物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 11 (2012) 110402

整体单极子黑洞引力场中的加速效应*

邵建舟 王永久†

(湖南师范大学物理研究所, 长沙 410081)

(2011 年 3 月 23 日收到; 2011 年 10 月 2 日收到修改稿)

给出了含有整体单极子的黑洞的引力场中试验粒子加速度的表达式, 讨论了整体单极子对加速效应的贡献. 结果表明, 由于整体单极子的存在, 产生了斥力效应; 当速度趋近于光速时, 中性粒子在引力场中受到了斥力作用. 这是牛顿力学中所没有的.

关键词: 广义相对论, 测地线方程, 整体单极子, 引力效应

PACS: 04.60.Kz, 04.70.Dy, 97.60.Lf

1 引 言

在牛顿力学中, 引力场中试验粒子的加速度和引力之间的联系由运动方程确定, 场对物体的作用总表现为引力而没有斥力. 在广义相对论中, 不仅运动方程复杂化了, 而且它们的解释也复杂化了, 引力场中的试验粒子等效于弯曲时空中的自由粒子沿测地线作惯性运动 [1], 不涉及加速度和力的概念. 但当采用局部 Lorentz 截面来研究物体运动时, 就又回到了加速度和力的概念. 通常文献中只给出加速度的一阶近似表达式, 本文给出了广义相对论加速度的解析表达式.

对于广义相对论加速度的推导, 本文采用了 Landau 和 Lifshitz[2] 给出的关于本征时、坐标时以及速度、加速度等的基本概念和表述. 虽然选取了局部 Lorentz 截面, 回到了加速度和力的概念, 但由于所有推导的公式中均含有该点的度规张量, 因此所得结果均考虑了引力场的存在, 或者说均在弯曲时空中, 所以得到的结果均属于广义相对论, 与牛顿力学中的结果截然不同.

引力场中的加速效应 (含斥力效应) 属于广义相对论引力效应的一种. 国内外已有许多文献讨论了各种广义相对论的引力效应 [3]. 文献 [4,5] 讨论了 Reissner-Nordstrom 引力场中的负加速度效应, 得到了加速度变号的临界面为 $r_{\rm c} = e^2/2m$, 另外, 还讨论了 Kerr-Newman-Kasuga 引力场中的斥力效应, 得到了引力变斥力的临界面为 $r_{\rm c} = (e^2+q^2)/2m$, 其中 e, q 和 m 分别为中心天体的电荷量、磁荷量和质量.

早期宇宙的相变会产生许多拓扑缺陷. 拓扑缺陷的类型依赖于真空流形 μ 的拓扑. Barriola 和 Vilenkin[6] 得到了 Einstein 方程的一个近似解, 该解描述了一个具有整体单极子的黑洞. 这样一个黑洞可以在宇宙早期由一个施瓦西黑洞吞并一个单极子形成. 另外, Mukunda 和 Vilenkin[7] 得到了一个包含宇宙弦的真空解, 该时空具有一个锥形的拓扑. 对于这类黑洞的引力效应国内外许多文章都有讨论 [8]. 本文主要讨论该类含整体单极子黑洞的引力场中的加速效应.

2 加速度的表达式

在一般的物理时空中, 度规可写成如下形式 [2]:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + 2g_{0i}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i + g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2, \quad (1)$$

其中 g_{ij} 表示引力场的度规. 假设一个信号从某一 B 点出发, 向与之相距无限小的 A 点行进, 然后立即由从 A 点返回到 B 点. 对于光信号而言, 相邻

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB832803)、国家自然科学基金 (批准号: 10873004)、湖南省教育厅基金 (批准号: 08B051) 和湖南师范大学科学研究基金资助的课题.

† E-mail: wyj@hunnu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

两个事件的间隔 $\mathrm{d}s^2=0$, 解关于 $\mathrm{d}x^0$ 的方程得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^{0(1)}=&\frac{1}{g_{00}}\Big[-g_{0i}\mathrm{d}x^i\\&-\sqrt{(g_{0i}g_{0j}-g_{ij}g_{00})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\Big],\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^{0(1)}=&\frac{1}{g_{00}}\Big[-g_{0i}\mathrm{d}x^i\\&+\sqrt{(g_{0i}g_{0j}-g_{ij}g_{00})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\Big].\end{aligned}\tag{3}$$

如果 x^0 为信号到达 A 点的瞬间, 那么信号从 B 点出发的瞬间为 $x^0+\mathrm{d}x^{0(1)}$, 而信号回到 B 点的瞬间则为 $x^0+\mathrm{d}x^{0(2)}$. 根据同时性原理, A 点的瞬时 x^0 和 B 点的瞬时 $\{[x^0+\mathrm{d}x^{0(1)}]+[x^0+\mathrm{d}x^{0(2)}]\}/2$ 为同时. 代入 (2), (3) 式得到在 A 点的瞬时 x^0 和在 B 点的瞬时 $x^0-\dfrac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i$ 为同时. 如果一个试验粒子在 x^0 时刻从 A 点出发, 在 $x^0+\mathrm{d}x^0$ 时刻到达相隔无限小距离的 B 点, 那么对于 B 点的观测者来说, 粒子却是在 $x^0-\dfrac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i$ 时刻从 A 点出发, 因此对 B 点的观测者来说, 事件的时间间隔为

$$(x^0+\mathrm{d}x^0)-\Big(x^0-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i\Big)=\mathrm{d}x^0+\frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i.\tag{4}$$

将 (4) 式乘以 $\dfrac{\sqrt{g_{00}}}{c}$, 其中 c 为真空中的光速. 得到在 B 点的观测者的时间间隔

$$\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\Big(\mathrm{d}x^0+\frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i\Big).\tag{5}$$

因为是在 Lorentz 局部惯性系中, $v^i=\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ 和 $a^i=\dfrac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}$ 分别表示速度和加速度, 所以根据 (5) 式可以得到

$$\mathrm{d}x^0=c\mathrm{d}t\Big(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{v^i}{c}\Big).\tag{6}$$

测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\varGamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=0,\tag{7}$$

其中 $\varGamma^\lambda_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}g^{\lambda\tau}(g_{\mu\tau,\nu}+g_{\nu\tau,\mu}-g_{\mu\nu,\tau})$, λ 为短程线参数, 试验粒子的三维加速度表示为

$$g^i=\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}.\tag{8}$$

由 (7) 式得到 [9]

$$\begin{aligned}g^i=&-\varGamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}\\=&-\varGamma^i_{00}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}-\varGamma^i_{0k}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}\\&-\varGamma^i_{0j}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}-\varGamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda},\end{aligned}\tag{9}$$

$$\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{c\mathrm{d}t}{c\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad\beta=\frac{v^i}{c}.\tag{10}$$

其中 τ 为本征时, 将 (6) 和 (10) 式代入 (9) 式, 得到三维加速度的表达式为

$$\begin{aligned}g^i=&\frac{1}{1-\beta^2}\Big[-\frac{\varGamma^i_{00}}{g_{00}}-\frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\Big(\varGamma^i_{0k}-\frac{g_{ok}}{g_{00}}\varGamma^k_{00}\Big)\frac{v^k}{c}\\&-\Big(\varGamma^i_{jk}-\frac{g_{oj}}{g_{00}}\varGamma^i_{0k}-\frac{g_{ok}}{g_{00}}\varGamma^i_{0j}\\&+\frac{g_{oj}g_{0k}}{g_0^2}\varGamma^i_{00}\Big)\frac{v^k}{c}\frac{v^j}{c}\Big].\end{aligned}\tag{11}$$

由纯空间度规

$$\gamma_{ij}=\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}-g_{ij}\tag{12}$$

得到三维空间的加速度

$$g=\sqrt{\gamma_{ij}g^ig^j}=\sqrt{\Big(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}-g_{ij}\Big)g^ig^j}.\tag{13}$$

3 包含一个整体单极子的黑洞引力场

包含一个整体单极子的黑洞解 [10]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big)\mathrm{d}t^2\\&-\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\varOmega^2,\end{aligned}\tag{14}$$

其中 m 为黑洞的质量, η 为对称破缺的尺度. 对典型的大统一尺度 $\eta\to10^{16}$ GeV, r 为径向坐标, $\mathrm{d}\varOmega^2=\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varPhi^2$, θ 和 $\varPhi$ 为球坐标. 根据 (14) 式得到度规张量不为零的分量:

$$g_{00}=1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r},\tag{15}$$

$$g_{11}=-\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big)^{-1},\tag{16}$$

$$g_{22}=-r^2,\tag{17}$$

$$g_{33}=-r^2\sin^2\theta,\tag{18}$$

代入 Christoffel 符号表达式

$$\varGamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\tau}\Big(g_{\mu\tau,\nu}+g_{\nu\tau,\mu}-g_{\mu\nu,\tau}\Big),\tag{19}$$

得到不为零的 $\varGamma^\lambda_{\mu\nu}$ 分量:

$$\varGamma^0_{01}=\varGamma^0_{10}=\frac{m}{r^2}\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big)^{-1},\tag{20}$$

$$\varGamma^1_{00}=\frac{m}{r^2}\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big),\tag{21}$$

$$\varGamma^1_{11}=-\frac{m}{r^2}\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big)^{-1},\tag{22}$$

$$\varGamma^1_{22}=-r\Big(1-8\pi\eta^2-\frac{2m}{r}\Big),\tag{23}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)\sin^2\theta, \tag{24}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \tag{25}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{26}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \tag{27}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta. \tag{28}$$

4 包含一个整体单极子黑洞引力场中的加速效应

将 (15)—(18) 式及 (20)—(28) 式代入 (11) 式得到包含一个整体单极子黑洞引力场中粒子的加速度的表达式

$$\begin{aligned} g^1 =& \frac{1}{1-\beta^2}\Big[-\frac{m}{r^2} + \frac{m}{r^2}\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)^{-1} \\ &\times \Big(\frac{v^1}{c}\Big)^2 + r\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)\Big(\frac{v^2}{c}\Big)^2 \\ &+ r\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)\sin^2\theta\Big(\frac{v^3}{c}\Big)^2\Big], \end{aligned} \tag{29}$$

$$g^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\Big[-\frac{2}{r}\frac{v^1}{c}\frac{v^2}{c} - \sin\theta\cos\theta\Big(\frac{v^3}{c}\Big)^2\Big], \tag{30}$$

$$g^3 = \frac{1}{1-\beta^2}\Big[-\frac{2}{r}\frac{v^1}{c}\frac{v^3}{c} - 2\cot\theta\frac{v^2}{c}\frac{v^3}{c}\Big]. \tag{31}$$

在随动坐标系中 ($v^i = 0$), 由 (29)—(31) 式可以得到加速度分量的表达式

$$g^1 = \frac{1}{1-\beta^2}\Big(-\frac{m}{r^2}\Big), \tag{32}$$

$$g^2 = 0, \tag{33}$$

$$g^3 = 0. \tag{34}$$

将 (32)—(34) 式以及度规表达式 (15)—(18) 式代入 (13) 式得到

$$g = -\frac{m}{r^2}\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

5 结 论

从 (35) 式看出, 当 $r \to \dfrac{2m}{1-8\pi\eta^2}$ 时, 加速度迅速增大, 在 $r = \dfrac{2m}{1-8\pi\eta^2}$ 附近这一效应十分明显. 考虑试验粒子沿径向运动 ($v^1 = v \neq 0, v^2 = 0, v^3 = 0$), 代入到 (29)—(31) 式得到径向加速度表达式

$$g^1 = \frac{1}{1-\beta^2}\Big[-\frac{m}{r^2} + \frac{m}{r^2}\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)^{-1}\Big(\frac{v}{c}\Big)^2\Big], \tag{36}$$

$$g^2 = 0, \tag{37}$$

$$g^3 = 0. \tag{38}$$

与牛顿加速度相比, (36) 式出现了反号的项

$$\frac{m}{r^2}\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)^{-1}\Big(\frac{v}{c}\Big)^2,$$

这表明由于整体单极子的存在, 产生了斥力效应. 当 $v \to c$ 时,

$$\frac{m}{r^2}\Big(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r}\Big)^{-1} > \frac{m}{r^2}. \tag{39}$$

(39) 式表明, 试验粒子将受到斥力的作用, 这在牛顿力学中是没有的.

[1] Cardall C Y, Fuller G M 1996 *Phys. Rev.* D **55** 7960

[2] Landau L D, Lifshitz E M, Landau L D 1980 *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press) p251

[3] Wang Y J 2011 *Theory of Gravitation* (Beijing: Science Press) p689 (in Chinese) [王永久 2011 引力理论 (北京: 科学出版社) 第 689 页]

[4] Wang Y J, Tang Z M 2002 *Astrophys, Space Sci.* **281** 689

[5] Wang Y J, Tang Z M 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 773

[6] Barriola M, Vilenkin A 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 341

[7] Mukunda A, Vilenkin A 1986 *Phys. Rev.* D **34** 2263

[8] Xiang M H, Chen J H, Wang Y J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090401 (in Chinese) [向茂槐, 陈菊华, 王永久 2011 物理学报 **60** 090401]

[9] Wang Y J, Tang Z M 2002 *Sci. China* A **45** 528 (in Chinese) [王永久, 唐智明 2002 中国科学 A **45** 528]

[10] Wang Y J 2008 *Classic Black Hole and Quantum Black Hole* (Beijing: Science Press) p248 (in Chinese) [王永久 2008 经典黑洞和量子黑洞 (北京: 科学出版社) 第 248 页]

Acceleration effect in the gravitational field of black hole involving a global monopole*

Shao Jian-Zhou Wang Yong-Jiu†

(*Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081*, China*)

(Received 23 March 2011; revised manuscript received 2 October 2011)

Abstract

In this paper, we provide the analytical expression of acceleration of neutral experimental particle in the gravitational field of black hole involving a global monopole and discuss the contribution of global monopole to acceleration effect. The results indicate that the repulsion effect takes place due to the global monopole, and when $v \rightarrow c$, neutral particle in the gravitational field is subjected to a repulsive force, which does not exist in Newtonian mechanics.

Keywords: general relativity, geodesic equation, global monopole, acceleration effect

PACS: 04.60.Kz, 04.70.Dy, 97.60.Lf

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB832803), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10873004), the Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 08B051), and the Scientific Research Fund of Hunan Normal University, China.

† E-mail: wyj@hunnu.edu.cn