

基于滑模控制法实现规则网络的混沌同步*

吕翎[†] 李雨珊 韦琳玲 于淼 张檬

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2011年11月2日收到; 2011年11月22日收到修改稿)

利用滑模控制法研究了规则网络的混沌同步问题. 将针对一个混沌系统进行控制或驱使一个混沌系统同步于另一个混沌态的滑模控制法推广到由多个混沌系统构成的复杂网络的同步研究中. 设计了网络滑模面以及控制输入, 并依据稳定性理论分析了它们的有效性. 选取 Duffing 系统和 Coulet 系统作为网络节点构成的规则网络为例进行了仿真模拟.

关键词: 混沌同步, 复杂网络, 滑模控制, 仿真模拟

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

近年来, 滑模控制法以其控制操作简单易行、抗干扰能力强等性能而受到国际国内众多学者的普遍重视. 随着研究的不断深入, 该控制方法已被广泛用于控制非线性离散系统、非线性连续系统以及随机系统等, 成为物理学、信息通讯、计算机以及控制等众多领域一个重要的研究方向, 许多富有成效的工作已被报道^[1-5]. 例如, Vasegh 和 Khelilat 利用滑模控制法实现了两个时滞混沌系统之间的投影同步研究^[6]; Zribi 等通过对响应系统施加滑模控制输入, 使得响应系统同步于驱动系统的混沌态^[7]; Li 和 Liu 设计了滑模控制器, 将 Liu 系统的混沌态成功地抑制到预期定态^[8]. 刘福才和宋佳秋基于主动控制思想, 提出了一种主动滑模控制策略, 完成了一类异结构混沌系统的反同步^[9]; 余洋等设计了一种滑模控制器, 对双馈电机模型进行了混沌同步控制^[10].

在进行滑模控制时, 一个值得关注的问题是日前报道的工作基本上进行的是运用滑模控制法对一个混沌系统进行控制或驱使一个混沌系统同步于另一个混沌态. 但运用滑模控制法实现多个具有

相互关联的混沌系统的同步, 即复杂网络的同步问题还鲜为报道. 而复杂网络的混沌同步是迄今网络动力学研究的一个热点问题. 其原因在于自然界和人类社会不仅存在着大量的复杂网络, 如 WWW, Internet, 电力网络, 生物网络, 社会网络等等, 而且复杂网络的同步性能在信息通信、物理学、生命科学等许多领域有着广泛的应用潜力. 为此, 人们针对随机网络、小世界网络、无标度网络以及大量的规则网络, 设计和提出了许多行之有效的同步方法, 实现了复杂网络的完全同步^[11-15]、延迟同步^[16,17]以及广义同步^[18-20]. 本文利用滑模控制法研究了规则网络的混沌同步问题. 将针对一个混沌系统进行控制或驱使一个混沌系统同步于另一个混沌态的滑模控制法推广到由多个混沌系统构成的复杂网络的同步研究中. 设计了网络滑模面以及控制输入, 并依据稳定性理论分析了它们的有效性. 选取 Duffing 系统和 Coulet 系统作为网络节点构成的规则网络为例进行了仿真模拟.

2 滑模控制规则网络的同步机理

物理学等领域中许多典型的实际混沌系统如 Chua 电路、Van der Pol 系统、Coulet 系

* 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108)资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

统、Genesio 系统以及 Duffing 系统等都能够被写成下列一般形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ 为系统的状态变量.

选取 m 个混沌系统 (1) 作为节点构成规则网络. 其中第 j 个节点所满足的状态方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^j &= x_{i+1}^j, \\ \dot{x}_n^j &= f(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) + S_j + u_j \\ &= f(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) + \sigma \sum_{l=1}^m G_{jl} x_n^l + u_j, \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $S_j = \sigma \sum_{l=1}^m G_{jl} x_n^l$ 为连接节点之间的耦合函数, 即网络的边. σ 为网络内部节点之间的耦合强度, G_{jl} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元, 它的具体表示因网络的连接类型而异, 表征网络的拓扑结构. u_j 为控制输入.

定义网络各节点混沌系统中的状态变量之间的误差

$$e_i^j = x_i^{j+1} - x_i^j, \quad (j = 1, 2, \dots, m-1). \quad (3)$$

考虑到 (2) 式, 可以进一步得到下列关系:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i^j &= e_{i+1}^j, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \dot{e}_n^j &= \Delta f_j + \Delta S_j + u_{j+1} - u_j, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta f_j &= f(x_1^{j+1}, x_2^{j+1}, \dots, x_n^{j+1}) \\ &\quad - f(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j), \\ \Delta S_j &= S_{j+1} - S_j. \end{aligned}$$

基于控制理论, 运用滑模控制法对一个混沌系统进行控制或驱使一个混沌系统同步于另一个混沌态包含两个基本步骤 [21]. 其一是选择一个合适的滑模面, 并保证是渐近稳定的. 其二是设计控制器或控制输入, 使受控系统沿着滑模面向同步态运动, 从而最终稳定在同步态.

将上述滑模控制原理推广到如同 (2) 式所表示的 m 个混沌系统构成的复杂网络的同步研究中. 为此, 针对网络中每相邻的两个节点混沌系统构造一个滑模面, 由此构造出 $m-1$ 个滑模面

$$P_j = \left(\frac{d}{dt} + \xi \right)^{n-1} e_1^j, \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \quad (5)$$

其中 ξ 为大于零的常量.

利用二项式定理并考虑到 (4) 式, 滑模面 P_j 能够展开为

$$\begin{aligned} P_j &= \left(\frac{d}{dt} + \xi \right)^{n-1} e_1^j = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{d^{n-1-k}}{dt^{n-1-k}} \xi^k e_1^j \\ &= \binom{n-1}{0} e_n^j + \binom{n-1}{1} \xi e_{n-1}^j + \dots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-2} \xi^{n-2} e_2^j \\ &\quad + \binom{n-1}{n-1} \xi^{n-1} e_1^j, \end{aligned} \quad (6)$$

进一步得到滑模面 P_j 的导数关系式

$$\begin{aligned} \dot{P}_j &= \binom{n-1}{0} \dot{e}_n^j + \binom{n-1}{1} \xi \dot{e}_{n-1}^j + \dots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-2} \xi^{n-2} \dot{e}_2^j + \binom{n-1}{n-1} \xi^{n-1} \dot{e}_1^j \\ &= \binom{n-1}{0} [\Delta f_j + \Delta S_j + u_{j+1} - u_j] \\ &\quad + \binom{n-1}{1} \xi e_n^j + \dots + \binom{n-1}{n-2} \xi^{n-2} e_3^j \\ &\quad + \binom{n-1}{n-1} \xi^{n-1} e_2^j. \end{aligned} \quad (7)$$

构造网络的 Lyapunov 函数

$$V = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2} P_j^2, \quad (8)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{j=1}^{m-1} P_j \dot{P}_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} P_j \left\{ \binom{n-1}{0} [\Delta f_j + \Delta S_j + u_{j+1} - u_j] \right. \\ &\quad + \binom{n-1}{1} \xi e_n^j + \dots + \binom{n-1}{n-2} \xi^{n-2} e_3^j \\ &\quad \left. + \binom{n-1}{n-1} \xi^{n-1} e_2^j \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

设计控制输入

$$u_{j+1} = u_j - \mu \text{sign}(P_j) - \Delta f_j - \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \xi e_n^j - \dots - \begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \end{pmatrix} \xi^{n-2} e_3^j - \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \xi^{n-1} e_2^j, \quad (10)$$

其中 μ 为大于零的调控参数.

由于连接网络节点之间的耦合函数 S_j 是有界函数, 因此 ΔS_j 也是有界的, 设 $|\Delta S_j| \leq \delta$, δ 是正数. 这样, 当调控参数 μ 大于阈值 δ , 即满足 $\mu > \delta$ 时, 存在

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{m-1} P_j \dot{P}_j < 0. \quad (11)$$

这意味着复杂网络的所有节点实现了完全同步.

3 仿真实例分析

以 Duffing 系统和 Coulet 系统为例进行仿真模拟, 以此来验证上述同步原理. Duffing 系统的动力学方程具有下列形式 [22]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon x_2 - x_1 - bx_1^3 + B \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (12)$$

当参数 $b = 1, \varepsilon = 0.18, \omega_0 = 0.8, B$ 在一定的区域内取值, Duffing 系统呈现分岔以及混沌等丰富的动力学行为. 保持参数 b, ε, ω_0 的数值不变, 计算最大 Lyapunov 指数随参数 B 的演化关系如图 1 所示. 在最大 Lyapunov 指数大于零的区域取参数 $B = 18$, 发现存在图 2 所示的混沌吸引子.

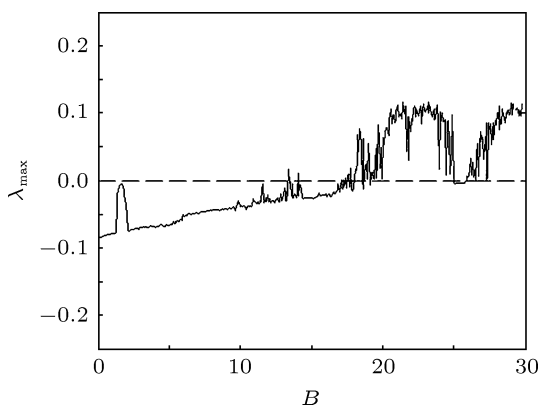


图 1 最大 Lyapunov 指数随参数 B 的演化

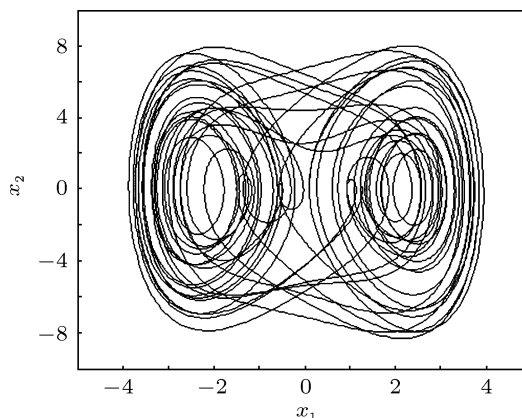


图 2 Duffing 型电路的混沌吸引子 ($B = 18$)

Coulet 系统的动力学方程具有下列形式 [23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 + dx_2 + cx_1 - x_1^3, \end{aligned} \quad (13)$$

其中参数 $a = -0.45, d = -1.1$. 由图 3 系统最大 Lyapunov 指数随参数 c 的演化关系可以看出,

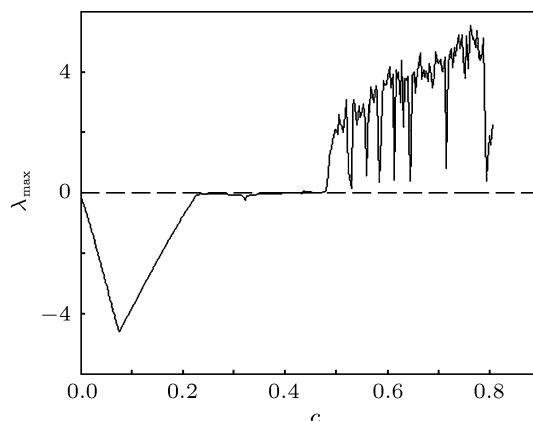


图 3 最大 Lyapunov 指数随参数 c 的演化

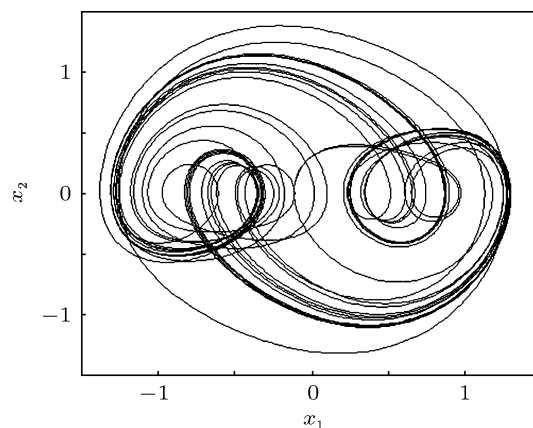


图 4 Coulet 型电路的混沌吸引子 ($c = 0.8$)

$c = 0.8$ 时最大 Lyapunov 指数大于零, 系统处于混沌态, 其混沌吸引子如图 4 所示.

取网络节点数 $m = 3$ 来仿真模拟网络的完全同步. 单个节点的状态方程为 (12) 或 (13) 式所描述的 Duffing 系统和 Coulet 系统, 它们按照 (2) 式的连接构成复杂网络, 连接节点之间的耦合函数 S_j 中的耦合矩阵 G 可以代表任意拓扑结构的规则网络, 这里我们取图 5—7 所示的链式结构、环形结构以及星形结构为例进行仿真模拟, 其耦合矩阵分别为

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$G_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$G_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

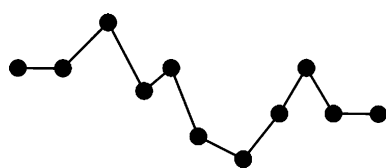


图 5 链式网络

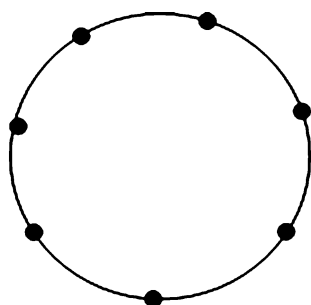


图 6 环形网络

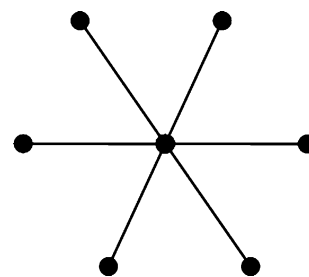


图 7 星形网络

模拟链式结构和环形结构网络同步时, 节点采用 Duffing 系统. 此时, 滑模面由下式给出:

$$P_j = \left(\frac{d}{dt} + \xi \right) e_1^j, \quad (j = 1, 2). \quad (17)$$

控制输入为

$$u_{j+1} = u_j - \mu \text{sign}(P_j) - \Delta f_j - \xi e_2^j, \quad (j = 1, 2). \quad (18)$$

仿真过程中取 $u_1 = 0$, 这意味着网络的第一个节点为目标系统, 即同步态. 任取网络内部节点之间的耦合强度 $\sigma = 0.05$, 参量 $\delta = 1, \mu = 1.5, \xi = 0.5$, 仿真模拟链式网络各节点 Duffing 系统状态变量以及误差变量随时间的演化规律如图 8 和图 9 所示.

图 8 和图 9 显示, 网络耦合连接后, 网络所有节点 Duffing 系统相应的状态变量 $x_i^j (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ 的演化轨迹经过短暂的时间序列后达到完全一致. 同时, 与三个节点的 Duffing 系统状态变量相关的误差信号 $e_i^j (i, j = 1, 2)$ 也迅速地趋于零, 网络的完全同步得以实现. 图 10 和图 11 显示的是环形网络各节点 Duffing 系统状态变量以及误差变量随时间的演化规律. 此时, 在保持网络其它参量不变的情况下, 改变调控参量 $\mu = 5$, 发现网络同步速率加快, 但同步的性能依然非常稳定.

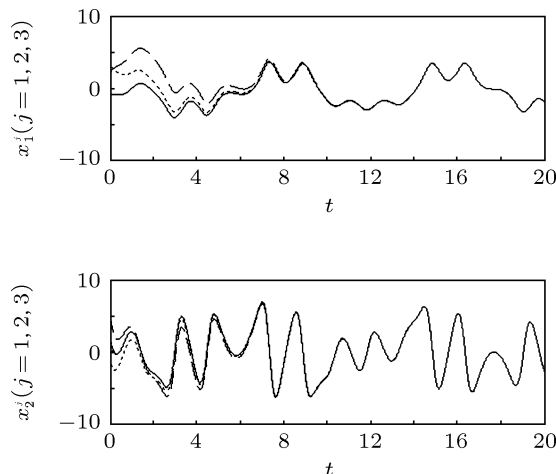


图 8 链式网络状态变量的时间演化

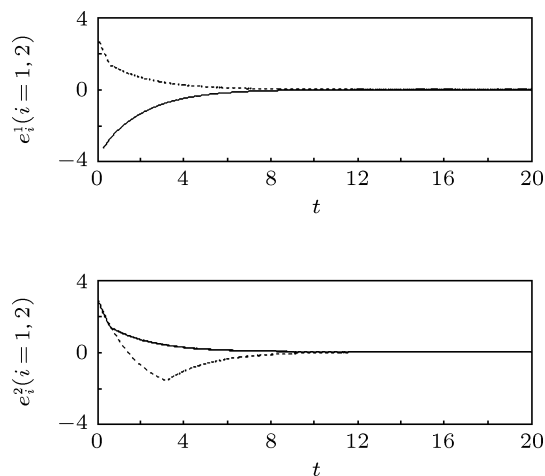


图9 链式网络误差变量的时间演化

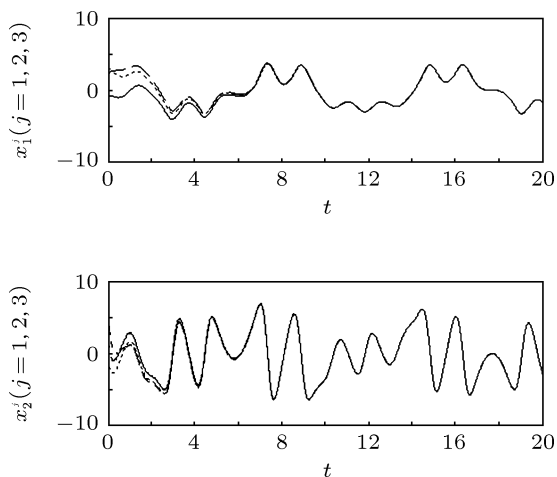


图10 环形网络状态变量的时间演化

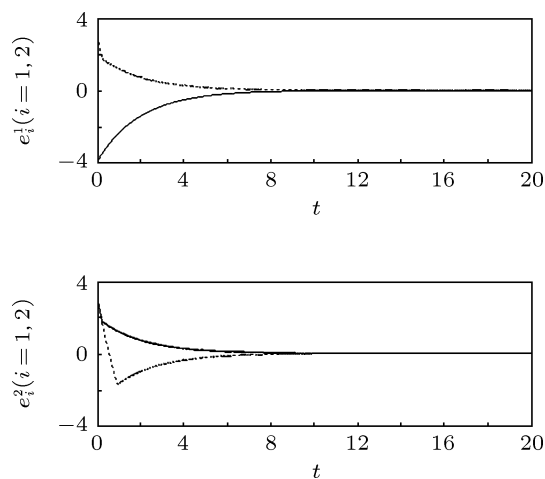


图11 环形网络误差变量的时间演化

模拟星形结构网络同步时, 节点采用 Coulet 系统. 此时, 滑模面由下式给出:

$$P_j = \left(\frac{d}{dt} + \xi \right)^2 e_1^j, \quad (j = 1, 2). \quad (19)$$

控制输入为

$$u_{j+1} = u_j - \mu \text{sign}(P_j) - \Delta f_j - 2\xi e_3^j - \xi^2 e_2^j, \quad (j = 1, 2). \quad (20)$$

除了参量取 $\delta = 0.15, \mu = 0.2$ 以外, 网络其他参量均保持不变. 仿真模拟星形网络各节点 Coulet 系统状态变量以及误差变量随时间的演化规律如图 12 和图 13 所示. 可以发现, 网络的同步在短时间内仍得以实现.

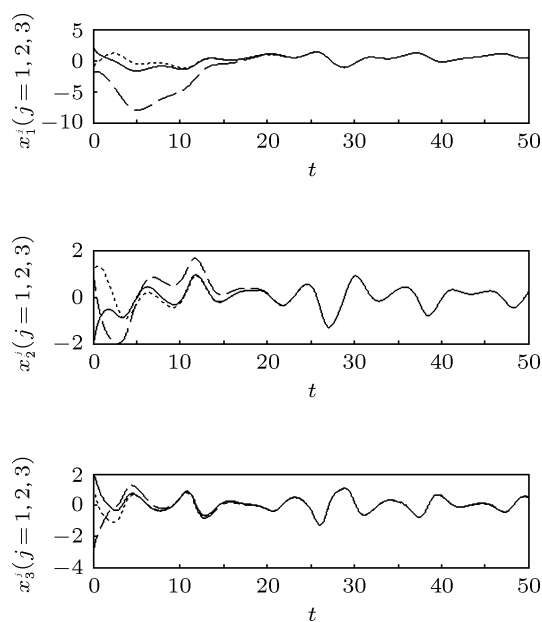


图12 星形网络状态变量的时间演化

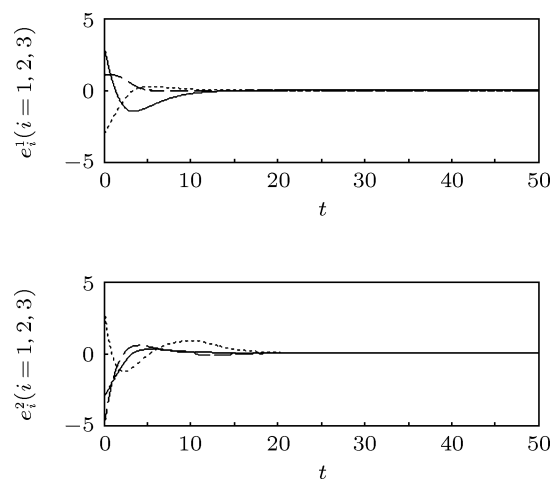


图13 星形网络误差变量的时间演化

4 结论

利用滑模控制法研究了规则网络的混沌同步问题. 将针对一个混沌系统进行控制或驱使一个混沌系统同步于另一个混沌态的滑模控制法推广到由 m 个混沌系统构成的复杂网络的同步研究中. 设计了网络滑模面以及控制输入, 并依据稳定性理论分析了它们的有效性. 选取 Duffing 系统

和 Coulet 系统作为网络节点构成的复杂网络为例进行了仿真模拟. 仿真结果表明, 只要调控参量 μ 大于阈值 δ , 均能在短时间内实现网络的完全同步, 但调控参量 μ 的大小影响网络同步的速率. 另外, 本文设计的网络滑模面以及控制输入对任何拓扑结构的规则网络的混沌同步均适用, 因此具有一定的普适性.

-
- [1] Naseh M R, Haeri M 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **39** 196
- [2] Shtessel Y, Kaveh P, Ashrafi A 2009 *Journal of the Franklin Institute* **346** 872
- [3] Qi D L, Yang J, Zhang J L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100506
- [4] Yau H T, Wang C C, Hsieh C T, Cho C C 2011 *Comput. Math. Appl.* **61** 1912
- [5] Chen D Y, Shen T, Mao X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050505 (in Chinese) [陈帝伊, 申滔, 马孝义 2011 物理学报 **60** 050505]
- [6] Vasegh N, Khellat F 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 1054
- [7] Zribi M, Smaoui N, Salim H 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 3197
- [8] Li M, Liu C X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100504
- [9] Yu Y, Mi Z Q, Liu X J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070509 [余洋、米增强、刘兴杰 2011 物理学报 **60** 070509]
- [10] Liu F C, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4729 (in Chinese) [刘福才, 宋佳秋 2011 物理学报 **57** 4729]
- [11] Li D, Leyva I, Almendral J A, Sendiña-Nadal I, Buldú J M, Havlin S, Boccaletti S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 168701
- [12] Pisarchik A N, Jaimes-Reátegui R, Sevilla-Escoboza R, Boccaletti S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 55202
- [13] Batista C A S, Batista A M, de Pontes J C A, Lopes S R, Viana R L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **41** 2220
- [14] Kouvaris N, Provata A, Kugiumtzis D 2010 *Phys. Lett. A* **374** 507
- [15] Song Q, Cao J D, Liu F 2010 *Phys. Lett. A* **374** 544
- [16] Ji D H, Park J H, Yoo W J, Won S C, Lee S M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1218
- [17] Liu T, Zhao J, Hill D J 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1506
- [18] Shang Y, Chen M Y, Kurths J 2009 *Phys. Rev. E* **80** 27201
- [19] Lü L, Li G, Guo L, Meng L, Zou J R, Yang M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080507
- [20] Liu H, Chen J, Lu J A, Cao M 2010 *Physica A* **389** 1759
- [21] Slotine J E, Li W 1991 *Applied Nonlinear Control* (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall)
- [22] Wembe E T, Yamapi R 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** 1439
- [23] Wu C W, Chua L O 1996 *Int. J. Bifur. Chaos* **6** 801

Chaos synchronization of regular network based on sliding mode control*

Lü Ling[†] Li Yu-San Wei Lin-Ling Yu Miao Zhang Meng

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 2 November 2011; revised manuscript received 22 November 2011)

Abstract

Sliding mode control method is used to study the synchronization of regular network. The method is extended from the single chaos control or synchronization between two chaotic systems to the synchronization of complex network. The sliding surface of the network and the control input are designed. Furthermore, the effectiveness of the method is analyzed based on the stability theory. The Duffing system and the Coulet system are taken as network nodes of the regular network, and the simulation is made to verify the method.

Keywords: chaos synchronization, complex network, sliding mode control, artificial simulation

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project Supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147), and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn