

基于改进脉冲控制方法的超混沌系统同步*

马铁东^{1)†} 江伟波¹⁾ 浮洁²⁾ 薛方正¹⁾

1) (重庆大学自动化学院, 重庆 400044)

2) (重庆大学光电工程学院, 光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)

(2011年9月21日收到; 2011年10月10日收到修改稿)

针对一类整数阶与分数阶超混沌系统的同步问题, 分别提出了改进的脉冲同步方法. 基于 Lyapunov 稳定性理论与脉冲微分方程理论, 给出超混沌系统一组新的全局渐近同步判据. 特别地, 当脉冲间距与脉冲控制增益为常数时, 可获得更为简单和实用的同步判据. 与现有结果相比, 所得充分条件更次保守且更为实用. 通过对超混沌 Chen 系统同步的数值仿真研究, 验证了所提方法的有效性和可行性.

关键词: 超混沌系统, 同步, 脉冲控制, 分数阶混沌系统

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

1 引言

分数阶微积分已有 300 多年的历史, 其发展几乎与整数阶微积分同步, 但由于长期没有实际应用背景而发展缓慢. 1983 年 Mandelbort^[1] 首次指出了自然界及众多科学技术领域中存在大量的分数维事实, 且在整数阶微积分与分数阶微积分理论描述的动力学系统之间存在自相似现象. 作为分形几何和分数维的动力学基础, 分数阶微积分开始获得新的发展并成为当前国际上的研究热点.

最近, 分数阶混沌系统得到了广泛的关注. 研究发现, 部分整数阶混沌系统的阶数变为分数时, 系统仍呈现混沌行为, 且更能反映系统所呈现的物理现象, 如分数阶 Chua 电路^[2]、分数阶 Duffing 系统^[3]、分数阶 Jerk 模型^[4]、分数阶 Lorenz 系统^[5]、分数阶 Chen 系统^[6]、分数阶 Lü 系统^[7]、分数阶 Rössler 系统^[8]、分数阶统一系统^[9] 等.

另一方面, 自从 Pecora 和 Carroll^[10] 首次在电子学电路的实验中实现了两个混沌系统的同步以来, 就掀起了混沌同步的研究热潮^[11-18]. 由于分数阶混沌信号在加密性能上的潜在优势, 使得分数阶混沌系统同步在保密通信、信号处理和系

统控制等领域体现出巨大的应用前景. 目前, 人们已提出许多分数阶混沌同步方法, 如主动控制方法^[19,20]、滑模变结构控制方法^[21,22]、自适应控制方法^[23,24]、无源控制方法^[25]、脉冲控制方法^[26,27] 等. 其中脉冲控制能够用很小的控制脉冲即能镇定混沌系统, 被广泛应用于混沌系统的稳定与同步. 在同步过程中, 响应系统只需获取驱动系统脉冲时刻的状态信息即可实现同步控制, 这大大降低了传送信息被破译的可能性, 提高了保密性^[28-34].

本文首先针对整数阶超混沌 Chen 系统, 采用响应系统与驱动系统状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 从而实现两个整数阶超混沌 Chen 系统的全局渐近同步, 与文献^[26] 研究结果相比, 所提方法不仅降低了全局渐近同步条件的保守性, 而且扩大了脉冲间距的稳定区域, 控制方法简单快速且适用于大多数典型的超混沌系统. 其次, 在上述结果基础上, 针对分数阶超混沌 Chen 系统脉冲同步问题, 本文通过构造新的响应系统, 将原分数阶混沌系统同步问题转化为整数阶同步误差系统的脉冲控制问题, 给出了分数阶混沌同步新的间接分析方法, 最后通过数值仿真结果验证了上述方法

* 国家自然科学基金 (批准号: 61104080)、重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC, 2010BB2238)、教育部博士点基金 (批准号: 20100191120025) 和中国博士后科学基金 (批准号: 20100470813, 20100480043) 资助的课题.

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn

的有效性.

2 整数阶超混沌系统的脉冲同步

考虑如下超混沌 Chen 系统^[35]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 + cx_2 - x_1x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - dx_3, \\ \dot{x}_4 = x_1 + g, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为系统状态变量, 当参数 $a = 36, b = -16, c = 28, d = 3$ 和 $g = 0.3$ 时, 系统 (1) 呈现混沌行为, 其混沌吸引子如图 1 所示. 系统 (1) 也可表示成如下状态空间形式:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \phi(x(t)), \quad (2)$$

其中 Ax 与 $\phi(x)$ 分别为系统的线性和非线性部分, 即

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \\ g \end{bmatrix}.$$

令系统 (2) 为驱动系统, 当考虑相同结构的混沌系统同步时, 可得如下形式的响应系统:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \phi(y(t)), \quad (3)$$

其中 $y(t) \in \mathbb{R}^4$ 为响应系统 (3) 的状态向量.

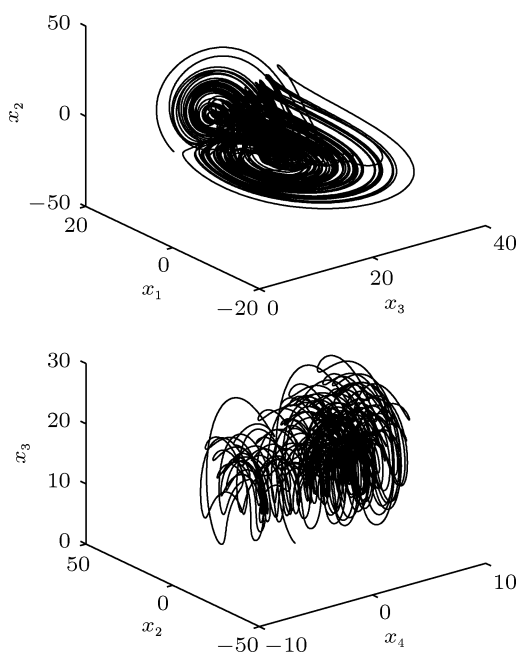


图 1 超混沌 Chen 系统 (1) 的混沌吸引子

设离散时刻集合 $\{t_k\}$ 满足 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, 且初始时刻 t_0 满足 $0 \leq t_0 < t_1$. 采用系统 (3) 与系统 (2) 状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 则可得如下脉冲被控响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + \phi(y(t)), t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ \Delta y = y(t_k^+) - y(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k, \end{cases} \quad (4)$$

其中 t_k^+ 与 t_k^- 分别表示脉冲时刻 t_k 前后的瞬时, $\lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h) = y(t_k^+), \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k - h) = y(t_k^-) = y(t_k)$ 表示状态 $y(t)$ 在 t_k 时刻满足左连续, $e(t) = y(t) - x(t) = [y_1(t) - x_1(t), y_2(t) - x_2(t), \dots, y_n(t) - x_n(t)]^T$ 为同步误差向量, $B_k \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 为脉冲控制增益矩阵.

由系统 (2) 和 (4), 以及驱动系统的状态连续性 (即 $x(t_k) = x(t_k^-)$), 可得如下同步误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) + \psi(x(t), y(t)), t \neq t_k, \\ \Delta e = e(t_k^+) - e(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \phi(y) - \phi(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1x_3 - y_1y_3 \\ y_1y_2 - x_1x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -y_1 & 0 \\ x_2 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\ &= N(x, y)e, \end{aligned}$$

$N(x, y)$ 是由状态 x 和 y 决定的范数有界矩阵, 大部分典型超混沌系统均可满足 $\psi(x, y) = N(x, y)e$, 如超混沌 Lorenz 系统、超混沌 Rössler 系统、超混沌统一系统等. 我们的目标就是设计控制增益 B_k 与脉冲间距 $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ 实现同步误差系统 (5) 的全局渐近稳定, 即实现具有不同初始条件的脉冲被控响应系统 (4) 与驱动系统 (2) 的全局渐近同步.

注释 1 根据混沌系统的状态有界性, 存在常数 $M > 0$ 满足 $|x_2| \leq M, |x_3| \leq M$.

定理 1 令 β_k 和 λ 分别为 $(I + B_k)^T(I + B_k)$ 和 $0.5(A + A^T)$ 的最大特征值.

i) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}M \geq 0$, 且存在常数 $\gamma > 1$ 满

足如下不等式

$$\gamma\beta_k \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})\tau_k) \leq 1, \quad (6)$$

ii) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$, 且存在常数 ρ ($0 \leq \rho < -(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})$) 满足如下不等式

$$\beta_k \leq \exp(\rho\tau_k), \quad (7)$$

则同步误差系统 (5) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (4) 渐近同步于驱动系统 (2).

证明 取 Lyapunov 函数为 $V(e) = 0.5e^T e$, 则对于 $t \in (t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$, $V(e)$ 沿误差系统 (5) 的解求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0.5\dot{e}^T e + 0.5e^T \dot{e} \\ &= 0.5(Ae + N(x, y)e)^T e + 0.5e^T (Ae + N(x, y)e) \\ &= 0.5e^T (A + A^T)e + 0.5e^T (N(x, y) + N^T(x, y))e. \end{aligned}$$

令 $N(x, y) + N^T(x, y)$ 的最大特征值为 λ_N , 则由

$$N(x, y) + N^T(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可得 $0 \leq \lambda_N = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^2} = \sqrt{2}\mathcal{M}$, 所以

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \lambda e^T e + 0.5\lambda_N e^T e \\ &\leq \lambda e^T e + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{M}e^T e \\ &= (2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})V(e). \end{aligned} \quad (8)$$

于是有

$$V(e(t)) \leq V(e(t_{k-1}^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_{k-1})), \quad t \in (t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

另一方面, 当 $t = t_k$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t_k^+)) &= 0.5((I + B_k)e(t_k))^T (I + B_k)e(t_k) \\ &= 0.5e^T(t_k)(I + B_k)^T (I + B_k)e(t_k) \\ &\leq \beta_k V(e(t_k)). \end{aligned} \quad (10)$$

对于 $t \in (t_0, t_1]$, 由不等式 (9) 可得

$$V(e(t)) \leq V(e(t_0^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)),$$

于是有

$$V(e(t_1)) \leq V(e(t_0^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_1 - t_0))$$

和

$$\begin{aligned} V(e(t_1^+)) &\leq \beta_1 V(e(t_1)) \\ &\leq \beta_1 V(e(t_0^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_1 - t_0)). \end{aligned}$$

类似地, 对于 $t \in (t_1, t_2]$, 则有

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(t_1^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_1)) \\ &\leq \beta_1 V(e(t_0^+)) \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)), \end{aligned}$$

因此, 对于 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, 可得

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)). \end{aligned} \quad (11)$$

i) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} \geq 0$, 且存在常数 $\gamma > 1$, 则由 (6) 和 (11) 式可得

$$\begin{aligned} V(e) &\leq V(e(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)) \\ &\leq V(e(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_{k+1} - t_0)) \\ &= V(e(t_0^+)) \beta_1 \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_1 - t_0)) \\ &\quad \times \beta_2 \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_2 - t_1)) \cdots \\ &\quad \times \beta_k \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_k - t_{k-1})) \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_{k+1} - t_k)) \\ &\leq \frac{V(e(t_0^+))}{\gamma^k} \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t_{k+1} - t_k)). \end{aligned} \quad (12)$$

ii) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$, 且存在常数 ρ ($0 \leq \rho < -(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})$), 则由 (7) 和 (11) 式可得

$$\begin{aligned} V(e) &\leq V(e(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)) \\ &\leq V(e(t_0^+)) \exp(\rho(t_k - t_0)) \\ &\quad \times \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)) \\ &\leq V(e(t_0^+)) \exp((\rho + 2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})(t - t_0)). \end{aligned} \quad (13)$$

由 (12) 和 (13) 式可知, 当 $t \rightarrow 0$ (即 $k \rightarrow 0$) 时, $V(e(t)) \rightarrow 0, e(t) \rightarrow 0$. 则系统 (5) 在原点是全局渐近稳定的, 即系统 (4) 与系统 (2) 是全局渐近同步的, 证毕.

注释 2 文献 [26] 研究了与本文相同的超混沌 Chen 系统脉冲同步问题, 与文献 [26] 相比, 定理 1 给出了更次保守的判据, 进而可获得脉冲控制更大的稳定域. 主要改进之处在于改善了文献 [26] 中的部分不等式缩放条件, 具体如下:

i) 在文献 [26] 中, 利用混沌状态的有界性, 引入正常数 M 并满足 $|x_i| \leq M$ 和 $|y_i| \leq M, i = 1, 2, 3, 4$. 相比之下, 本文定理 1 中对应的正常数 \mathcal{M} 只需满足 $|x_2| \leq \mathcal{M}$ 和 $|x_3| \leq \mathcal{M}$ (见注 1), 显

然有 $\mathcal{M} \leq M$ 成立.

ii) 在对 Lyapunov 函数的求导过程中, 由文献 [26] 的 (13) 式有 $\dot{V}(e) \leq 2(\lambda + M)V(e)$. 相比之下, 本文定理 1 通过引入对矩阵 $N(x, y) + N^T(x, y)$ 最大特征值的估计 (见 (8) 式), 得到 $\dot{V}(e) \leq (2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})V(e)$.

由以上讨论可知, 在超混沌 Chen 系统脉冲同步研究中, 文献 [26] 和本文定理 1 给出的充分条件分别为 $\gamma\beta_k \exp((2\lambda + 2M)\tau_k) \leq 1$ 和 $\gamma\beta_k \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})\tau_k) \leq 1$, 进而可得相应的脉冲控制稳定域 (即当脉冲控制增益 β_k 固定条件下可获得的最大脉冲间距 τ_k) 分别为 $\tau_k \leq -\ln(\gamma\beta_k)/(2\lambda + 2M)$ 和 $\tau_k \leq -\ln(\gamma\beta_k)/(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})$. 显然, 本文定理 1 给出了较文献 [26] 更次保守的充分条件, 可以获得更大的脉冲控制稳定域.

注释 3 由文献 [26] 中的 (13) 式 (即 $\dot{V}(e) \leq 2(\lambda + M)V(e)$) 可知, 在对 Lyapunov 函数导数的估计中, 仅考虑了 $\lambda + M \geq 0$ 的情况, 而在讨论不同系统或相同系统不同参数的同步问题时, 也可能存在 $\lambda + M < 0$ 的情况. 针对该问题, 本文定理 1 中充分考虑了以上符号的不确定性, 分别考虑 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} \geq 0$ 和 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$ 二种情况 (见 (12) 和 (13) 式), 以使所得判据更加符合实际系统的情况.

考虑到实际应用中控制器的可实现性与可操作性, 脉冲间距和控制增益常选为常数, 于是根据定理 1 可获得如下结果.

推论 1 假定 $\tau_k = \tau$, 且 $B_k = B$, β 和 λ 分别为 $(I + B)^T(I + B)$ 和 $0.5(A + A^T)$ 的最大特征值.

i) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} \geq 0$, 且存在常数 $\gamma > 1$ 满足如下不等式

$$\gamma\beta \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})\tau) \leq 1, \quad (14)$$

ii) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$, 且存在常数 ρ ($0 \leq \rho < -(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})$) 满足如下不等式

$$\beta \leq \exp(\rho\tau), \quad (15)$$

则同步误差系统 (5) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (4) 渐近同步于驱动系统 (2).

3 分数阶超混沌系统的脉冲同步

文献 [26, 27] 分别考虑了分数阶超混沌 Chen 系统与分数阶 Newton-Leipnik 系统的脉冲同步问题, 然而, 以上文献中所设计的脉冲控制器仅适用

于整数阶混沌系统, 仅在数值仿真部分将所设计的控制器用于分数阶混沌同步, 缺少理论依据. 基于此, 本节将通过构造新的响应系统, 实现分数阶误差系统转化为整数阶误差系统, 给出分数阶混沌系统脉冲同步的间接分析方法 [36,37].

考虑如下分数阶超混沌 Chen 系统

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + \phi(x(t)), \quad (16)$$

其中

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

表示 Riemann-Liouville 分数阶导数 [38], $\Gamma(\alpha)$ 为伽玛函数, $\alpha \in (0, 1]$, 矩阵 A 与非线性函数 $\phi(x(t))$ 同系统 (2), 当 $\alpha = 0.9$ 时, 其对应混沌吸引子如图 2 所示.

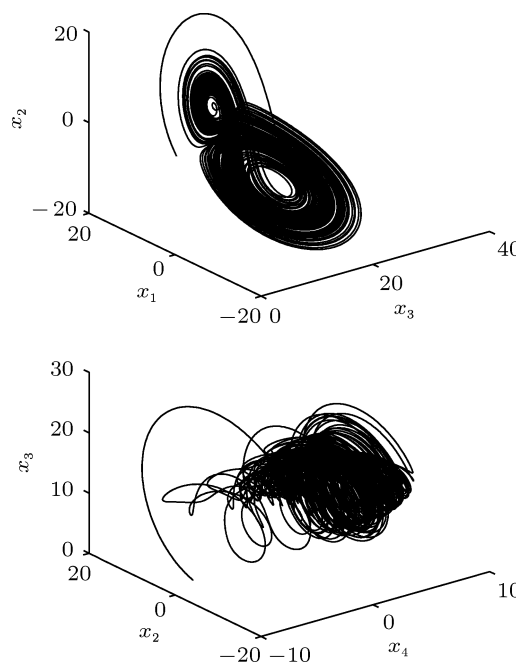


图 2 分数阶超混沌 Chen 系统 (16) 的混沌吸引子

为研究分数阶超混沌 Chen 系统同步问题, 可将系统 (16) 作为驱动系统, 并选择如下形式的响应系统:

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + \phi(y(t)). \quad (17)$$

采用系统 (17) 与系统 (16) 状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 则可得如下脉冲被控响应系统:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = Ay(t) + \phi(y(t)), t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ \Delta y = y(t_k^+) - y(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k, \end{cases} \quad (18)$$

由系统 (16) 和 (18) 可得如下同步误差系统:

$$\begin{cases} D^\alpha e(t) = Ae(t) + \psi(x(t), y(t)), t \neq t_k, \\ \Delta e = e(t_k^+) - e(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k. \end{cases} \quad (19)$$

针对系统 (16) 和 (18) 的同步问题, 通常可通过研究误差系统 (19) 的稳定性来实现. 然而, 据作者所知, 针对形如系统 (19) 的分数阶脉冲微分系统渐近稳定性分析问题, 目前还没有成熟的理论. 为解决该问题, 本节将通过构造一个新的脉冲可控响应系统, 以将分数阶脉冲系统 (19) 转化为整数阶脉冲系统, 具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + \phi(y(t)) + \eta(x(t)), t \neq t_k, \\ \Delta y = y(t_k^+) - y(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k, \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\eta(x(t)) = \dot{x}(t) - D^\alpha x(t)$, $\dot{x}(t)$ 与 $D^\alpha x(t)$ 可来自于系统 (16)(注意到在对系统 (16) 进行分析与仿真过程中, $D^\alpha x(t)$ 可直接获得, 由于整数阶是分数阶的特例, 则当阶次 $\alpha = 1$ 时, $D^\alpha x(t) = \dot{x}(t)$ 是存在的, 由此使得构造新的响应系统 (20) 成为可能). 于是由系统 (16) 和 (20), 可得如下新的同步误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A + N(x(t), y(t)))e(t), t \neq t_k, \\ \Delta e = e(t_k^+) - e(t_k^-) = B_k e(t_k), t = t_k. \end{cases} \quad (21)$$

显然, 通过构造响应系统 (20), 分数阶混沌系统同步问题转化为整数阶同步误差系统 (21) 的脉冲控制问题. 注意到误差系统 (21) 与 (5) 具有相同的形式, 因此, 我们容易获得如下结果.

定理 2 令 β_k 和 λ 分别为 $(I + B_k)^T(I + B_k)$ 和 $0.5(A + A^T)$ 的最大特征值.

i) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} \geq 0$, 且存在常数 $\gamma > 1$ 满足如下不等式

$$\gamma\beta_k \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})\tau_k) \leq 1, \quad (22)$$

ii) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$, 且存在常数 $\rho (0 \leq \rho < -(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M}))$ 满足如下不等式

$$\beta_k \leq \exp(\rho\tau_k), \quad (23)$$

则同步误差系统 (21) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (20) 渐近同步于驱动系统 (16).

推论 2 假定 $\tau_k = \tau$, 且 $B_k = B$, β 和 λ 分别为 $(I + B)^T(I + B)$ 和 $0.5(A + A^T)$ 的最大特征值.

i) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} \geq 0$, 且存在常数 $\gamma > 1$ 满足如下不等式

$$\gamma\beta \exp((2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M})\tau) \leq 1, \quad (24)$$

ii) 如果 $2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M} < 0$, 且存在常数 $\rho (0 \leq$

$\rho < -(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M}))$ 满足如下不等式

$$\beta \leq \exp(\rho\tau), \quad (25)$$

则同步误差系统 (21) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (20) 渐近同步于驱动系统 (16).

4 数值仿真

由图 1 所示的超混沌 Chen 系统混沌吸引子, 可得 $\mathcal{M} = 30$. 而由

$$0.5(A + A^T) = \begin{bmatrix} -36 & 10 & 0 & 0.5 \\ 10 & 28 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得 $\lambda = 29.5321$. 取 $\gamma = 1.1$, $B_k = B = -0.8I$, 则有 $\beta = 0.04$. 由推论 1 中 (14) 式, 可获得如下的稳定域范围 (即允许最大的脉冲间距):

$$0 \leq \tau \leq -\ln(\gamma\beta)/(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M}) = 0.0308.$$

取驱动系统初值为 $[4, 1, 5, 2]^T$, 响应系统初值为 $[7, 4, 2, 5]^T$, 脉冲间距为 $\tau = 0.03$, 仿真结果见图 3.

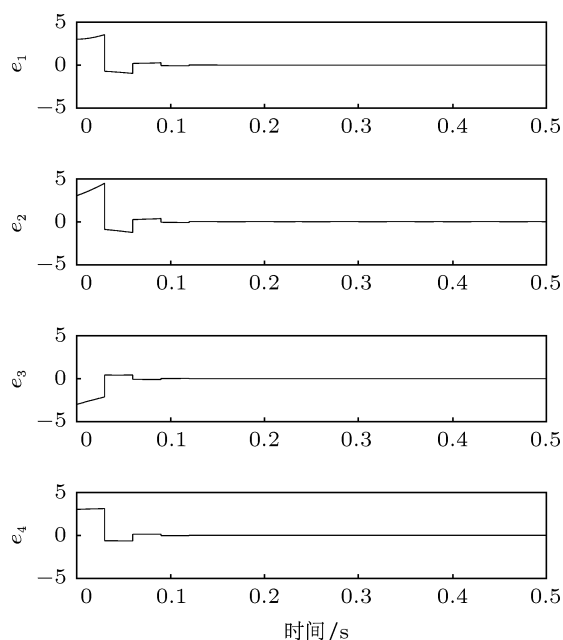


图 3 $\tau = 0.03$ 和 $B = -0.8I$ 时超混沌 Chen 系统的同步误差曲线

同理, 由图 2 的分数阶超混沌 Chen 系统的混沌吸引子, 可得 $\mathcal{M} = 30$. 取 $\gamma = 1.1$, $B_k = B = -0.7I$, 则有 $\beta = 0.09$. 由推论 2 中 (24) 式, 可获得如下最大的脉冲间距:

$$0 \leq \tau \leq -\ln(\gamma\beta)/(2\lambda + \sqrt{2}\mathcal{M}) = 0.0228.$$

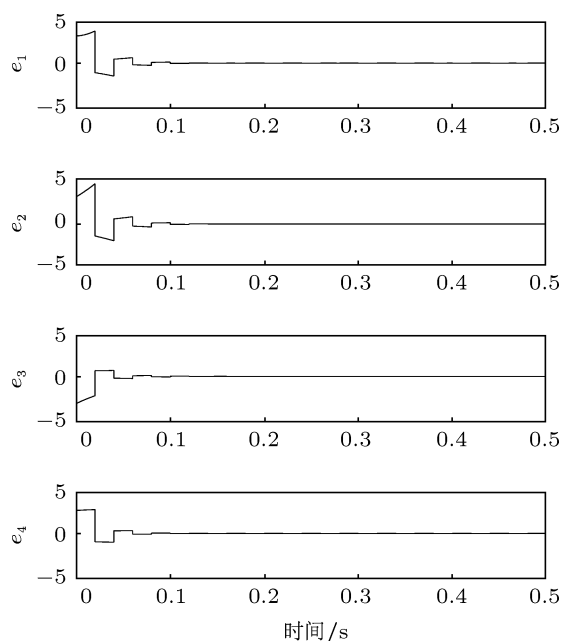


图4 $\tau = 0.02$ 和 $B = -0.7I$ 时分数阶超混沌 Chen 系统的同步误差曲线

取驱动系统初值为 $[4, 1, 5, 2]^T$, 响应系统初值为 $[7, 4, 2, 5]^T$, 脉冲间距为 $\tau = 0.02$, 仿真结果见图 4.

5 结论

本文针对一类整数阶(分数阶)超混沌系统的同步问题, 提出了改进的脉冲同步方法. 该方法采用响应系统与驱动系统状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 驱动两个超混沌系统达到全局渐近同步, 同时给出更次保守且更为实用的全局渐近同步判据. 通过构造合适的响应系统, 可将分数阶混沌同步问题转化为整数阶误差系统的稳定性分析问题, 提供了一种有效的间接分析方法. 对于分数阶混沌系统的脉冲同步问题, 可归结为分数阶脉冲微分系统的稳定性分析问题, 目前该问题还未见报道, 作者也将针对该问题展开后续研究.

- [1] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
- [2] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [3] Arena P, Caponetto R, Fortuna L, Porto D 1997 *Proceedings ECCTD*, Budapest **42** p1259
- [4] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 339
- [5] Yu Y G, Li H X, Wang S, Yu J Z 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 1181
- [6] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons and Fractals*. **27** 685
- [7] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [8] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [9] Wang X Y, He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1485 (in Chinese) [王兴元, 贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485]
- [10] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [11] Yang D S, Zhang H G, Zhao Y, Song C H, Wang Y C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1562 (in Chinese) [杨东升, 张化光, 赵琰, 宋崇辉, 王迎春 2010 物理学报 **59** 1562]
- [12] Zhang H G, Zhao Y, Yu W, Yang D S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4056
- [13] Zhang H G, Huang W, Wang Z L, Chai T Y 2006 *Phys. Lett. A* **350** 363
- [14] Zhang H G, Wang Z L, Liu D R 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 3505
- [15] Zhao Y, Zhang H G, Zheng C D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 529
- [16] Sun Q Y, Zhang H G, Zhao Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070512
- [17] Yang D S, Zhang H G, Li A P, Meng Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3121 (in Chinese) [杨东升, 张化光, 李爱平, 孟子怡 2007 物理学报 **56** 3121]
- [18] Wang Y C, Zhang H G, Wang X Y, Yang D S 2010 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **40** 1468
- [19] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 3536
- [20] Taghvafard H, Erjaee G H 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 4079
- [21] Cao H F, Zhang R X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050510 (in Chinese) [曹鹤飞, 张若洵 2011 物理学报 **60** 050510]
- [22] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050511 (in Chinese) [孙宁, 张化光, 王智良 2011 物理学报 **60** 050511]
- [23] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
- [24] Odibat Z M 2010 *Nonlinear Dyn.* **60** 479
- [25] Wu C J, Zhang Y B, Yang N N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060505
- [26] Wang X Y, Zhang Y L, Li D, Zhang N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030506
- [27] Sheu L J, Tam L M, Lao S K, Kang Y, Lin K T, Chen J H, Chen H K 2009 *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **10** 33
- [28] Zhang H G, Ma T D, Huang G B, Wang Z L 2010 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **40** 831
- [29] Ma T D, Fu J, Sun Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090502
- [30] Zhang H G, Ma T D, Yu W, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3616
- [31] Ma T D, Zhang H G, Wang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3796 (in Chinese) [马铁东, 张化光, 王智良 2007 物理学报 **56** 3796]
- [32] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3742
- [33] Zhang H G, Fu J, Ma T D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 969
- [34] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3751
- [35] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Yu D C 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **33** 922
- [36] Wu Z M, Xie J Y 2007 *Chin. Phys. B* **16** 1901
- [37] Fu J, Yu M, Ma T D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120508
- [38] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic)

Synchronization of hyperchaotic systems via improved impulsive control method*

Ma Tie-Dong^{1)†} Jiang Wei-Bo¹⁾ Fu Jie²⁾ Xue Fang-Zheng¹⁾

1) (College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

2) (Key Laboratory of Optoelectronic Technology and System, Ministry of Education, College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(Received 21 September 2011; revised manuscript received 10 October 2011)

Abstract

The improved impulsive control method is proposed to realize the complete synchronization of integral and fractional order hyperchaotic systems. Some effective sufficient conditions are produced to realize the asymptotical stability of synchronization error system. In particular, some simple and practical conditions are derived in synchronizing the chaotic systems by choosing constant impulsive distances and control gains. Compared with the existing results, the main results are less conservative by relaxing some unnecessary inequality constraints. Simulation results show the effectiveness and the feasibility of the proposed impulsive controller.

Keywords: hyperchaotic system, synchronization, impulsive control, fractional order chaotic system

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104080), the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant No. CSTC, 2010BB2238), Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100191120025), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 20100470813, 20100480043).

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn