

## 过阻尼分数阶 Langevin 方程及其随机共振\*

高仕龙<sup>1)2)</sup> 钟苏川<sup>1)</sup> 韦鷗<sup>1)</sup> 马洪<sup>1)†</sup>

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (乐山师范学院数学与信息科学学院, 乐山 614000)

(2011 年 8 月 11 日收到; 2011 年 9 月 27 日收到修改稿)

通过对广义 Langevin 方程阻尼核函数的适当选取, 在过阻尼的情形下, 推导出分数阶 Langevin 方程. 结合反常扩散理论和分数阶导数的记忆性, 讨论了分数阶 Langevin 方程的物理意义, 进而得出分数阶 Langevin 方程产生随机共振的内在机理. 数值模拟表明, 在一定的阶数范围内, 分数阶 Langevin 方程可以产生随机共振, 并且分数阶下的信噪比增益好于整数阶情形.

**关键词:** 随机共振, 分数阶 Langevin 方程, 双稳系统, 记忆性

**PACS:** 05.10.Gg, 02.50.-r

## 1 引言

由于分子热运动, 介质中的微粒受到介质分子对它的随机碰撞, 从而产生 Brown 运动. Langevin 认为<sup>[1]</sup> 微粒在介质中受到的合外力包括梯度势场力  $-U'(x)$ , 阻尼力  $-\gamma\dot{x}$ , 随机力  $\xi(t)$ , 外部信号力  $F(t)$  等. 因此, 由牛顿第二定律  $ma = \sum F$ , 可得 Langevin 方程

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x} + F(t) + \xi(t). \quad (1)$$

在过阻尼情形下<sup>[2]</sup>, (1) 式中的加速度项  $m\ddot{x}$  可以忽略, 模型可以简化为

$$\gamma\dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + F(t) + \xi(t). \quad (2)$$

20 世纪 80 年代, Benzi 等<sup>[3]</sup> 在研究第四纪全球气象冰川问题时发现, 在一定强度的噪声调节下, 气候的周期响应与外加微弱周期干扰会实现同步, 这种现象从本质上讲是信号、噪声和非线性系统之间的协同作用, 称之为随机共振.

研究随机共振常用的系统是基于双稳态<sup>[4-6]</sup> 的 Langevin 方程, 势函数为  $U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$ , 外部信号力  $F(t) = A \cos(2\pi ft)$ . 随机共振理论认为, 在适当的条件下, 噪声对于系统的输出信噪比有积极的改善作用.

最近十多年来, 分数阶微积分理论受到极大关注<sup>[7,8]</sup>, 在黏弹性材料、色噪声、混沌, 以及反常扩散<sup>[8,9]</sup> 等现象的研究中得到了广泛应用. 人们注意到, 反常扩散在时间上具有记忆性, 在空间上具有非局部性, 而分数阶微积分具有时间记忆性和长程空间相关性, 已被证明能够比整数阶更加精确地描述有记忆和遗传、路径依赖性质的物理过程和生化反应过程<sup>[10]</sup>. 迄今, 人们对各种不同的随机共振现象进行了广泛而深入的研究<sup>[4,5,11-13]</sup>, 但这些研究大多基于整数阶微积分数学模型, 而对分数阶模型却鲜有涉及. 本文引入分数阶 Langevin 方程, 结合反常扩散理论和分数阶微积分的记忆性质研究了过阻尼情形下分数阶 Langevin 方程的随机共振. 通过数值模拟, 分析了阶数和最佳随机共振时的噪声强度以及信噪比的关系, 并发现分数阶下的信噪比增益明显好于整数阶.

## 2 分数阶 Langevin 方程

## 2.1 分数阶微积分

定义 1<sup>[14,15]</sup> 连续函数  $f(t) : R^+ \rightarrow R$  的 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-t')^{\alpha-1} f(t') dt',$$

\* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10731050) 和中国博士后科学基金 (批准号: 20100471651, 201104693) 资助的课题.

† E-mail: mahong@scu.edu.cn

$$\alpha > 0, \quad (3)$$

式中  $a$  和  $t$  分别为积分下限和上限, 阶数  $\alpha$  可以取非整数,  $\Gamma(\cdot)$  是 Euler Gamma 函数.

定义 2<sup>[14,15]</sup> 连续函数  $f(t) : R^+ \rightarrow R$  的 Caputo 分数阶导数定义为

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} [f(t)^{(n)}], \quad n-1 \leq \alpha < n, n \in N. \quad (4)$$

## 2.2 分数阶 Langevin 方程及其物理意义

对于 Langevin 方程 (2), 方程左端阻尼项可以写为  $\gamma \dot{x} = \gamma \int_0^t \delta(t-t') \dot{x}(t') dt'$ , 即在白噪声环境下 Brown 粒子受到的阻尼力只与粒子当前速度有关, 其运动轨迹是一个 Markovian 过程; 而在非均匀介质中, 通常粒子受到的阻尼力与历史速度有关, 其运动轨道是非 Markovian 的<sup>[1]</sup>. 也就是说, 作用在粒子上的阻尼力以不同的权重依赖于过去时刻的速度, 这种权重表现为有记忆的阻尼核函数, 描述这种现象的是广义 Langevin 方程<sup>[16,17]</sup>

$$\int_0^t \gamma(t-t') \dot{x}(t') dt' = ax - bx^3 + A \cos(2\pi ft) + \xi(t), \quad (5)$$

其中随机项  $\xi(t)$  与阻尼核函数  $\gamma(t)$  满足涨落耗散定理<sup>[18,19]</sup>, 即  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = k_B T \gamma(t-t')$ , 其中  $k_B$  为 Boltzmann 常数,  $T$  是介质温度.

在真实的物理和生化环境中, 介质对速度通常具有幂律记忆性, 距当前时刻越近, 记忆性越强; 距当前时刻越远, 记忆性越差. 在广义 Langevin 方程 (5) 中, 设阻尼核函数  $\gamma(t)$  为

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} |t|^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

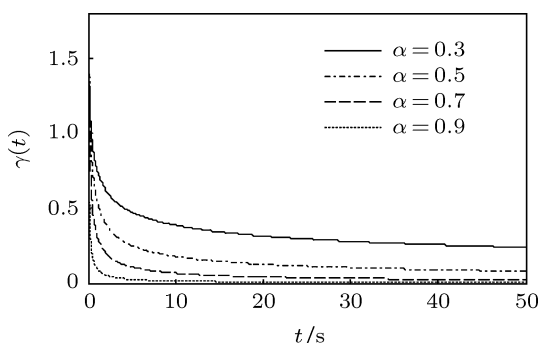


图 1  $\alpha$  取不同值时的  $\gamma(t)$

图 1 为  $\alpha$  取不同值时的函数  $\gamma(t)$ . 由图可知,  $\gamma(t)$  具有幂律记忆性, 随着时间  $t$  的增加按  $t$  的幂次逐渐衰减,  $\alpha$  越大其衰减越快,  $\alpha$  越小其衰减越

慢. 把 (6) 式中  $\gamma(t)$  代入 (5) 式左端阻尼项, 并根据定义 1 和定义 2 有

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-t')^{-\alpha} \dot{x}(t') dt' = {}^C_0 D_t^\alpha x(t), \quad (7)$$

其中算子  ${}^C_0 D_t^\alpha$  表示 Caputo 意义下的  $\alpha$  阶分数阶导数. 由此得到过阻尼情形下的分数阶 Langevin 方程

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = ax - bx^3 + A \cos(2\pi ft) + \xi(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (8)$$

由 Caputo 分数阶导数的定义可知, Brown 粒子在双稳势阱中的位移  $x(t)$  的分数阶导数相当于对其速度  $\dot{x}(t)$  做一个加权积分, 距当前时刻越近  $\dot{x}(t)$  的权值越大, 而距当前时刻越远则权值越小. 其权值减小的比率与分数阶导数的阶次  $\alpha$  有关. 特别的, 当阶数  $\alpha \rightarrow 1$  时, 阻尼核函数  $\gamma(t)$  退化为单位冲激函数  $\delta(t)$ , 失去记忆性, 分数阶转化为整数阶导数, 在初值为 0 的情况下, 求导的结果等于速度  $\dot{x}(t)$ . 当阶数  $\alpha \rightarrow 0$  时, 核函数退化为常数 1, 对各个时刻速度的记忆性完全相同, 称为具有理想记忆<sup>[20]</sup>, 求导的结果等于位移  $x(t)$ . 这与相关文献 [20—22] 对分数阶导数的记忆性质的数学表达是符合的.

## 2.3 分数阶 Langevin 方程的随机共振原理

Goychuck 和 Hanggi<sup>[23]</sup> 在研究稳定双态更新过程模型中的非 Markovian 过程时, 发现这类反常扩散过程中也会出现随机共振, 并且与传统的 Markovian 随机共振系统相比, 这种系统对输出信噪比有较大程度的改善.

分数阶 Langevin 方程 (8) 描述的是一个有势场和外部信号力的欠扩散过程<sup>[18]</sup>, 在没有势场和外部周期力的情况下, 方程的解  $x(t)$  满足  $\langle x(t)^2 \rangle \propto t^\alpha, 0 < \alpha < 1$ . 因此, 用方程 (8) 来刻画非均匀介质中受到粘滞阻尼力的 Brown 粒子的运动过程和随机共振现象是合理的. 在忽略噪声的情况下, 考虑分数阶微分方程

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = ax - bx^3 + A \cos(2\pi ft), \quad (9)$$

(9) 式的解可以表示为<sup>[6]</sup>  $x(t) = \bar{R} \cos(2\pi ft - \bar{\phi})$ , 其中  $\bar{R}$  和  $\bar{\phi}$  是与时间  $t$  无关的常值, 故  $x(t)$  也是周期的, 且周期与输入信号相同, 可求出任意一个周期  $T_0 = \frac{1}{f}$  内  $x(t)$  的积分值  $\bar{x}$ .

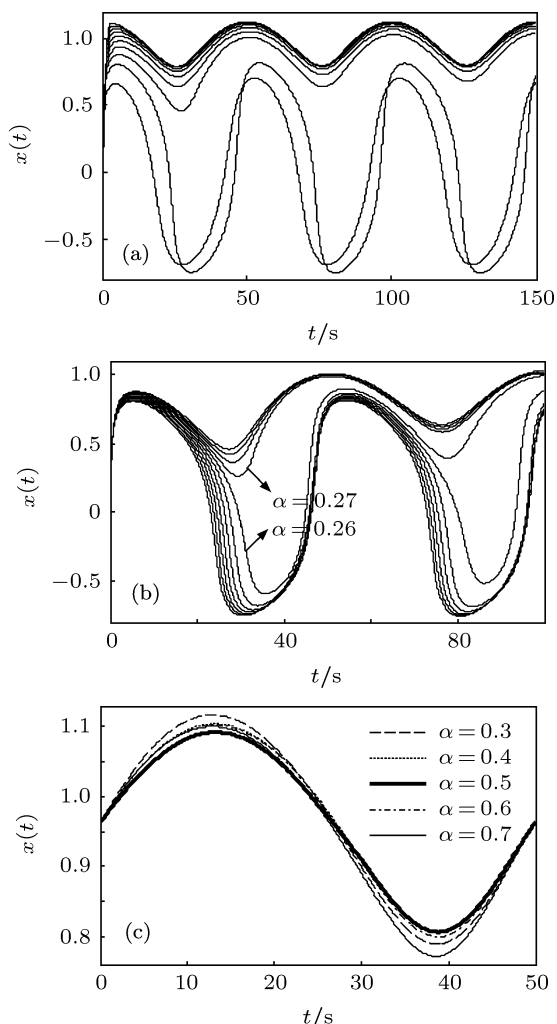


图2 不同阶数下方程(9)的解 (a)阶数0—1; (b)阶数0.2—0.3; (c)阶数 $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$

图2是在参数  $a = b = 1, A = 0.3, f = 0.02$  时方程(9)在不同阶数下的解. (a)图是  $\alpha \in (0, 1]$  时方程的解曲线, 从上到下阶数以步长 0.1 从 1 递减到 0.1; (b)图是阶数  $\alpha \in [0.2, 0.3]$  时的解, 从上到下阶数以步长 0.01 从 0.3 递减到 0.2; (c)图是阶数在  $\alpha = 0.5$  左右变动时方程解曲线幅值的对比. 从图2(a)和(b)图可以看到, 随着阶数在  $(0, 1]$  之间递减, 粒子先是以频率  $f$  在平衡点  $x = 1$  或  $x = -1$  处做局部周期运动, 当  $\alpha$  到达一个临界值  $\alpha_c$  时, 粒子开始翻越势垒  $x = 0$  产生跃迁. 由于势函数的对称性, 一旦粒子翻越势垒, 则以  $x = 0$  为中心在  $x = \pm 1$  间做周期运动, 此时粒子的运动轨迹在一个周期内的积分值  $\bar{x} = 0$ , 据此, 可以求出临界值  $\alpha_c = 0.26$ . 可见, 当阶数  $\alpha$  大于临界值  $\alpha_c$  的时候, Brown 粒子只能在一个势阱里做局部周期运动, 需要噪声的协同作用才能克服势垒高度跃迁到另一个势阱, 从而产生随机共振. 当阶数小于临界值  $\alpha_c$ , 则 Brown 粒子不需要外界噪声能量的激励

就能翻越势垒, 因而不会产生随机共振. 图2(c)表明, 在阶数  $(0, 1]$  范围内,  $\alpha = 0.5$  时解曲线的幅值最小, 即粒子的速度最小, 因此, Brown 粒子热运动平均动能最小, 则驱动粒子翻越势垒所需要的能量最强.

### 3 仿真实验及分析

Langevin 认为 Brown 粒子在介质中受到的力主要有两类, 一类为粘滞阻尼力, 另一类是大小和方向都不断变化, 且均值为零的随机力, 即噪声  $\xi(t)$ , 二者通过涨落耗散定理联系在一起. Brown 粒子受到的随机力源于介质分子热运动产生的无规碰撞<sup>[5]</sup>, 这种随机力称为内部噪声, 而由外部输入或由外部参数控制的无规则涨落称为外部噪声. 在研究随机共振的时候, 噪声往往来源于外部施加的随机干扰, 与系统的耗散无关, 不满足涨落耗散定理. 因此, 在讨论分数阶 Langevin 方程随机共振的时候, 主要考虑可控的外部噪声, 为简单起见, 仅讨论 Gauss 白噪声的情形.

考虑分数阶 Langevin 方程

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = ax - bx^3 + A \cos(2\pi ft) + \xi(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (10)$$

其中  $\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ .  $D$  为噪声强度, 噪声方差为  $\sqrt{2D}$ . 参数  $a = b = 1, A = 0.3, f = 0.02$ , 采样间隔取为  $h = 0.02$ , 初始条件设为  $x(0) = 0$ .

Benzi 等<sup>[3]</sup> 在研究随机共振时发现, 随着噪声强度的增加, 输出功率谱在信号频率处的谱峰值也增加. Fauve 和 Hesolt<sup>[24]</sup> 随后定义信噪比为信号频率处谱峰值和背景噪声的比值, 这个定义成为经典随机共振理论中最常用的方法, 可用数学方法描述为

$$SNR = \frac{2 \left[ \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Delta\omega}^{\Omega + \Delta\omega} S(\omega) d\omega \right]}{S_N(\Omega)},$$

其中  $S(\omega)$  表示信号功率谱密度,  $S_N(\Omega)$  为噪声在信号频率区域内的强度大小.

图3是不同阶数下的信噪比图. 横坐标为噪声强度  $D$ , 纵坐标是信噪比  $SNR$ . 点数据是实验结果, 实线为拟合曲线. 可见, 在阶数  $\alpha > \alpha_c = 0.26$  的时候, 分数阶 Langevin 系统能够产生随机共振. 在产生协同效应的区域内, 在噪声能量的激励下, Brown 粒子开始翻越势垒, 随着噪声强度的增加, 输出信噪比不断增加, 当噪声到达一定的强度, 周

期信号、噪声、和非线性系统之间的协同作用达到最佳,此时称为最佳随机共振.此后,随着噪声强度的进一步加大,信噪比又开始逐渐减小.阶数  $\alpha < \alpha_c = 0.26$  的时候,由于不需要噪声能量粒子已能从一个势阱跃迁到另一个势阱,因此不会产生随机共振,信噪比随着噪声强度的增大单调减小.

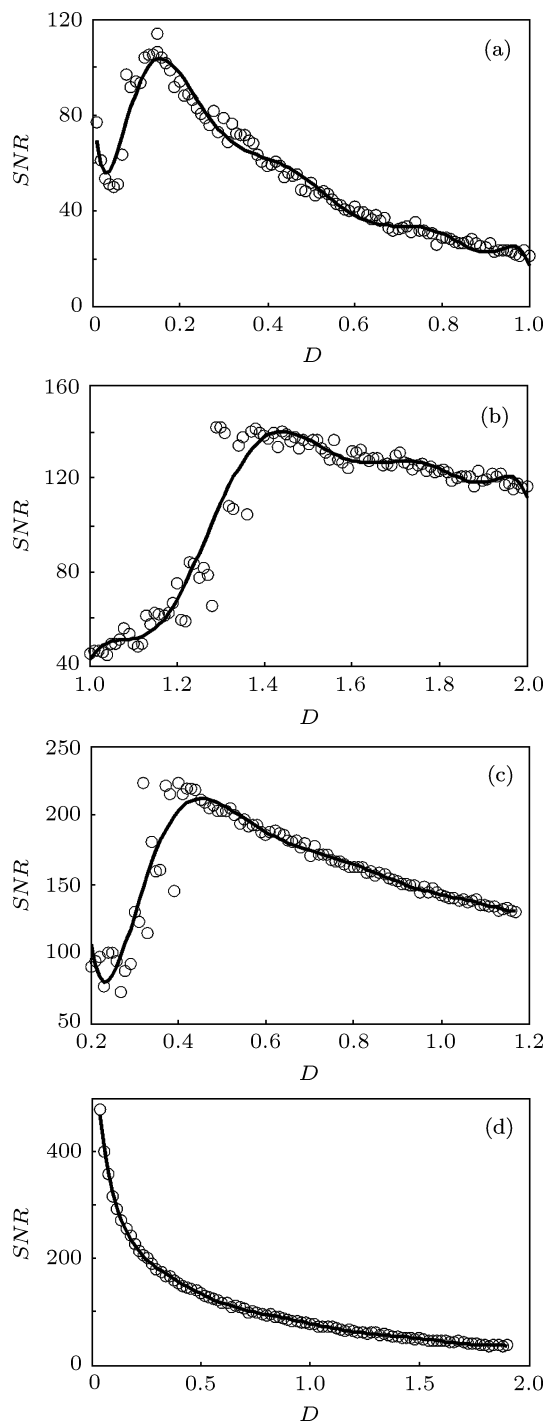


图 3 不同阶数下系统的输出信噪比 (a)  $\alpha = 0.9$ ; (b)  $\alpha = 0.6$ ; (c)  $\alpha = 0.3$ ; (d)  $\alpha = 0.2$

系统信噪比增益反映了系统对输入信号的信噪比改善情况.定义系统的增益为输出信噪比和输

入信噪比的比值

$$SNR_{\text{gain}} = \frac{SNR_{\text{out}}}{SNR_{\text{in}}}$$

不同阶数的分数阶 Langevin 方程,产生最佳随机共振时的输出信噪比、信噪比增益和噪声强度是不同的.图 4(a) 给出了最佳信噪比随阶数不同的变化曲线,图 4(b) 为不同阶数时,发生最佳共振时的噪声强度.从图中可以看出,随着阶数的增加,最佳随机共振时的输出信噪比单调减小,分数阶系统的输出信噪比好于整数阶系统.而发生最佳共振时的噪声强度则先是增加,在阶数  $\alpha = 0.5$  达到最大值,然后开始下降,这与图 2 中 (c) 的分析是一致的. Brown 粒子的运动幅值越小,意味着粒子热运动平均动能越小,克服介质的粘滞阻力所需外部噪声强度就越大,从而才能达到信号、噪声、和非线性系统之间的最佳协同作用,以激励粒子翻越势垒产生最佳随机共振.

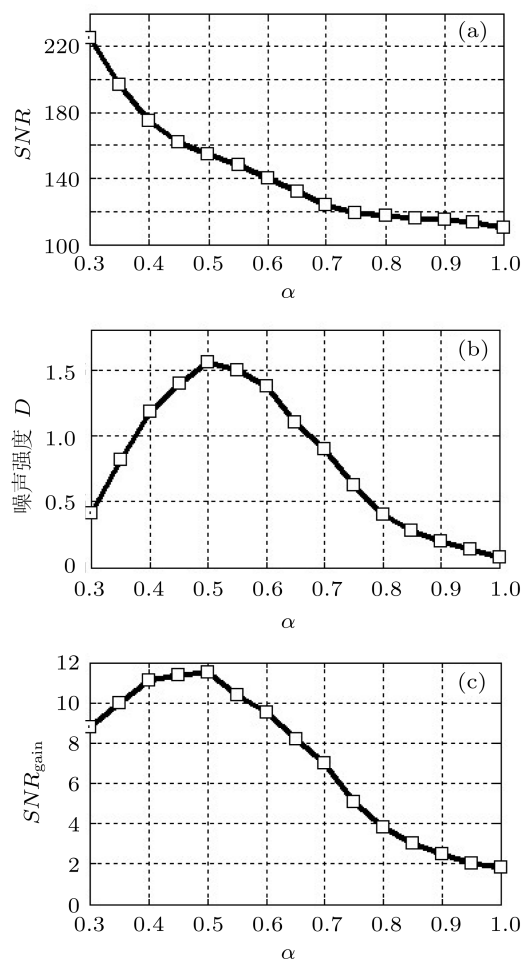


图 4 最佳随机共振时的信噪比、噪声强度和信噪比增益 (a) 最佳随机共振时的信噪比; (b) 最佳随机共振时的噪声强度; (c) 最佳随机共振时的信噪比增益

图 4(c) 给出了不同阶数时,最佳共振时的信噪

比增益. 可见分数阶系统的信噪比的改善程度明显好于整数阶系统, 并且信噪比增益在  $\alpha = 0.5$  达到最大值.

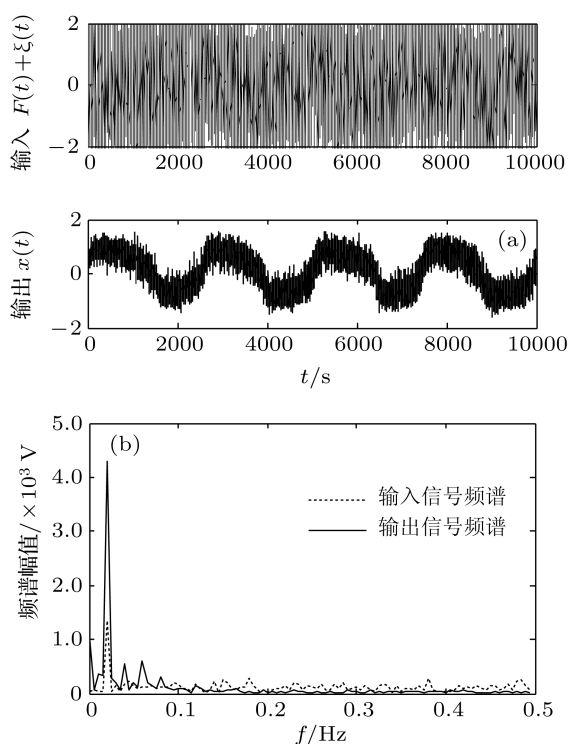


图5 最佳共振时 Langevin 方程的输入输出和频谱幅值比较 (a)  $\alpha = 0.5$  时的输入输出; (b)  $\alpha = 0.5$  时输入输出频谱幅值

图5给出了发生最佳随机共振时, 阶数为  $\alpha = 0.5$  时系统的输入信号和输出信号, 以及输入信号和输出信号的频谱幅值的对比. 可见, 输出信号比

输入噪声加周期信号的周期性更加明显, 输出信号的频谱幅值在输入信号频率  $f = 0.02$  处的脉冲值明显高于输入信号在该处的脉冲值, 因而输出信号的信噪比得到显著提高.

## 4 结论

迄今为止, 关于随机共振的研究大部分仍基于传统的统计物理理论和整数阶微积分数学模型. 然而, 自然界中存在大量的复杂系统, 如多孔渗水系统, 聚合物系统中的激励动力学, 不均匀介质中的湍流扩散, 单分子光谱等, 它们在空间上表现出明显的大范围相关性, 在时间上表现出对过去状态的记忆性质. 这些过程不宜用传统的扩散理论, 或者传统的数学方法进行描述, 因而本文将传统的随机共振理论推广到分数阶领域, 研究了分数阶 Langevin 方程的随机共振.

首先通过对广义 Langevin 方程阻尼核函数的适当选取, 在过阻尼的情形下, 推导出分数阶 Langevin 方程. 并结合反常扩散理论和分数阶导数的记忆性质, 讨论了分数阶 Langevin 方程的物理意义, 进而, 得出分数阶 Langevin 方程产生随机共振的原理以及阶数的范围. 最后, 通过研究不同阶数下分数阶 Langevin 方程的输出信噪比, 以及产生最佳随机共振时的噪声强度之间关联的分析, 得出结论, 在阶数  $0.26 < \alpha \leq 1$  范围内, 分数阶 Langevin 方程可以产生随机共振, 并且信噪比增益明显好于整数阶情形.

- [1] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 80 页]
- [2] Deng W H, Barkai E 2009 *Phys. Rev. E* **79** 011112
- [3] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [4] Lin M, Fang L M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2136 (in Chinese) [林敏, 方利民 2009 物理学报 **58** 2136]
- [5] Yang J H, Liu X B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050504
- [6] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Modern Phys.* **70** 223
- [7] Huang F, Liu F 2005 *The ANZIAM J.* **46** 317
- [8] Liu F, Turner I, Anh V 2003 *J. Appl. Math. Comp.* **13** 233
- [9] Wheatcraft S W, Benson D A, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Res.* **36** 1403
- [10] De Andrade M F, Lenzi E K, Evangelista L R, Mendes R S, Malacarne L C 2005 *Phys. Lett. A* **347** 160
- [11] Kenkre V M, Kus M, Dunlap D H, Parris P E 1998 *Phys. Rev. E* **58** 99
- [12] Dong X J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 70
- [13] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
- [14] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego, CA: Academic Press)
- [15] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I 1993 *Marichev, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications* (New York, Gordon and Breach Science Publ.)
- [16] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press)
- [17] Kou S C, X Sunney X 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 180603
- [18] Kou S C 2008 *Ann. Appl. Statistics* **2** 501
- [19] Hill T 1986 *An Introduction to Statistical Thermodynamics* (New York: Dover)
- [20] Ahmed E, Elgazzar A S 2007 *Physica A* **379** 607
- [21] Tarasov V E 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 465102
- [22] Tarasov V E 2009 *J. Math. Phys.* **50** 122703
- [23] Goychuk I, Hanggi P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 70601
- [24] Fauve S, Hesolt F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5

# Overdamped fractional Langevin equation and its stochastic resonance\*

Gao Shi-Long<sup>1)2)</sup> Zhong Su-Chuan<sup>1)</sup> Wei Kun<sup>1)</sup> Ma Hong<sup>1)†</sup>

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*College of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan 614000, China*)

(Received 11 August 2011; revised manuscript received 27 September 2011)

## Abstract

By choosing an appropriate damping kernel function of generalized Langevin equation, fractional Langevin equation (FLE) is derived in the case of overdamped condition. With the theory of anomalous diffusion and the memory of fractional derivatives, the physical meaning of FLE is discussed. Moreover, the internal mechanism of stochastic resonance about FLE is obtained. Finally, the numerical simulation shows that in a certain range of the order, stochastic resonance appears in FLE, and it is evident that the SNR gain in fractional Langevin equation is better than that of the integer-order situation.

**Keywords:** stochastic resonance, fractional Langevin equations, bistable system, memory

**PACS:** 05.10.Gg, 02.50.-r

---

\* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10731050) and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 20100471651, 201104693).

† E-mail: mahong@scu.edu.cn