变质量非完整系统 Tzénoff 方程的 Lie 对称性与其导出的守恒量*

郑世旺[1)†] 王建波[1)] 陈向炜[1)] 李彦敏[1)] 解加芳[2)]

1) (商丘师范学院物理与电气信息学院, 商丘 476000)

2) (北方工业大学理学院, 北京 100144)

(2011 年 5 月 11 日收到; 2011 年 10 月 8 日收到修改稿)

航天器运行系统大都属于变质量力学系统, 变质量力学系统的对称性和守恒量隐含着航天系统更深刻的物理规律. 本文首先导出了变质量非完整力学系统的 Tzénoff 方程, 然后研究了变质量非完整力学系统 Tzénoff 方程的 Lie 对称性及其所导出的守恒量, 给出了这种守恒量的函数表达式和导出这种守恒量的判据方程. 该研究结果对进一步探究变质量系统所遵循的守恒规律具有一定的理论价值.

关键词: 变质量非完整系统, Tzénoff 方程, Lie 对称, 守恒量

PACS: 11.30.−j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

1 引 言

1918 年, 德国女科学家 Noether[1] 首先发现对称性与守恒量之间具有一定的内在关系, 但是, 当时并没有引起太多人的重视. 直到 20 世纪 70 年代, 分析力学界才开始认识到 Noether 理论的科学价值. 其科学价值就在于通过研究动力学系统的对称性可以寻找系统的守恒量, 从此对称性与守恒量的研究得到蓬勃发展, 并取得了一系列重要成果 [2−21]. 其中专著 [5] 的研究范围最为全面, 包括了 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性以及三者直接导出的守恒量和相互间接导出的守恒量. 后来文献 [15, 16] 发现 Lagrange 系统的 Mei 对称性和 Lie 对称性可直接导致区别于传统守恒量的另外一些新的守恒量. 以上这些成果大都是借助于动力学系统的 Lagrange 函数、Hamilton 函数和 Appell 函数来求系统的守恒量. 其实在分析力学中有多种运动微分方程, 如 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Tzénoff 方程等, 其中最为简捷的是 Tzénoff 方程, 只要给出系统的 Tzénoff 函数, 研究系统的运动规律是比较方便的. 目前, 关于 Tzénoff 方程的对称性与守恒量的研究较少, 但也有了一些初步成果 [22−26]. 其中文献 [25] 把文献 [15] 对 Lagrange 方程的研究方法推广到完整系统的 Tzénoff 方程, 给出了完整力学系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性直接导出的另一种新守恒量. 以上结果都是针对常质量系统的, 还没有涉及更为复杂的变质量系统.

航天技术代表着一个国家的尖端技术水平和国防实力, 各个国家都把发展航天技术提升到战略高度. 由于喷气飞机、火箭、卫星等航天器一般都是变质量系统, 故变质量系统的动力学研究日益受到重视. 由于系统质量的变化, 系统的动力学方程变得复杂, 对其对称性与守恒量的研究也比常质量系统困难. 常质量系统仅仅是其特殊情况, 变质量系统的动力学理论自然适合于常质量系统. 近年来, 变质量力学系统对称性与守恒量的研究也取得了一些进展 [27−30]. 本文企图找出变质量状态下非完整力学系统的 Tzénoff 方程, 然后进一步探

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972127, 11102001) 资助的课题.

† E-mail: hi_zsw@sina.com

究这种状态下的 Lie 对称性及其直接导出的守恒量, 力求给出变质量非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性的判据方程及其守恒量的表达式, 最后举例说明研究结果的应用, 并分析算例中导出守恒量的物理含义.

2 变质量非完整系统的 Tzénoff 方程

假设力学系统由 N 个质点组成, 在时刻 t, 第 i 个质点的质量和位矢分别为 m_i 和 $\boldsymbol{r}_i$, 在时刻 $t+\mathrm{d}t$, 由质点分离 (或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 系统的运动受 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束:

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0.\tag{2}$$

在一般的情况下, 质点的质量可为广义坐标、广义速度和时间的函数, 即

$$m_i=m_i(q_s,\dot{q}_s,t)\quad(i=1,\cdots,N;s=1,\cdots,n).\tag{3}$$

令 $T=\dfrac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i, S=\dfrac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i$, 分别为系统的动能、加速度能量. 系统的 Tzénoff 函数为

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_s\ddot{q}_s,\tag{4}$$

其中 Q_s 是与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义力, $\ddot{T}$ 是系统的动能对时间 t 的二阶导数, T_0 为 T 中把广义速度作为常数时的表达式, 即 $T_0=T(q_s,\dot{q}_s=$ 常数$,t)$, 因系统的质量随时间而变, 所以

$$\ddot{T}=\frac{1}{2}\ddot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i+2\dot{m}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i+m\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i+m\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dddot{\boldsymbol{r}}_i,\tag{5}$$

$$\dot{T}_0=\frac{\partial T}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial T}{\partial t},\tag{6}$$

$$\ddot{T}_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right).\tag{7}$$

P_s 为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义反推力, P_s 由下式确定 [5]:

$$\begin{aligned}P_s=&\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial\dot{q}_s}\Big).\end{aligned}\tag{8}$$

对于变质量非完整系统, 由文献 [31], 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s\\&=\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s=\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}-Q_s=P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\end{aligned}$$

由于存在关系

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s=&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s\\=&\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}-Q_s=\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s},\end{aligned}$$

则变质量非完整系统的 Tzénoff 方程为

$$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}=P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\quad(s=1,\cdots,n).\tag{9}$$

设系统非奇异, 可由 (1) 和 (9) 式先求得乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 可将 (9) 式表示为

$$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}=P_s+\Lambda_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{10}$$

式中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}.$$

从表面上看, 通过 (1), (9) 式应能求出广义加加速度

$$\dddot{q}_s=\beta_s(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s),\tag{11}$$

但对于一个实际的力学系统, 由 (4)—(7) 式知 Tzénoff 函数是一种多项式, 其中 $\dddot{q}_s$ 总是其中乘积项 $\dfrac{1}{2}m_i\dot{q}_s\dddot{q}_s$ 的因子, 故通过 (1),(9) 式可直接求出的不是广义加加速度, 而是广义加速度

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,\cdots,n).\tag{12}$$

当然, 如果需要可通过 (12) 式对时间求导得到 (11) 式.

若构造 Tzénoff 函数为

$$\tilde{K}=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-(Q_s+P_s)\ddot{q}_s,\tag{13}$$

则变质量非完整系统的 Tzénoff 方程将有更简单的形式

$$\frac{\partial\tilde{K}}{\partial\ddot{q}_s}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}.\tag{14}$$

其实, 变质量非完整系统的两种 Tzénoff 方程 (9) 和 (14) 式是等价的, 所得到的广义加速度 (12) 式相同.

3 变质量非完整系统 Tzénoff 方程的 Lie 对称性导出的守恒量

取时间和坐标的群的无限小变换

$$\begin{aligned}t^*=&t+\Delta t,\\q_s^*(t^*)=&q_s(t)+\Delta q_s\quad(s=1,\cdots,n),\end{aligned}\tag{15}$$

或其展开式

$$\begin{aligned} t^* =& t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ q_s^*(t^*) =& q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \end{aligned} \tag{16}$$

其中 ε 为一无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小生成元. 于是有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} =& \frac{\mathrm{d}q_s+\varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t+\varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s+\varepsilon(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)+O(\varepsilon^2),\\ \frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} =& \ddot{q}_s+\varepsilon[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^\bullet-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]+O(\varepsilon^2),\\ \frac{\mathrm{d}^3q_s^*}{\mathrm{d}t^{*3}} =& \dddot{q}_s+\varepsilon\big\{[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^\bullet-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^\bullet\\ &-\dddot{q}_s\dot{\xi}_0\big\}+O(\varepsilon^2),\\ K^* =& K\bigg(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}},\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*3}}\bigg)\\ =& K\bigg(t,\boldsymbol{q},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^3}\bigg)+\varepsilon\boldsymbol{X}^{(3)}(K)\\ &+O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \varLambda_s^* =& \varLambda_s\bigg(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\bigg)\\ =& \varLambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(\varLambda_s)+O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} f_\beta^* =& f_\beta\bigg(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\bigg)\\ =& f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(f_\beta)+O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{19}$$

(17)—(19) 式中

$$\begin{aligned} X^{(3)}(K) =& \frac{\partial K}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial K}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\\ &+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^\bullet-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\\ &+\frac{\partial K}{\partial \dddot{q}_s}\Big\{[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^\bullet-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^\bullet-\dddot{q}_s\dot{\xi}_0\Big\},\\ X^{(1)} =& \xi_0\frac{\partial K}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial K}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}. \end{aligned}$$

非完整约束 (1) 式在变换 (16) 式下的不变性归结为约束限制方程

$$X^{(1)}\{f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0 \quad (\beta=1,\cdots,g). \tag{20}$$

由于变质量非完整系统的 Tzénoff 方程所能直接得到的是 (12) 式而不是 (11) 式, 又由于 Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性 [5], 所以, 根据定义可得变质量非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性的判据方程

$$X^{(2)}\Big\{\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\Big\}=X^{(1)}(P_s+\varLambda_s), \tag{21}$$

或

$$X^{(2)}\Big\{\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \ddot{q}_s}\Big\}=X^{(1)}(\varLambda_s), \tag{22}$$

式中

$$\begin{aligned} X^{(2)} =& \xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\\ &+\big[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^\bullet-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0\big]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \end{aligned}$$

注意到 (12) 式, (21), (22) 式都可等效为

$$X^{(2)}\{\ddot{q}_s-\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0, \tag{23}$$

即

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_s\\ =& \xi_0\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}+\xi_k\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}+(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}. \end{aligned} \tag{24}$$

于是有

定义 如果无限小变换 (16) 式的生成元 ξ_0, ξ_s 满足 (21) 或 (22) 或 (24) 式, 且满足约束限制方程 (20) 式, 则称该对称性为变质量非完整系统 Tzénoff 方程的 Lie 对称性.

定理 如果变质量非完整系统 Tzénoff 方程的特殊 Lie 对称性 ($\xi_0=0$) 的生成元 ξ_s 满足判据方程 (24) 式和约束限制方程 (20) 式, 且存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{25}$$

则 Tzénoff 方程的 Lie 对称性直接导出 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\bigg(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\bigg)=\mathrm{const.} \tag{26}$$

式中算符

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.$$

这里需要说明的是, 我们不可能从变质量非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性所导出的守恒式 (26) 式本身直接看出其所代表的物理含义, 要想找出守恒式 (26) 式所表示的物理含义, 还必须具体到实际的变质量动力学系统中. 针对不同的变质量系统, 从守恒式 (26) 式既可以导出实际系统所具有的动量守恒、角动量守恒、动能守恒、机械能守恒、总能量守恒等这些物理意义非常明显的守恒规律, 也可以导出动力学系统客观存在但没有明显

物理含义的守恒关系, 并且后者的情况也很常见. 守恒式 (26) 式究竟能导出什么类型的守恒规律, 与具体的变质量动力学系统及所选的广义坐标有关.

4 应用例子

已知变质量非完整力学系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2), \tag{27}$$

其中质量随时间的变化满足以下规律:

$$m=m_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\quad(m_0\text{和 }\gamma\text{ 为常量}),$$

微粒分离的相对速度为

$$\boldsymbol{u}=-\dot{\boldsymbol{r}}=-(\dot{q}_1\boldsymbol{i}+\dot{q}_2\boldsymbol{j}), \tag{28}$$

所受非完整约束方程为

$$f=\dot{q}_2-t\dot{q}_1=0, \tag{29}$$

系统的广义力为

$$\begin{aligned}Q_1=&\frac{\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2}{t(1+t^2)}-\frac{3}{2}\dot{m}\dot{q}_1,\\ Q_2=&\frac{\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2}{1+t^2}-\frac{3}{2}\dot{m}\dot{q}_2.\end{aligned} \tag{30}$$

试求该力学系统的 Tzénoff 函数和系统的 Lie 对称性直接导出的 Hojman 守恒量, 并分析其物理含义.

解　由系统的动能 (27) 式, 通过 (5), (7) 和 (30) 式, 根据定义 (4) 式可得到该系统的 Tzénoff 函数

$$\begin{aligned}K=&\frac{1}{2}m(\ddot{q}_1^2+\dot{q}_1\dddot{q}_1+\ddot{q}_2^2+\dot{q}_2\dddot{q}_2)\\ &-\frac{1}{2}\ddot{m}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\dot{m}(\ddot{q}_1\dot{q}_1+\ddot{q}_2\dot{q}_2)\\ &-\frac{\ddot{q}_1}{t(1+t^2)}(\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2)\\ &-\frac{\ddot{q}_2}{1+t^2}(\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2).\end{aligned} \tag{31}$$

由 (28) 式并根据 (8) 式可知 $P_1=0$, $P_2=0$, 把 Tzénoff 函数 (31) 式代入变质量非完整力学系统的 Tzénoff 方程 (9) 式, 有

$$\begin{aligned}&m\ddot{q}_1+\dot{m}\dot{q}_1-\frac{\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2}{t(1+t^2)}=-\lambda t,\\ &m\ddot{q}_2+\dot{m}\dot{q}_2-\frac{\dot{m}t\dot{q}_1-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_2}{1+t^2}=\lambda.\end{aligned} \tag{32}$$

由 (29) 和 (32) 式解得

$$\lambda=\frac{m}{1+t^2}(\dot{q}_1-\gamma\dot{q}_2+\gamma t\dot{q}_1), \tag{33}$$

将 (33) 式代入 (32) 式得

$$\ddot{q}_1=\alpha_1=\frac{1}{t}(\gamma\dot{q}_2-\dot{q}_1),\quad \ddot{q}_2=\alpha_2=\gamma\dot{q}_2. \tag{34}$$

变质量非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性的判据 (24) 式给出

$$\xi_0=\xi_1=0,\ \ \xi_2=(\dot{q}_2-\gamma q_2)^2. \tag{35}$$

显然生成元 (35) 式同时也满足约束限制方程 (20) 式, 故该变质量非完整系统的 Tzénoff 方程具有 Lie 对称性. 由 (34) 式方程 (25) 式给出

$$\mu=t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{36}$$

把 (35), (36) 式代入 (26) 式得 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=2\gamma(\gamma q_2-\dot{q}_2)=\mathrm{const}. \tag{37}$$

从守恒量 (37) 式可以看出, 系统的质量虽然随时间变化, 但系统的广义坐标 q_2 的 γ 倍与该方向广义速度的差值却是不随时间变化的常量.

5 结 论

本文导出了变质量状态下非完整力学系统两种形式不同但实质等价的 Tzénoff 方程, 进一步探究了这种状态下的 Lie 对称性及其直接导出的守恒量, 给出了变质量非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性的判据方程及其守恒量的表达式. 该研究结果对进一步探究变质量系统所遵循的守恒规律具有一定的理论价值.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) p5 (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京: 北京工业大学出版社) 第 5 页]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p90 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社) 第 90 页]

[4] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[5] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p264 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的

对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社) 第 264 页]
[6] Fu J L, Chen L Q, Xie F P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1611
[7] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470
[8] Luo S K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3182
[9] Wu H B, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030303
[10] Zhang Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 59
[11] Lou Z M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 719 (in Chinese) [楼智美 2010 物理学报 **59** 719]
[12] Xia L L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 040201
[13] Liu X W, Li Y C, Xia L L 2011 *Chin. Phys.* B **20** 070203
[14] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 321
[15] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]
[16] Fang J H 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040301
[17] Li Y, Fang J H, Zhang K J 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030201
[18] Jia L Q, Xie Y L, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040201 (in Chinese) [贾利群, 解银丽, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 040201]
[19] Xie Y, Jia L Q 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 120201
[20] Ding N, Fang J H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 120201
[21] Wang P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 040203
[22] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399
[23] Zheng S W, Xie J F, Chen W C 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 809
[24] Zheng S W, Xie J F, Jia L Q 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 43
[25] Zheng S W, Xie J F, Chen X W, Du X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向炜, 杜雪莲 2010 物理学报 **59** 5209]
[26] Zheng S W, Xie J F, Wang J B, Chen X W 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 030307
[27] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721
[28] Mei F X 2003 *Tr Beijing Inst. Technol.* **23** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 1]
[29] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269
[30] Zhang P Y, Fang J H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3813 (in Chinese) [张鹏玉, 方建会 2006 物理学报 **55** 3813]
[31] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p339 (in Chinese) [梅凤翔, 刘端, 罗勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社) 第 339 页]

Lie symmetry and their conserved quantities of Tzénoff equations for the vairable mass nonholonomic systems*

Zheng Shi-Wang[1)†] Wang Jian-Bo[1)] Chen Xiang-Wei[1)]
Li Yan-Min[1)] Xie Jia-Fang[2)]

1) (*School of Physics and Electrical Information, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000*, China*)

2) (*College of Science, North China University of Technology, Beijing* 100144*, China*)

(Received 11 May 2011; revised manuscript received 8 October 2011)

Abstract

The operational system of the spacecraft is general a variable mass one, of which the symmetry and the conserved quantity imply physical rules of the space system. In this paper, Tzénoff equations of the variable mass nonholonomic system are derived, from which the Lie symmetries of Tzénoff equations for the variable mass nonholonomic system and conserved quantities are derived and are researched. The function expressions of conserved quantities and the criterion equations which deduce these conserved quantities are presented. This result has some theoretical value for further research of the conservation laws obeyed by the variable mass system.

Keywords: variable mass nonholonomic systems, Tzénoff equations, Lie symmetry, conserved quantity
PACS: 11.30.−j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972127, 11102001).

† E-mail: hi_zsw@sina.com