应用成为人们研究的一个热点^[6]. 最近 Liu 等^[7]通过设计线性反馈控制器实现了对如下四阶蔡氏超混沌电

路的混沌控制, 其电路图如图 1 所示.

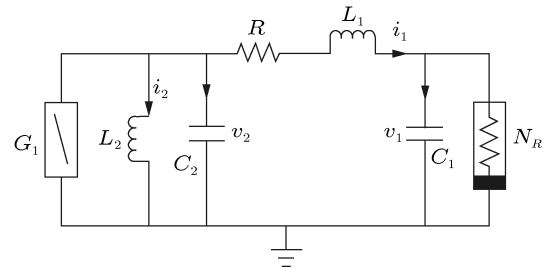


图 1 四阶超混沌蔡氏电路

该电路的动力学行为可用如下微分方程组刻画,

$$\begin{aligned} C_1 \dot{v}_1 &= i_1 - g(v_1), \\ C_2 \dot{v}_2 &= -G_1 v_2 - i_1 - i_2, \\ L_1 \dot{i}_1 &= v_2 - v_1 - R i_1, \\ L_2 \dot{i}_2 &= v_2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 v_1 和 v_2 分别代表电容 C_1 和 C_2 上的电压, i_1 和 i_2 分别代表通过电感 L_1 和 L_2 的电流, $g(v_1)$ 则为通过非线性电阻 R_N 的电流, 并且 $g(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)(|v_1 + B_P| - |v_1 - B_P|)$.

* 国家自然科学基金(批准号:10972091, 20976075)、江苏省高校自然科学基金(批准号:11KJB130001)和江苏大学高级人才基金(批准号:11JDG065)资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

在实际电路系统中,各原件的可调范围往往较大,可能导致系统的动力学行为产生多时间尺度效应^[8,9].所谓多时间尺度,指的是在所建立的非线性数学模型中,状态变量或者它们某种形式的组合可以分为若干不同的组,而各组之间随时间变化的速率存在着明显量级上的差异.这种多时间尺度因素不仅可以来自于真实时间上的快慢效应,如各种反应速度的快慢^[10],同时也可能来自于几何尺寸上的尺度效应^[11],还有其他诸如反应系统结构效应^[12]、系统内部的物理效应^[13]等等.在最近的工作中,我们曾探讨了一类非自治电路在外激励影响下的快慢效应^[14].在自治电路中,系统的动力学行为亦可能因为各参数间存在的量级差异而呈现快慢效应,但其机理则完全不同于非自治系统.基于这样的背景,本文参照 Zhong 的方法对自治系统(1)进行相应的修改,讨论其在某些参数条件下的快慢动力学行为.

2 数值模拟

将系统(1)中非线性电阻的电流-电压特性函数修改为如下形式 $i_R = g(v_1) = v_1^3 e^{v_1}/R$, 引入变换 $x = v_1, y = v_2, z = i_1/G, w = i_2/G, t = \tau C_2/G, a = C_2/C_1, b = -G_1/G, c = C_2/L_1 G^2, \varepsilon = C_2/L_2 G^2, G = 1/R$, 则修改后的光滑电路模型的无量纲化形式为

$$\dot{x} = a(z - x^3 e^x), \quad (2a)$$

$$\dot{y} = by - z - w, \quad (2b)$$

$$\dot{z} = c(y - x - z), \quad (2c)$$

$$\dot{w} = \varepsilon y, \quad (2d)$$

这里, $a, b, c > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$. 由于 ε 是一个小量, 方程(2d)所表示的 w 的变化率将明显小于方程(2a)和(2c)的变化, 即整个系统可以被分成两组, 慢子系统(w)和快子系统(x, y, z).

下面取定 $a = 0.5, c = 0.15, \varepsilon = 0.001$, 以 b 为分岔参数, 讨论系统(2)的动力学行为. 图2给出了该系统随 b 变化的分岔图.

由分岔图可知, 在我们所选取的参数范围内, 随着分岔参数 b 的增大, 系统的相轨迹穿越固定截面的次数也逐渐增多, 并且最终演化为混沌运动. 下面以分岔图为指导, 通过分析某些参数条件下的动力学行为, 着重讨论系统具体的运动模式和演化特点.

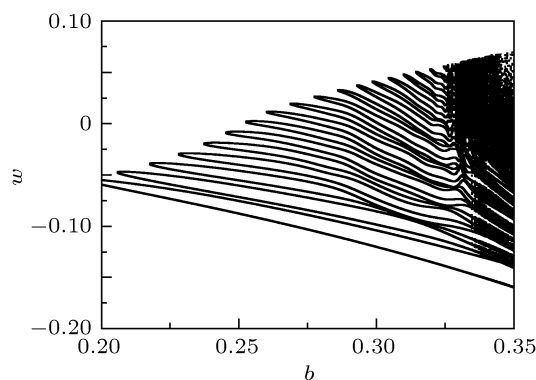


图2 系统(2)随参数 b 变化的分岔图

从图3可以看出, 当 b 相对较小时, 系统(2)做周期振荡. 例如 $b = 0.22$ 时, 系统的周期运动呈现 L^S 型复合振荡(如图3(a)). 这样的复合振荡随着 b 的增大, 发生加周期分岔(如图3(b)和3(c)所示), 并在 $b = 0.345$ 时失稳, 走向混沌(见图3(d)).

上述参数中, ε 明显小于其他参数, 并具有量级上的差距, 这就使得 w 的变化率比 x, y, z 要小得多. 于是整个系统被分成两组, 即快、慢两个子系统, 全系统的动力学行为也显示出快慢效应, 因而数值计算的结果(图3所示)表现为簇发^[15]现象. 下面从分岔理论出发, 运用快慢分析法探讨系统(2)的簇发机理和演化过程.

值得一提的是: 系统(2)是一个自治系统, 我们采取截面法获得分岔图, 图2取自截面 $\Sigma: \{(x, y, z, w) | x = 0.5\}$. 这里 w 表示相轨迹穿过 Σ 时 w 的值.

3 分岔分析

快慢效应的发生主要是由于子系统的步调不一致. 通常对于两时间尺度系统来说, 由其中的快子系统产生振幅较大的激发态的振荡, 慢子系统则对应于振幅较小的振荡. 为了分析系统(2)所表示的光滑系统的簇发机理及其类型, 我们根据快慢分析法^[15], 将慢变量 w 视为快子系统的分岔参数, 讨论其中各种不同类型的簇发振荡.

首先分析 $b = 0.22$ 的情形. 图4给出了该参数条件下, 快子系统的平衡点分岔图, 并且其上叠加了全系统周期簇发解的相图. 在慢变量即分岔参数 w 的调制下, 快子系统的平衡点曲线呈倒置的 S 形, 并由三部分组成, 分别是上下两支实线和中间一支虚线. 其中实线表示稳定的焦点, 虚线表示不稳定的焦点. 倒 S 线上的两

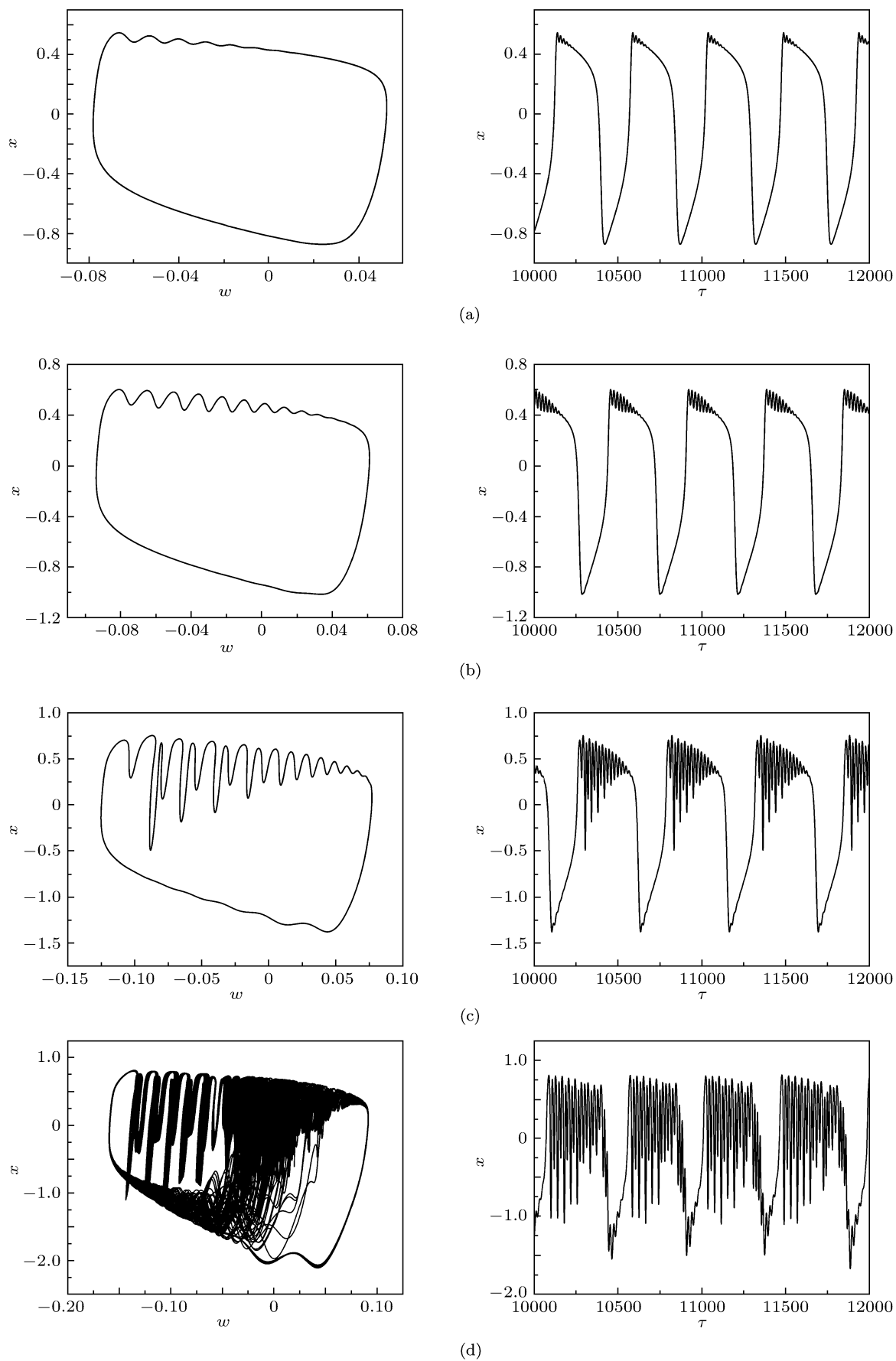


图3 系统(2)的相图与时间序列 (a) $b = 0.220$; (b) $b = 0.250$; (c) $b = 0.300$; (d) $b = 0.345$

点 $LP1$ 和 $LP2$ 则为分岔点, 表示 Fold 分岔, 分岔值分别为 $w_{LP1} = -0.0545$ 和 $w_{LP2} = 0.0394$. 图中标注为 w 零变化的虚线为慢变量 w 的零线 ($\dot{w} = x^3 e^x + w = 0$), 在零线的上(下)方, $\dot{w} > 0$ ($\dot{w} < 0$).

下面, 通过图 4 分析系统 (2) 在相应参数条件下的簇发机理. 图 4 中箭头表示相轨迹的环绕方向. 不妨设系统从轨线下半支 $w = -0.0545$ 处 (位于分岔点 $LP1$ 处) 出发. 如图所示, 在分岔点 $LP1$ 的左侧, 倒 S 线上支的稳定焦点是快子系统唯一的吸引子, 所以越过 $LP1$ 点后, 全系统的相轨迹将被上方的稳定焦点吸引, 向上跳跃. 轨迹跳至上支实线处以后, 由于该处位于 w 的零线上方, 即 $\dot{w} > 0$, 随即向着 w 增大的方向前进, 即向右运行. 当 w 增大至 $w_{LP2} = 0.0394$ 时, 平衡点失稳, 系统 (2) 的轨迹因 Fold 分岔跳回 S 线下半支. 此时 $\dot{w} < 0$, w 将减小, 轨线向左运行, 直至回到 $LP1$ 点, 开始下一周期.

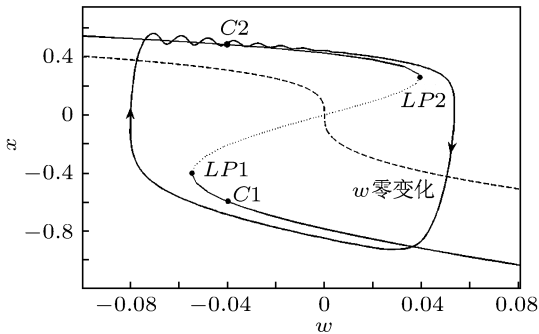


图 4 系统 (2) 的焦点 - 焦点型 Fold/Fold 簇发 ($b = 0.22$)

这种周期解的产生机理和文献 [15] 中定义的 Fold/Fold 分岔一致, 也应称为 Fold/Fold 簇发. 与 [15] 中所讨论的 Fold/Fold 分岔不同的是, 图 4 所描述的是焦点 - 焦点型簇发. 而且该焦点 - 焦点型簇发解较为特殊, 只在轨线上半支出现了类似激发态的振荡, 不同于一般的对称焦点 - 焦点簇发解. 这是因为, 全系统及快子系统 (x, y, z) 的向量场均不具有对称性, 以 w 为分岔参数的快子系统的分岔线上、下两部分的稳定焦点的特性也不相同. 例如, 取 $w = -0.04$ 时的平衡点 (相应图 4 中分岔线上、下支中的 $C1, C2$ 点), 分别计算它们的特征值. $C1$ 所对应的特征值分别为 $\lambda_1 = -0.0655$, $\lambda_{2,3} = -0.0501 \pm 0.4080i$, 而 $\lambda'_1 = -0.5490$, $\lambda'_{2,3} = -0.0281 \pm 0.3362i$ 则是 $C2$ 的特征值. 比较上述结果可知, $C1$ 的特征

值的实部、虚部的绝对值均比 $C2$ 大得多. 这意味着 $C1$ 的收敛性明显大于 $C2$, 所以轨线从 $LP2$ 跳下来时, 很快被吸引到稳定焦点上, 几乎不进行类似于激发态的振荡.

当 b 增大至 $b = 0.25$ 时, 全系统的相图 (见图 5) 与 $b = 0.22$ 的情形极其相似, 但是其分岔机理和簇发类型是完全不同的. 图 5 中所示的倒 S 形分岔线仍由虚线和实线两部分组成, 分别表示不稳定的焦点和稳定的焦点. $LP1$ 和 $LP2$ 为 Fold 分岔点, H 则表示超临界 Hopf 点, 分岔值为 $w_H = -0.0590$, 即快子系统在此处发生超临界 Hopf 分岔, 由稳定焦点分岔得到稳定的极限环.

设系统由下半支 $w = -0.0689$ 处出发 (位于分岔点 $LP1$ 处) 出发. 在分岔点 $LP1$ 的左侧, 倒 S 线上支的稳定极限环是快子系统唯一的吸引子, 所以越过 $LP1$ 点后, 快子系统因 Fold 分岔从平稳运动 (沉寂态) 向上跳跃, 转向周期运动 (激发态). 这时系统处于轨线上半支, 并位于 w 的零线上方, 即 $\dot{w} > 0$, 所以相轨迹向着 w 增大的方向运行, 随着参数的增大, 系统周期运动的振幅逐渐变大. 直到参数递增到超临界 Hopf 分岔值 $w_H = -0.0590$ 时, 快子系统因 Hopf 分岔退出周期运动转向平稳运动, 但由于慢过效应 (slow passage effect), 系统振荡的振幅是逐渐减小的. 此时参数 w 仍

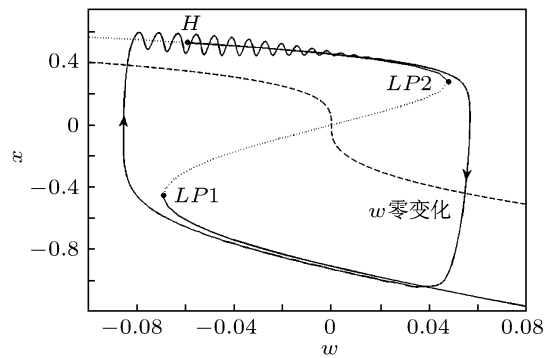


图 5 系统 (2) 的焦点 - 焦点型 Fold/Hopf 簇发 ($b = 0.25$)

在不断递增, 当参数递增到 $w_{LP2} = 0.0482$ 时, 系统相轨迹又因 Fold 分岔跳转到下半支稳定焦点处. 此时系统位于 w 的零线下方 ($\dot{w} < 0$), 于是参数开始递减, 系统向左运动直到参数增加至 $w_{LP1} = -0.0689$ 时, 方完成了一个周期的运动. 这种周期解的产生主要与快子系统的 Fold 分岔和 Hopf 分岔有关, 根据其分岔机理和文献 [15] 的定义, 我们称之为焦点 - 焦点型 Fold/Hopf 簇发.

当 b 继续增大至 $b = 0.29$ 时, 系统的簇发机理和类型均与 $b = 0.25$ 相同, 但是系统在激发态下振荡的振幅明显变大了, 如图 6 所示. 下面通过比较分岔点的位置对该现象加以解释.

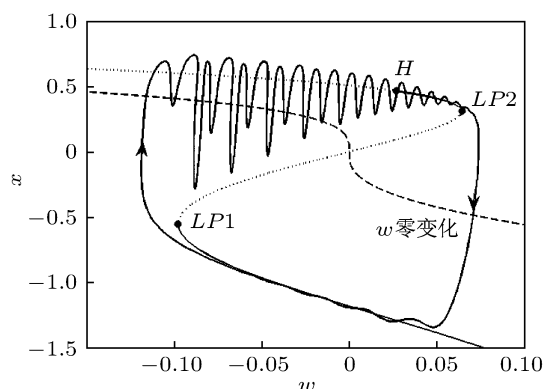


图 6 系统 (2) 的焦点 - 焦点型 Fold/Hopf 簇发 ($b = 0.29$)

由 Hopf 分岔理论可知, 由超临界 Hopf 分岔生成的极限环的振幅与分岔点的数值有关, 会由分岔点开始随参数的变化而逐渐增大. 因此在所讨论

的模型中, Hopf 分岔生成的极限环的振幅会从分岔点 H 开始随着慢变参数 w 的减小单调递增. 而且, 比较图 5 和图 6 可以看出, 分岔点 H 到 $LP1$ 间的水平距离随着 b 的增加明显变大. 这就意味着在 b 取较大数值时, 由 Hopf 分岔导致的激发态振荡会在相对较大一个范围内进行. 其间, 极限环振幅随分岔参数 w 的变化而增大的过程也就会持续较长一些, 于是系统在激发态下振荡的振幅也就相应明显变大.

4 结论

基于四阶广义蔡氏电路, 着重讨论了系统在两时间尺度下的快慢效应. 通过数值计算得到了系统在不同参数条件下的周期解和混沌吸引子. 利用快慢分析法, 从理论上探讨了周期簇发解产生的机理, 并对其进行了分类, 即 Fold/Fold 簇发和切/Hopf 簇发. 通过对快子系统特征值的计算和分析, 指出了文中簇发解与常见类型的不同之处. 由 Hopf 分岔理论出发, 解释了系统簇发解随参数变化而演化的现象, 并与数值模拟的结果基本符合.

- [1] Maganti G B, Singh S N 2006 *Chaos Solitons. Fract.* **28** 724
- [2] Fu S H, Pei L J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5985 (in Chinese) [付士慧, 裴利军 2010 物理学报 **59** 5985]
- [3] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [4] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁, 刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
- [5] Zhong G Q 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **41** 934
- [6] Zhang Z X, Yu S M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3017 (in Chinese) [张朝霞, 禹思敏 2010 物理学报 **59** 3017]
- [7] Liu X, Wang J Z, Hang L 2006 *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference Harbin, China, August 7-11 2006* p227
- [8] Lee I, Kim S, Jun S 2004 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **193** 1633
- [9] Ji Y, Bi Q S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080510
- [10] Hug G, Wang Y, Schoneich C, Jiang P, Fessenden R 1999 *Radiat. Phys. Chem.* **54** 559
- [11] Staddon J, Chelaru I, Higa J J 2002 *Behavioural Processes* **57** 71
- [12] Mease K D 2005 *Appl. Math. Comput.* **164** 627
- [13] Han X J, Jiang Bo, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4408 (in Chinese) [韩修静, 江波, 毕勤胜 2009 物理学报 **58** 4408]
- [14] Ji Y, Bi Q S 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1434
- [15] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1171

Bifurcation analysis of slow-fast behavior in modified Chua's circuit*

Ji Ying Bi Qin-Sheng[†]

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 19 November 2010; revised manuscript received 3 May 2011)

Abstract

The dynamics of four-order modified Chua's circuit with slow-fast effect has been investigated in this letter. Different types of bursting phenomena can be observed in numerical simulations. By introducing slow-fast analysis, the bifurcation mechanism for the periodic bursting solutions, especially for Fold/Fold bursting and Fold/Hopf bursting, is presented, which is different from the usual case. With the variation of the parameter, the periodic bursting can evolve to chaotic bursting.

Keywords: modified Chua's circuit, bursting, bifurcation mechanism, eigenvalues

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Ac, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091,20976075), the National Science Foundation for College and Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 11KJB130001), and the Senior Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 11JDG065).

[†] E-mail: qbi@ujs.edu.cn