

# 双色噪声激励下 FHN 神经元系统的稳态性质\*

杨亚强<sup>1)</sup> 王参军<sup>2)†</sup>

1) (宝鸡文理学院数学系, 宝鸡 721013)

2) (宝鸡文理学院非线性研究所, 宝鸡 721016)

(2012 年 1 月 16 日收到; 2012 年 2 月 26 日收到修改稿)

应用统一色噪声理论研究了双色噪声激励下一维 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元系统的动力学性质, 即稳态概率分布函数和其平均值. 给出了 FHN 神经元系统的稳态概率密度和平均值的解析表达式. 结果表明: 乘性噪声的自关联时间  $\tau_1$ 、加性噪声的自关联时间  $\tau_2$ 、加性噪声强度  $\alpha$  和乘性噪声强度  $D$  都能够诱导非平衡相变的产生.  $\alpha$  和  $D$  的增大有利于系统从激发态向静息态转换.  $\tau_1, \tau_2$  的增大有利于系统从静息态向激发态转换. 噪声强度和其自关联时间的作用完全相反.

**关键词:** FHN 神经元系统, 色噪声, 稳态概率分布, 平均值

**PACS:** 05.40.Ca, 87.16.Yc, 02.50.Ey

## 1 引言

近年来, 噪声激励下的非线性系统的动力学问题受到广泛的关注. 研究表明: 噪声对系统的演化起着决定性的作用, 这种无规则的随机干扰并不总是对宏观秩序起消极作用, 也会起到积极的作用<sup>[1,2]</sup>. 噪声的各种效应在物理、生物、化学等领域被发现. 如噪声诱导相变, 噪声增强系统的稳定性, 随机共振等等. 尤其在生物学领域, 噪声对生命过程的影响更是蓬勃发展. 文献[3—5]发现噪声在基因转录调控过程中可以诱导蛋白质浓度发生“双开关”现象. 适宜的噪声有利于鲨鱼神经细胞膜振荡信号的传播<sup>[6]</sup>. 噪声可以抑制肿瘤的增长<sup>[7—10]</sup>. 噪声也可以在生态系统中的展现丰富的动力学行为<sup>[11]</sup>.

基于离子通道理论, Hodgkin 和 Huxley 提出了著名的关于神经元系统动作电位变化的 Hodgkin-Huxley(H-H) 模型, 但 H-H 模型形式比较复杂. Fitzhugh 和 Nagumo 在保留了易兴奋神经细胞再生激发机理的主要特征上对 H-H 模型进行了简

化, 提出了二维 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元模型. Alarcon 在一定条件下, 对二维 FHN 神经元模型进行了简化得到一维 FHN 系统<sup>[12]</sup>. 近几年, 噪声对 FHN 神经元系统的影响开始被研究, 发现许多有意义的现象. 余思宁<sup>[13]</sup>等研究了该系统在白噪声诱导下的相变情况. 文献[14]研究了加性高斯白噪声和乘性高斯色噪声激励下 FHN 神经元系统的动力学性质. 文献[15]研究了非高斯色噪声对该系统的影响. 然而, 以上的研究对于内噪声(加性噪声)均按照高斯白噪声处理的. 现实中, 真正噪声的关联时间虽然很小, 但是并不严格等于零. 只有当系统的弛豫时间远远大于关联时间时, 才认为关联时间为零, 以理想模型(高斯白噪声)来处理. 考虑有限关联时间对系统的影响是合理的, 更接近实际的过程. 研究色噪声驱动的 FHN 系统, 考察其动力学性质具有一定的实际意义.

本文研究了乘性高斯色噪声和加性高斯色噪声激励下 FHN 神经元系统的稳态概率密度函数和平均值. 应用统一色噪声理论, 给出了稳态概率分布函数的解析表达式. 讨论了自关联时间对系统稳态性质的影响. 并从平均值的角度对稳态的结果给

\* 国家自然科学基金(批准号: 11165016), 陕西省自然科学基金(批准号: 2010JQ1014), 陕西省教育厅科研计划项目(批准号: 12JK0962)和宝鸡文理学院重点科研项目(批准号: ZK11053)资助的课题.

† E-mail: cjwangbj@126.com

以验证.

## 2 随机 FHN 神经元模型

FHN 模型是 H-H 模型的一种简化, 保留了易兴奋神经细胞再生激发机理的主要特征, 它由以下方程组给出:

$$\frac{dv}{dt} = v(a-v)(v-1) - w + I_a, \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = bv - \gamma w, \quad (2)$$

其中  $v$  是动作电位,  $w$  是恢复变量,  $b$  和  $\gamma$  是正常数.  $I_a$  表示外部激励电流. 在不失一般性的情况下, 为了简化计算, 取  $I_a = 0$ . Alarcon 考虑神经元细胞被激发(去极化)的过程, 在这个过程中, 如果取恢复变量  $w$  的值为静息电位所对应的恢复变量的值, 并认为在去极化过程中  $\frac{dw}{dt} = 0$ , 则两维情况下的易兴奋系统可简化成一维的双稳系统. 这个过程称为绝热近似. 对二维 FHN 神经元模型简化可得到弱噪声环境下的一维的 FHN 神经元系统为<sup>[12]</sup>

$$\frac{dv}{dt} = v(a-v)(v-1) - bv + \eta(t), \quad (3)$$

(3) 式确定部分的势函数为

$$U(v) = \frac{a+b}{2}v^2 - \frac{a+1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4,$$

其中已取  $\gamma = 1$ . 它有两个稳定不动点  $v_{s1} = 0$ ,

$$v_{s2} = \frac{a+1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

和一个不稳定不动点

$$v_u = \frac{a+1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}.$$

该势函数的如图 1 所示.

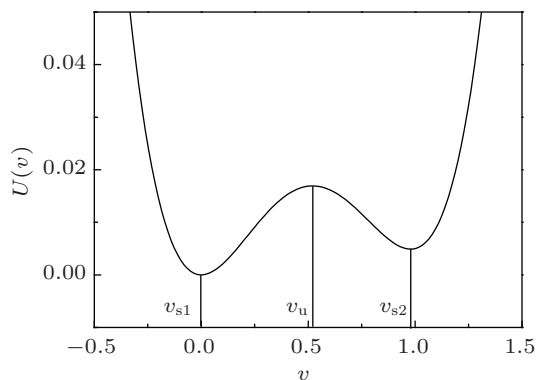


图 1 FHN 神经元系统所具有的双稳势(其中  $a = 0.5, b = 0.01, \gamma = 1$ )

实际过程中,  $b$  可能受到扰动, 所以  $b \rightarrow b + \xi(t)$ . 同时, 在膜电压  $v$  从激发态趋于静息态的过程中, 可能受到各种因素的干扰, 引入高斯色噪声  $\eta(t)$  来表示这种波动. 考虑以上两个因素, 修改方程 (3) 得到如下随机微分方程:

$$\frac{dv}{dt} = v(a-v)(v-1) - bv - v\xi(t) + \eta(t), \quad (4)$$

其中  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  表示高斯色噪声, 统计性质满足

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\langle \xi(t)\xi'(t') \rangle = \frac{D}{\tau_1} \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_1}\right\}, \quad (7)$$

$$\langle \eta(t)\eta'(t') \rangle = \frac{\alpha}{\tau_2} \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_2}\right\}. \quad (8)$$

上式中  $D$  和  $\alpha$  分别表示乘性色噪声强度和加性色噪声强度,  $\tau_1$  是乘性高斯色噪声的自关联时间,  $\tau_2$  是加性高斯色噪声的自关联时间.

## 3 稳态概率分布函数

应用统一色噪声理论及其随机等价理论<sup>[16]</sup>, 可以得到方程 (4)—(8) 所对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial v} A(v)P(v, t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial v^2} B(v)P(v, t), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$A(v) = h(v)/c(\tau_1, \tau_2, v) + \sqrt{B(v)}(\sqrt{B(v)})',$$

$$B(v) = [g(v)/c(\tau_1, \tau_2, v)]^2,$$

$$h(v) = v(a-v)(v-1) - bv,$$

$$g(v) = [Dv^2 + \alpha]^{1/2},$$

$$c(\tau_1, \tau_2, v)$$

$$= 1 - \tau_1 \left[ f'(v) - \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} f(x) \right]$$

$$- \tau_2 \left[ f'(v) - \frac{g'_2(x)}{g_2(x)} f(x) \right].$$

在定态情况下, 得到定态概率密度函数为

$$P_{\text{st}}(v) = \frac{N}{\sqrt{B(v)}} \exp\left\{-\frac{V(v)}{D}\right\}, \quad (10)$$

$N$  为归一化常数,  $V(v)$  广义势函数为

$$V(v) = - \int \frac{h(v)c(\tau_1, \tau_2, v)}{v^2 + \alpha/D} dv$$

$$\begin{aligned}
 &= -A_1 v^4/4 - A_2 v^3/3 - A_3 v^2/2 \\
 &\quad - A_4 v - F(v). \tag{11}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 n &= a + b, \quad m = a + 1, \quad c_1 = n^2 \tau_2 + n, \\
 c_2 &= m + mn(\tau_1 + 3\tau_2), \quad d_1 = \alpha/D, \\
 c_3 &= 1 + m^2(\tau_1 + 2\tau_2) + 2n(\tau_1 - 2\tau_2), \\
 c_4 &= m(3\tau_1 + 5\tau_2), \quad c_5 = 2\tau_1 + 3\tau_2, \\
 A_1 &= c_5, \quad A_2 = c_4, \quad A_3 = c_3 - c_5 d_1, \\
 A_4 &= c_2 - A_2 d_1, \quad B_1 = c_1 - A_3 d_1, \quad B_2 = -A_4 d_1, \\
 F(v) &= \frac{B_1}{2} \ln(v^2 D + \alpha) + B_2 \frac{1}{\sqrt{d_1}} \arctan \frac{v}{\sqrt{d_1}}.
 \end{aligned}$$

这里要说明的是, 在统一色噪声理论中对  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的取值没有限制.

根据稳态概率分布函数的表达式 (10), 可以讨论乘性和加性高斯色噪声自关联时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  以及乘性色噪声强度  $D$  和加性白噪声强度  $\alpha$  对稳态概率密度函数的影响. 这里要强调的是当  $\tau_1$

和  $\tau_2$  趋于 0 时, 也就是文献 [13] 所讨论的噪声源为高斯白噪声, 并且两个噪声源之间无关联的情形, 当  $\tau_2 = 0$  时, 就退化为文献 [14] 的一个结果. 因此这里重点讨论  $\tau_1 \neq 0$  和  $\tau_2 \neq 0$  的情形.

根据方程 (10) 表达的 FHN 神经元系统稳态概率分布函数关系, 做出不同自关联时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  及乘性噪声强度  $D$  和加性噪声强度  $\alpha$  下的图像, 讨论其对稳态概率的影响.

图 2(a) 和图 3(a) 分别为自关联时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  取不同值时, 稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数图像. 从图 2(a) 和图 3(a) 可以看出, 随着  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的增大,  $P_{st}(v)$  均由单峰结构变为不对称的双峰结构, 即  $\tau_1$  和  $\tau_2$  均可以诱导类相变现象. 在出现双峰的情况下, 左峰均要比右峰高, 这表明快变的膜变电压的分布在  $v_{s_1} = 0$  的概率较大. 此结论与细胞神经元系统多数时间总处于静息态是一致的. 随着  $\tau_1$  的增大, 概率分布函数  $P_{st}(v)$  在  $v_{s_1} = 0$  位置的峰值几乎不变, 但峰的宽度均变窄. 而在  $v_{s_2}$  处的峰值

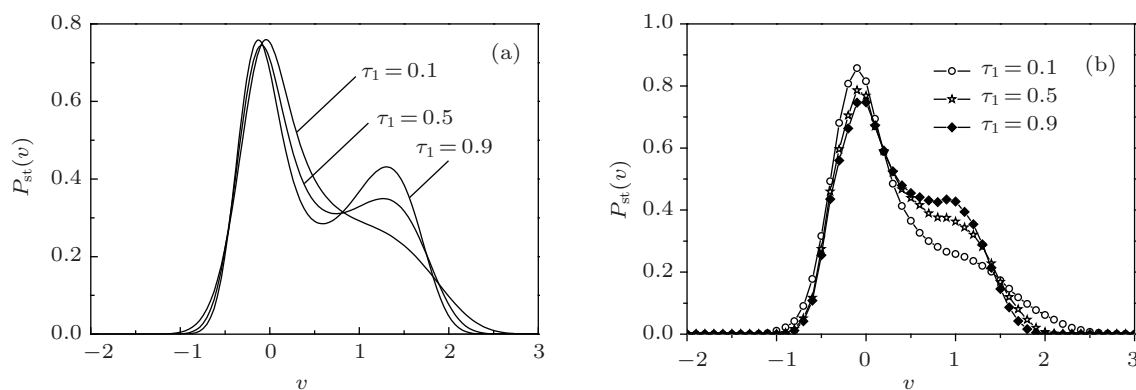


图 2 稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数 (乘性噪声的自关联时间  $\tau_1$  取不同值, 其他参数为  $a = 0.5, b = 0.01, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_2 = 0.01$ ) (a) 根据方程 (10) 做出的理论结果; (b) 数值模拟结果

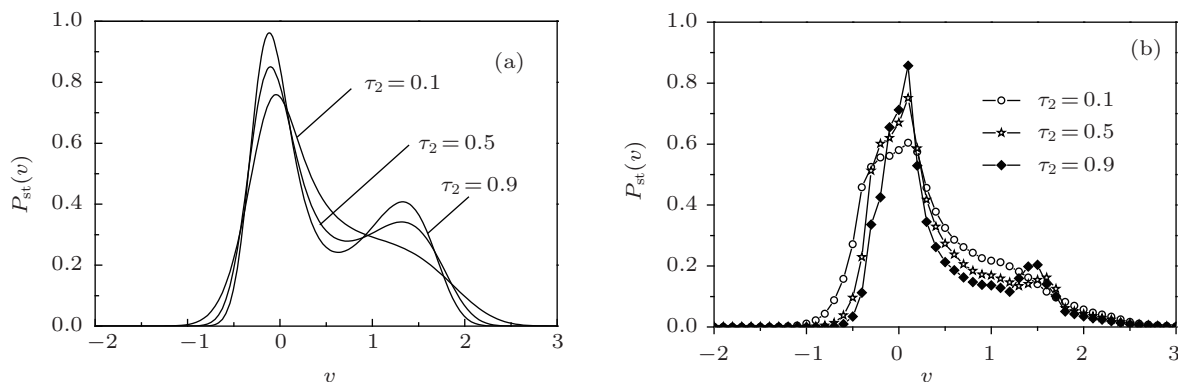


图 3 稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数 (乘性噪声的自关联时间  $\tau_2$  取不同值, 其他参数为  $a = 0.5, b = 0.01, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.01$ ) (a) 根据方程 (10) 做出的理论结果; (b) 数值模拟结果

逐渐增高,表明随着  $\tau_1$  的增大,系统从静息态向激发态转变.随着  $\tau_2$  的增大,概率分布函数  $P_{st}(v)$  在  $v_{s_1} = 0$  位置的峰值升高,峰的宽度均变窄,而在  $v_{s_2}$  处的峰值也逐渐增高,但是  $v_{s_2}$  处概率增加的比  $v_{s_1}$  处要大,总的来讲, $\tau_2$  的增加有利于系统从静息态向激发态转变.

图 4(a) 和图 5(a) 给出了稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数,乘性色噪声强度  $D$  和加性色噪声强度  $\alpha$  取不同值.从图 4(a) 和图 5(a) 可以看出,随乘性色噪声强度  $D$  和加性色噪声强度  $\alpha$  取不同值,概率分布函数  $P_{st}(v)$  峰的个数均发生了变化.即乘性噪声强度  $D$  和加性噪声强度  $\alpha$  也可以诱导相变.不同的是随  $D$  的增加, $P_{st}(v)$  由双峰变成了单峰, $P_{st}(v)$  在位置  $v_{s_2}$  处的峰消失,而在位置  $v_{s_1}$  峰值升高,变为单峰.这表明随着乘性噪声强度  $D$  的增加,神经元系统停留在在静息态的概率增加,即乘性噪声有利于静息态的缓慢恢复.这也说明噪声的存在是在绝热近似后系统仍能返回静息态的必要条件.从图 5(a) 可以看出,当加性噪声强度  $\alpha$  较小时,FHN 系统基本处于稳态  $v_{s_1}$ (静息态),

随着  $\alpha$  的增大,FHN 神经元系统处于稳态  $v_{s_1}$  和稳态  $v_{s_2}$  的概率接近相等.这表明此时通道是敞开的,有利于静息态与激发态的信息传递.

为了验证统一色噪声近似理论的可靠性,我们直接从方程 (4)—(8) 出发,应用色噪声的欧拉法 [17,18] 进行数值模拟,结果如图 2(b)、图 3(b)、图 4(b)、图 5(b) 所示.比较理论结果和数值结果,两者基本符合,说明我们的近似方法是正确的.

### 4 平均值

进一步,为了定量研究这个系统的稳态性质,可以通过平均值研究,定义 FHN 神经元系统的动作电位  $\langle v \rangle_{st}$  平均值为

$$\langle v \rangle_{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} v P_{st}(v) dv. \quad (12)$$

根据 (12) 式可以讨论乘性高斯色噪声  $\xi(t)$  的自关联时间  $\tau_1$  和加性高斯色噪声  $\eta(t)$  的自关联时间  $\tau_2$  对平均值  $\langle v \rangle_{st}$  的影响.

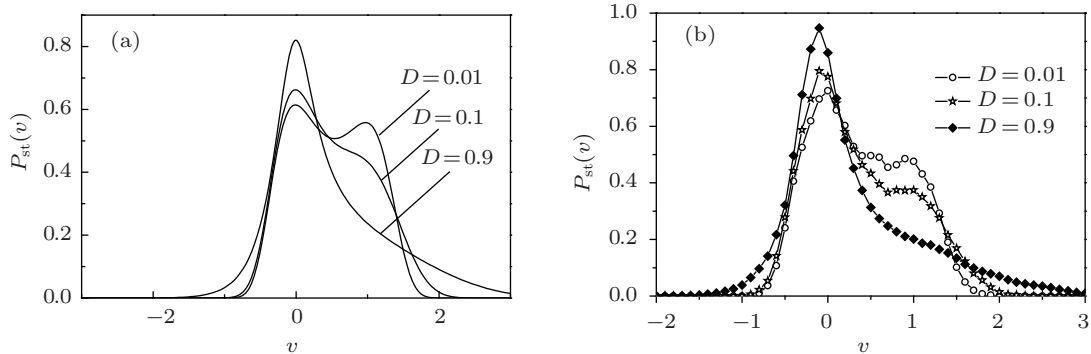


图 4 稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数 (乘性噪声强度  $D$  取不同值,其他参数为  $a = 0.5, b = 0.01, \alpha = 0.1, \tau_2 = 0.01$ ) (a) 根据方程 (10) 做出的理论结果; (b) 数值模拟结果

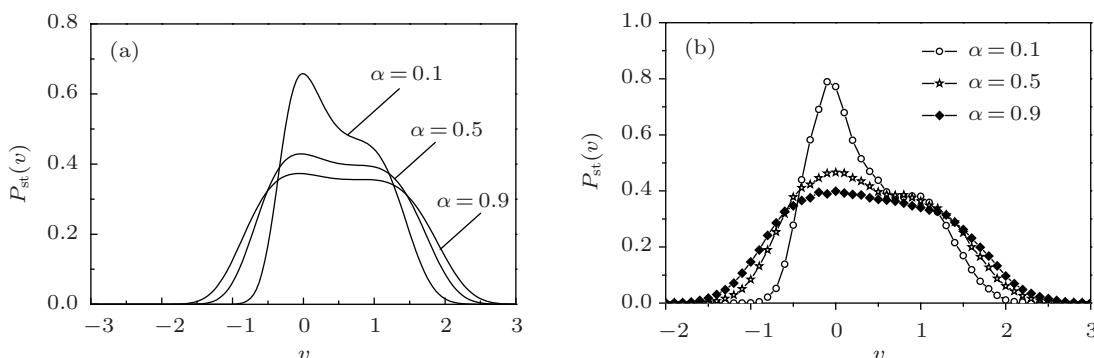


图 5 稳态概率分布函数  $P_{st}(v)$  作为  $v$  的函数 (乘性噪声强度  $\alpha$  取不同值,其他参数为  $a = 0.5, b = 0.01, D = 0.09, \tau_2 = 0.01$ ) (a) 根据方程 (10) 做出的理论结果; (b) 数值模拟结果

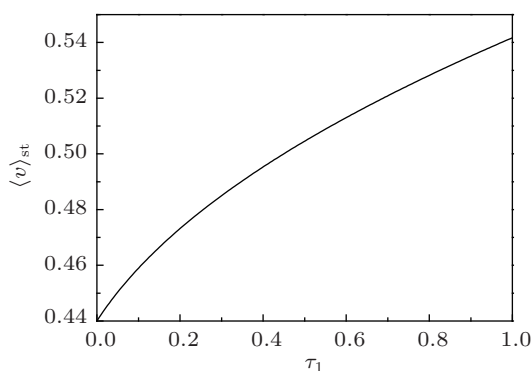


图6 平均值  $\langle v \rangle_{st}$  作为乘性噪声的自关联时间  $\tau_1$  的函数 (其中  $a = 0.5, b = 0.01, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_2 = 0.01$ )

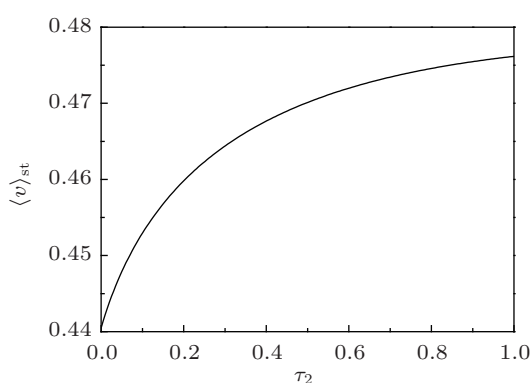


图7 平均值  $\langle v \rangle_{st}$  作为乘性噪声的自关联时间  $\tau_2$  的函数 (其中  $a = 0.5, b = 0.01, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.01$ )

图6和图7是根据(12)式做出的FHN神经元系统平均值随乘性高斯色噪声自关联时间  $\tau_1$  和加性高斯色噪声自关联时间  $\tau_2$  的变化情况. 我们发现随着  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的增加,  $\langle v \rangle_{st}$  均在增大, 这相当于神经元系统的动作电位  $v$  随着  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的增大而增大, 这意味着在自关联时间较长时, FHN 神经元系统最终从静息态趋于激发态.

## 5 结论

本文应用统一色噪声理论研究了双色噪声激励下一维 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元系统的动力学性质, 讨论了乘性和加性高斯色噪声自关联时间和乘性色噪声强度及加性色噪声强度对 FHN 神经元系统的稳态概率密度函数以及动作电位  $v$  的平均值的影响. 结果表明: 乘性噪声的自关联时间  $\tau_1$ 、加性噪声的自关联时间  $\tau_2$ 、加性噪声强度  $\alpha$  和乘性噪声强度  $D$  都能够诱导非平衡相变的产生.  $\alpha$  和  $D$  的增大有利于系统从激发态向静息态转换.  $\tau_1, \tau_2$  的增大有利于系统从静息态向激发态转换. 噪声强度和其自关联时间的作用完全相反.

- [1] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [2] Moss F, McClintock P V E 1998 *Noise in Nonlinear Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press) Vol.1-3
- [3] Liu Q, Jia Y 2004 *Phys. Rev. E* **70** 041907
- [4] Wang C J, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3983 (in Chinese) [王参军, 梅冬成 2008 物理学报 **57** 3983]
- [5] Wang C J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010503 (in Chinese) [王参军 2012 物理学报 **61** 010503]
- [6] Braun H A, Wissing Schafer H K, Hirsch M C 1994 *Nature* **367** 270
- [7] Ai B Q, Wang X J, Liu G T, Liu L G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 022903
- [8] Mei D C, Xie C W, Zhang L 2004 *Eur. Phys. J. B* **41** 107
- [9] Wang C J, Wei Q, Mei D C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2176
- [10] Wang C J, Wei Q, Zheng B B, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1735 (in Chinese) [王参军, 魏群, 郑宝兵, 梅冬成 2008 物理学报 **57** 1735]
- [11] Nie L R, Mei D C 2008 *Phys. Rev. E* **77** 031107
- [12] Alarcón T, Pérez Madrid A, Rubí J M 1998 *Phys. Rev. E* **57** 4979
- [13] Yu S N, Jia Y 2000 *Journal of Central China Normal University (Nature Science)* **34** 281
- [14] Wang C Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 749 (in Chinese) [王朝庆, 徐伟, 张娜敏, 李海泉 2008 物理学报 **57** 749]
- [15] Zhao Y, Xu W, Zou S C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1396 (in Chinese) [赵燕, 徐伟, 邹少存 2009 物理学报 **58** 1396]
- [16] Cao L, Wu D J, Ke S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [17] Sancho J M, San Miguel M, Katz S L, Gunton J D 1982 *Phys. Rev. A* **26** 1589
- [18] Wang C J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 479

# Steady state characteries of FitzHugh-Nagumo neural system subjected to two different kinds of colored noises\*

Yang Ya-Qiang<sup>1)</sup> Wang Can-Jun<sup>2)†</sup>

1) (*Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China*)

2) (*Nonlinear Research Institute, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721016, China*)

(Received 16 January 2012; revised manuscript received 26 February 2012)

## Abstract

Making use of the unified colored noise approximation, the steady state characteristics of the one-dimensional FitzHugh-Nagumo neural system with two different kinds of colored noises are investigated. The expressions of the steady state probability distribution function and the mean value are obtained. After numerical calculation, the results show that the self-correlated time of the multiplicative noise  $\tau_1$ , the self-correlated time of the additive noise  $\tau_2$ , the intensity of the additive noise  $\alpha$ , and the intensity of the multiplicative noise  $D$  can induce the transition. The increases of  $\alpha$  and  $D$  are conducive to the switch from the exciting state to the resting state. However, with  $\tau_1$  and  $\tau_2$  increasing, the switch from the resting state to the exciting state becomes obvious. The noise intensity and corresponding self-correlated time play opposite roles.

**Keywords:** FHN neural system, colored noise, steady state probability distribution function, mean value

**PACS:** 05.40.Ca, 87.16.Yc, 02.50.Ey

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11165016), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2010JQ1014), the Scientific Research Program Founded by Shaanxi Province Education Department (Grant No. 12JK0962), and the Science Foundation of Baoji University of Science and Arts of China (Grant No. ZK11053).

† E-mail: cjwangbj@126.com