

## 大气信道中单光子轨道角动量纠缠特性的研究\*

李铁 谌娟† 柯熙政 吕宏

(机电动态控制重点实验室, 西安 710065)

(西安理工大学自动化与信息工程学院, 西安 710048)

(2011年9月4日收到; 2011年11月4日收到修改稿)

本文讨论了大气信道中轨道角动量纠缠光子对的纠缠度, 并利用 von Karman 大气湍流谱来建立双光子纠缠度的模型, 分析了大气湍流对不同轨道角动量纠缠光子对纠缠度的影响. 研究表明: 在大气信道中, 由于大气湍流的存在, 纠缠光子对的纠缠度随着传输距离  $z$  的增加而减小; 大气湍流强度越大, 纠缠光子对的纠缠度下降的越快, 纠缠光子对传输的距离越小; 在湍流强度相同的大气信道轨道角动量指数越大的纠缠光子对, 纠缠度下降得越慢, 纠缠光子对传输的距离越远.

**关键词:** 轨道角动量, 纠缠态, 大气湍流, 纠缠度

**PACS:** 42.50.-p

## 1 引言

量子纠缠是两体或者多体量子系统之间非定域、非经典的关联<sup>[1]</sup>, 被看作量子通信和量子信息处理的源. 基于纠缠光子对的量子通信具有通信容量大、保密性强等优点, 可实现经典信道无法完成的任务, 尤其是最大纠缠态在量子密钥分发、量子隐形传态和量子密集编码等方面有着重要的应用. 1994年 Shih 等人利用自发参量下转换得到了双光子的偏振纠缠态, 这为基于偏振纠缠的量子通信提供了纠缠源. 光子的角动量包括自旋角动量和轨道角动量, 光子具有的自旋角动量的本征值为  $\sigma\hbar$ ,  $\sigma = \pm 1$  分别对应的是左旋偏振光和右旋偏振光, 因此基于偏振纠缠的光子对常用于实现 2-qubit 的量子通信. 1992年, Allen 等人<sup>[2]</sup>在实验上证明了光子不仅具有自旋角动量而且还具有轨道角动量. 这种具有轨道角动量光束为涡旋光束, 该光束的特点是相位呈螺旋分布和中心光强为 0, 其中最常用的涡旋光束为拉盖尔-高斯 (Laguerre-Gaussian LG) 光束, 单个光子具有轨道角动量的本征值为  $l\hbar$ ,  $l$  为任意值. 单光子的轨道角动量编码与偏振态编码方

式不同, 以单光子的轨道角动量作为信息的载体来编码信息, 能够大大增加传输的信息容量<sup>[3]</sup>, 因为轨道角动量的本征态为无穷维, 用轨道角动量来编码能够实现高维的量子通信, 且具有更高的保密性<sup>[4]</sup>, 这为单光子的多比特量子通信的实现奠定了基础. 2001年, Mair 等人<sup>[5]</sup>在实验上证明了自发参量下转换过程中产生的双光子在轨道角动量上是纠缠的. 由于轨道角动量的本征态可以组成无限维的 Hilbert 空间, 为实现纠缠为基础的多维量子信息处理和量子信息编码通信提供了可能. 与传统的偏振纠缠相比, 基于光子轨道角动量纠缠的量子通信具有更高的保密性、更高的编码强度等优点.

在量子通信中, 最主要的任务是保证携带信息的纠缠光子对能够在相当长的传输距离内保持其相干性. 对于光纤传输的信道能够保持纠缠光子对的相干性达数十公里<sup>[6-8]</sup>, 然而在自由空间量子通信中, 处于纠缠态的光子不仅受大气粒子对光子的散射和吸收, 而且受到大气湍流对纠缠光子退相干影响<sup>[9]</sup>, 使纠缠光子的纠缠度逐渐下降, 纠缠光子对从纠缠纯态演化为一个纠缠混合态, 甚至为可分离态, 导致自由空间量子通信链路的中断和通信效率的降低. Anguita 等人<sup>[10]</sup>研究了近地面修

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60977054) 和教育厅产业化培育项目 (批准号: 2010JC17) 资助的课题.

† E-mail: jjuan0110@126.com

正 Kolmogorov 谱型大气湍流对基于轨道角动量通信光链路间的影响. Gopaul 等人<sup>[11]</sup>研究了大气信道对纠缠光子的轨道角动量的联合探测概率的影响. 张逸新等人<sup>[12]</sup>研究了单光子斜程量子信道纠缠角动量的大气湍流效应, 研究表明随着传输距离的增加, 光子的联合探测效率逐渐下降. Filippus 等人<sup>[13]</sup>分析了近地面强湍流对轨道角动量纠缠光子相干性的影响, 研究表明纠缠光子在强湍流下传输, 纠缠光子的相干性逐渐退化. 纠缠光子对在大气信道中传输, 量子比特和大气信道的相互作用, 使量子系统的相干性逐渐消退, 相干性的退化使系统的纠缠特性逐渐消失, 纠缠光子对从纠缠态变化为非纠缠态, 从而导致信息的传输的失败<sup>[9]</sup>, 在自由空间量子通信的大气信道中纠缠光子对在其传输方向上保持纠缠距离的研究显得尤为必要.

本文主要利用 von Karman 湍流谱建立 2-qubit 纠缠度模型, 并分析了在大气信道中不同的大气湍流强度以及各个参数对不同轨道角动量纠缠光子对的纠缠特性的影响, 为进一步研究基于轨道角动量纠缠光子的高维自由空间量子通信提供了理论依据.

## 2 2-qubit 系统中量子纠缠态的纠缠度

纠缠在量子通信和量子信息处理方面具有重要的应用. 纠缠是量子力学的重要内容, 是存在于量子力学中多体量子系统中一种特殊的、非定域的量子关联. 纠缠态是指多体量子系统中量子态的表象都不能由量子态的直积态表示的特殊的量子现象. 基于纠缠的量子信息通信可以解决经典通信所不能实现的信息处理, 以光子的纠缠态作为量子通信中的源, 纠缠态在自由空间的量子信道中传输, 纠缠态受到外界环境的影响, 导致纠缠态的损耗, 甚至导致光子由纠缠态演化为可分离态, 这就是量子的退相干效应<sup>[14]</sup>. 为了定量的判定一个量子体系是否是纠缠以及纠缠量的多少, 人们引进了纠缠度<sup>[15]</sup>的概念. 纠缠度是对纠缠光子纠缠程度的度量, 判定纠缠态所具有纠缠量多少的依据. 纠缠度为系统不同的纠缠态提供了可以比较的关系, 常用的纠缠度量的方法有部分熵纠缠度、形成纠缠度<sup>[16,17]</sup>、蒸馏纠缠、相对纠缠熵<sup>[18]</sup>和负度.

在自由空间量子通信中, 纠缠态往往受到外界环境的影响, 使纠缠光子对从纠缠纯态演化为一个纠缠混合态, 于是 Bennett 等人提出了形成纠缠度<sup>[16,17]</sup>. 一般两体高维纠缠混合态的形成纠缠度

都是难以计算, 还处于研究探索阶段. 但是对于 2-qubit 系统, Wotters 给出了形成纠缠度的解析表达式<sup>[19]</sup>为

$$E(\rho) = H\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)})\right], \quad (1)$$

其中,  $H(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$ ,  $\rho$  为 2-qubit 系统下纠缠光子对的密度矩阵,  $C(\rho)$  为共生纠缠度<sup>[19]</sup>,  $E(\rho)$  随着  $C(\rho)$  的变化而单调变化, 则  $C(\rho)$  的表达式为

$$C(\rho) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (2)$$

这里,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  为厄米矩阵  $\varsigma$  本征值的算术平方根, 且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ ,  $\varsigma$  的表达式为

$$\varsigma = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3)$$

这里,  $\sigma_y$  为泡利矩阵, 且  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\otimes$  表示直积态,  $\rho^*$  为  $\rho$  的复共轭. 对于纠缠来说, 当  $C(\rho) = 1$  时, 纠缠光子对为最大纠缠态; 当  $C(\rho) = 0$  时, 为非纠缠态; 当  $0 < C(\rho) < 1$  时, 纠缠光子对处于非最大纠缠态.

## 3 轨道角动量基下纠缠双光子态的密度矩阵

在大气信道中, 大气湍流能够随机的改变光束的幅相特性, 引起光束的幅度随机的起伏, 对于单个 LG 模的光子态来说, 其密度算符可用轨道角动量为基来表示, 为<sup>[13]</sup>

$$\rho(z) = \sum_{mn} |m\rangle \rho_{mn}(z) \langle n|, \quad (4)$$

这里,  $\rho_{mn}$  为密度矩阵元,  $|m\rangle$  和  $\langle n|$  代表轨道角动量基下的 LG 模. 轨道角动量来表达空间波函数为  $\text{LG}_m(K, z) = \langle K|m, z\rangle$ , 这里  $K$  是两维空间频率横向矢量,  $\text{LG}_m(K, z)$  为 LG 模的二维傅里叶变换函数, 该函数与传输方向  $z$  有关, 则该轨道角动量模可由  $|m, z\rangle$  来表示, 且为一个完备的两维正交基. 在近轴近似情况下, 光子在湍流中传输的波函数由两部分组成<sup>[13]</sup>: 一部分是没有大气湍流存在的信道中传输, 另一部分在大气湍流存在信道中传输. 在无限小的传输距离  $dz$  中, 波函数可表示为

$$\text{LG}_m(K, z) \xrightarrow{dz} \text{LG}_m(K, z) + i[|K|^2 \text{LG}_m(K, z) - 2k^2 N(K, z) * \text{LG}_m(K, z)]dz / (2k), \quad (5)$$

这里,  $*$  为卷积,  $k$  为波数,  $N(K, z)$  为折射率波动的两维傅里叶变换, 它的表达式为  $N(K, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(k) (\Phi_0(k) \Delta_k^{-3})^{1/2} \exp(ik_z z) dk_z$  其中  $k$  为三维空间频率矢量,  $\Phi_0(k)$  为折射率波动的功率谱密度, 且  $\Delta_k$  为频域内空间频率矢量的相干宽度,  $\tilde{\chi}(k)$  为三维谱函数, 满足  $\tilde{\chi}^*(k) = \tilde{\chi}(-k)$ , 且  $\langle \tilde{\chi}(k_1) \tilde{\chi}^*(k_2) \rangle = (2\pi \Delta_k)^3 \delta_3(k_1 - k_2) \delta_3(k)$  为三维 Dirac-delta 函数. 将 (5) 式代入 (4) 式中, 则光子密度矩阵变化为

$$\rho(z) = \sum_{mn} \left( \frac{1}{4\pi^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K_1\rangle \text{LG}_m(K_1) \rho_{mn}(z) \times \text{LG}_n(K_2) \langle K_2| d^2 K_1 d^2 K_2, \quad (6)$$

则由 (5) 和 (6) 式, 密度算符的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_z \rho(z) = & \sum_{mnpq} |m\rangle \rho_{pq}(z) \langle n| \int_{-\infty}^{\infty} \text{LG}_m^*(K_1) \\ & \times \text{LG}_n(K_2) \left[ k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(K') \text{LG}_p(K_1 - K') \right. \\ & \times \text{LG}_q^*(K_2 - K') \frac{d^2 K'}{4\pi^2} - k^2 \text{LG}_p(K_1) \\ & \left. \times \text{LG}_q^*(K_2) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(K') \frac{d^2 K'}{4\pi^2} \right] \end{aligned}$$

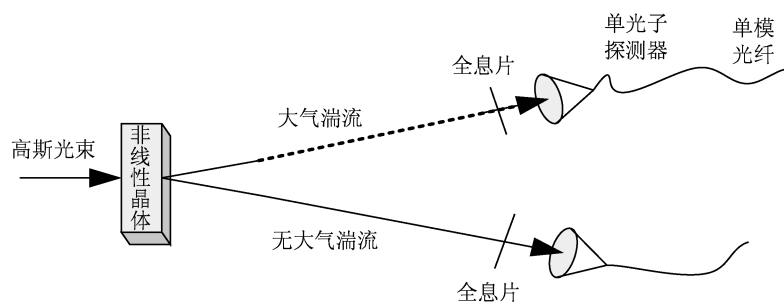


图1 轨道角动量纠缠光子对在大气信道中传输示意图

在大气湍流引起的随机相位起伏和折射率波动, 造成初始轨道角动量模散射到其他模式造成纠缠模式的退相干. 在自发参量下转换中, 利用高斯光束作为抽运光束, 假如纠缠双光子的径向指数  $p = 0$ , 且方位角指数的大小相等,  $l = \pm q$  的 LG 模. 若一路光束在湍流存在信道中传输, 另一路光束在湍流不存在得信道中传输如图 1 所示, 那么可利用 (7), (8), (9) 和 (10) 式, 得到纠缠双光子的密度矩阵元的最终表达式为

$$\partial_z \rho_{mnpq} = V_{mnrsp} \rho_{rspq} + V_{pqrs} \rho_{mnrsp}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{i}{2k} (|K_1|^2 - |K_2|^2) \text{LG}_p(K_1) \\ & \times \text{LG}_q^*(K_2) \left] \frac{d^2 K_1}{4\pi^2} \frac{d^2 K_2}{4\pi^2}, \quad (7) \end{aligned}$$

这里,  $\Phi_1(K) = \Phi_0(K, k_z = 0)$ . (7) 式中的第一个积分可以表示为

$$E_{mnpq} = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(K) W_{mp}^*(K) W_{nq}(K) \frac{d^2 K}{4\pi^2}, \quad (8)$$

其中,  $W_{mn}(K, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{LG}_m(K_1) \text{LG}_n^*(K_1 - K) d^2 K_1$ . 由于  $\text{LG}_p(K_1)$  和  $\text{LG}_q^*(K_2)$  相互正交, 所以  $\frac{1}{4\pi^2} k^2 \text{LG}_p(K_1) \text{LG}_q^*(K_2) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(K') d^2 K'$  项可简化为  $\delta_{p,q} R$ , 其中  $\delta_{p,q}$  为 Kronecke-delta 函数,  $R$  由下式表示:

$$R = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(K) \frac{d^2 K}{4\pi^2}. \quad (9)$$

(7) 式中最后一项为

$$\begin{aligned} V_{mnpq} = & \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} (|K_1|^2 - |K_2|^2) \text{LG}_p(K_1) \\ & \times \text{LG}_m^*(K_1) \times \text{LG}_n(K_2) \text{LG}_q^*(K_2) \\ & \times \frac{d^2 K_1}{4\pi^2} \frac{d^2 K_2}{4\pi^2}. \quad (10) \end{aligned}$$

$$+ E_{mnrsp} \rho_{rspq} - R \rho_{mnpq}. \quad (11)$$

利用 Von Karman 大气湍流谱来分析在大气信道中大气湍流对轨道角动量纠缠光子对的影响. 大气信道中大气湍流 Von Karman 谱<sup>[20]</sup> 的表达式为

$$\Phi_0(k) = 0.033 C_n^2 (|k|^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad (12)$$

这里,  $C_n^2$  为大气湍流的折射率结构常数, 在不同的湍流强度下其取值如表 1 所示.  $\kappa_0$  与湍流的外尺度成反比. 这里把大气湍流谱作为折射率波动的功率谱密度, 由 (9) 和 (12) 式得到

$$R = 0.1244 C_n^2 \kappa_0^{-5/3}. \quad (13)$$

若  $V_{mnpq}(z) = 0$ , 那么湍流外尺度的条件下  $E_{mnr}$  的非零项为

$$\begin{aligned} E_{q,q,q,q}(z) &= E_{q,-q,q,-q}(z) = E_{-q,q,-q,q}(z) \\ &= E_{-q,-q,-q,-q}(z) \\ &= R - \alpha_q h(z), \end{aligned} \quad (14)$$

$$E_{q,q,-q,-q}(z) = E_{-q,-q,q,q}(z) = \beta_q h(z), \quad (15)$$

式中  $\alpha_q$  和  $\beta_q$  是由  $q$  决定的常数且均大于 0,  $h(z)$  的表达式为

$$h(z) = \pi^3 C_n^2 w_0^{11/3} \lambda^{-3} z_R^{-8/3} (z_R^2 + z^2)^{5/6}, \quad (16)$$

式中  $z_R$  为瑞利长度且  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ ,  $w_0$  为光束束腰半径,  $\lambda$  为光束的波长, 则 (16) 式可写为

$$\begin{aligned} h(z) &= \pi^{1/3} C_n^2 w_0^{-5/3} \lambda^{-1/3} \\ &\times (\pi^2 w_0^4 \lambda^{-2} + z^2)^{5/3}. \end{aligned} \quad (17)$$

把 (13), (14), (15) 和 (17) 式代入 (11) 式可得到 2-qubit 纠缠光子对的密度矩阵, 为

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 & 0l \\ 0 & bd & cd & 0 \\ 0 & cd & bd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ad \end{bmatrix}, \quad (18)$$

这里,

$$d = \exp[-(\alpha_q - \beta_q)H(z)], \quad (19)$$

$$a = 1 - \exp[-2\beta_q H(z)],$$

$$b = 1 + \exp[-2\beta_q H(z)],$$

$$c = -2 \exp[-\beta_q H(z)], \quad (20)$$

$$H(z) = \int_0^z h(y) dy,$$

式中,  $z$  为纠缠光子对的传输距离, 当  $z = 0$  时可得  $H(z) = 0$ .

表 1 不同的大气湍流下的折射率结构常数

大气湍流的强度	大气湍流折射率结构常数 $C_n^2$
弱湍流	$C_n^2 < 6.4 \times 10^{-17}$
中等湍流	$6.4 \times 10^{-17} < C_n^2 < 2.5 \times 10^{-13}$
强湍流	$C_n^2 > 2.5 \times 10^{-13}$

#### 4 大气湍流下纠缠光子对的纠缠度

对于纠缠态来说, 密度矩阵满足  $\text{tr}(\rho) = 1$ , 当为纠缠纯态时  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ , 纠缠混态时  $\text{tr}(\rho^2) < 1$ . 由矩阵 (18) 可知该 2-qubit 系统密度矩阵的迹  $T = \text{tr}(\rho) = d$ , 且密度矩阵的迹是变化的. 为了研究

纠缠光子对的纠缠度, 这里假设密度矩阵的迹始终为 1. 通过建立纠缠光子对形成纠缠度的模型来分析大气信道中纠缠光子对的纠缠特性. 由 (2) 式可得

$$\varsigma = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

这里

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \rho^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

则

$$\varsigma = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 & 2bc & 0 \\ 0 & 2bc & b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

那么  $\varsigma$  特征值的算术平方根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4}(b - c), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}a, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}a, \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}(b + c). \end{aligned} \quad (23)$$

把 (20) 和 (23) 式代入 (2) 式中, 可得到  $C(\rho)$ , 为

$$\begin{aligned} C(\rho) &= \max \left\{ \frac{1}{2} \exp[-\beta_q H(z)] \right. \\ &\quad \left. + \exp[-2\beta_q H(z)] - 1, 0 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式可知,  $C(\rho)$  随着  $z$  的增大而逐渐减小, 在

$z = 0$  处  $C(\rho) = 1$ . 把 (24) 式代入 (1) 式中可得

$$E(\rho) = \max \left\{ \frac{1}{2} H \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \exp[-\beta_q H(z)] + \exp[-2\beta_q H(z)] - 1} \right), 0 \right\}, \quad (25)$$

其中,  $H(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$ .

### 5 数值分析

图 2—图 7 中的 (a), (b) 和 (c) 分别对应大气湍流折射率指数为  $C_n^2 = 6.4 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $C_n^2 = 1.7 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$  和  $C_n^2 = 3 \times 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$  时纠缠光子对对纠缠度的变化曲线. 从图中可以看到

到 2-qubit 形成纠缠度的表达式, 为

在大气湍流存在的大气信道中, 纠缠度逐渐衰减到 0, 纠缠光子对由最大纠缠度逐渐退相干到可分离态, 双光子之间失去了关联性; 在相同湍流强度条件下, 不同的轨道角动量指数纠缠光子对的保持纠缠的距离不同, 轨道角动量越大纠缠光子对纠缠度衰减的越慢; 对于相同的轨道角动量指数的纠缠光子对, 湍流强度越大纠缠度衰减的越快.

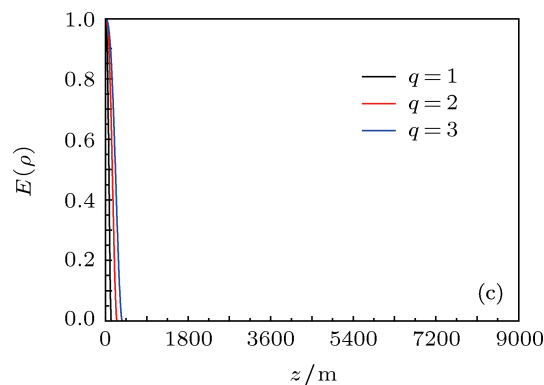
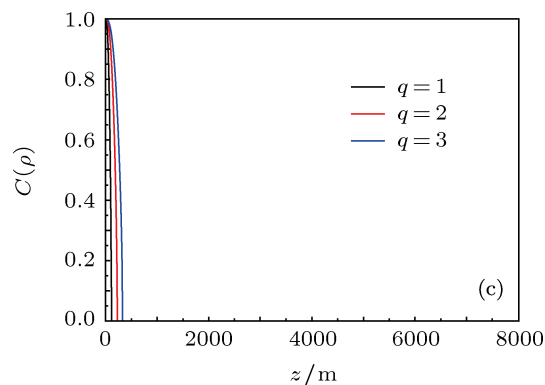
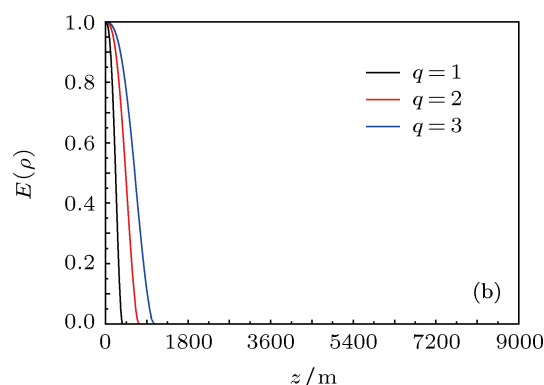
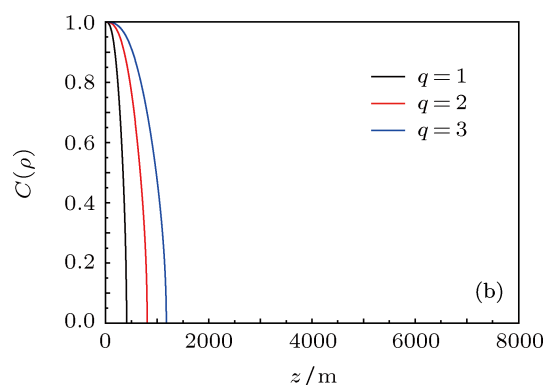
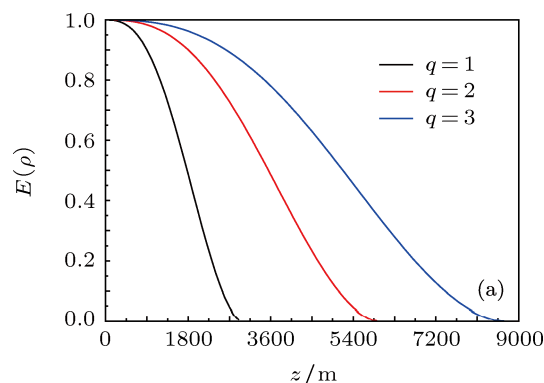
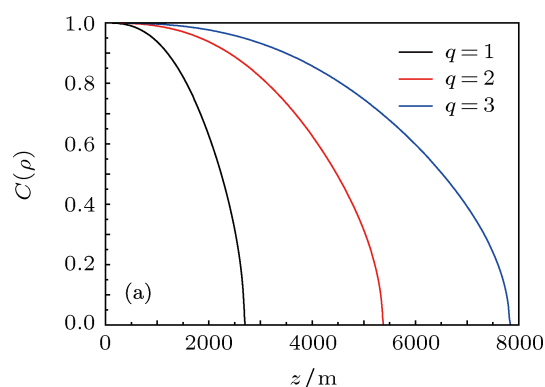


图 2 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对的共生纠缠度变化图

图 3 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对形成纠缠度的变化

图 2 和图 3 分别为纠缠光子对的共生纠缠度和形成纠缠度与传输距离关系的变化曲线图, 这里参数  $\lambda = 650 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 0.01 \text{ m}$ .

图 4 和图 5 分别为纠缠光子对共生纠缠度和形成纠缠度与传输距离关系的变化曲线, 这里参数  $\lambda = 650 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 0.1 \text{ m}$ . 由图 2 和图 4

对比或者图 3 和图 5 对比可以看到, 在大气湍流强度和轨道角动量指数相同的情况下, 当  $w_0$  由 0.01 变化到 0.1 时纠缠度衰减到 0 时, 纠缠光子对的传输距离变小, 这说明了适当的减小  $w_0$  可以减缓纠缠度的衰减并增大纠缠光子对的传输距离.

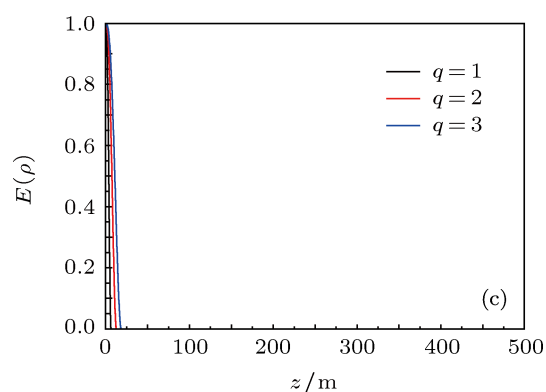
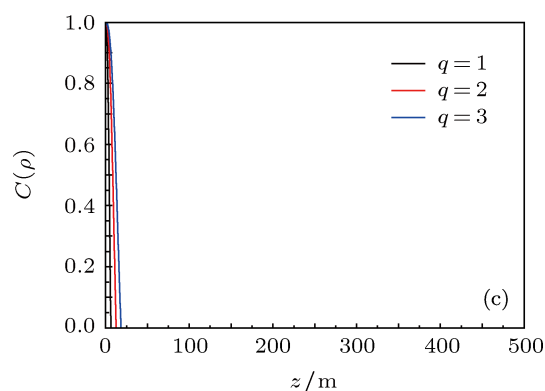
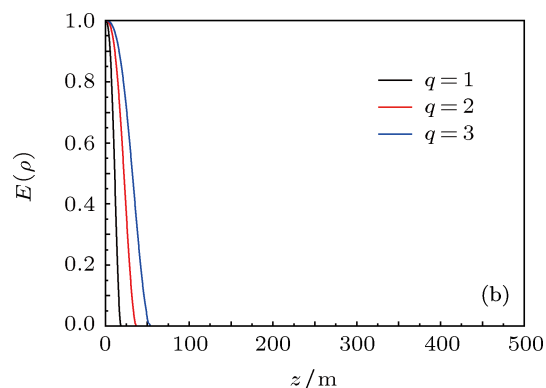
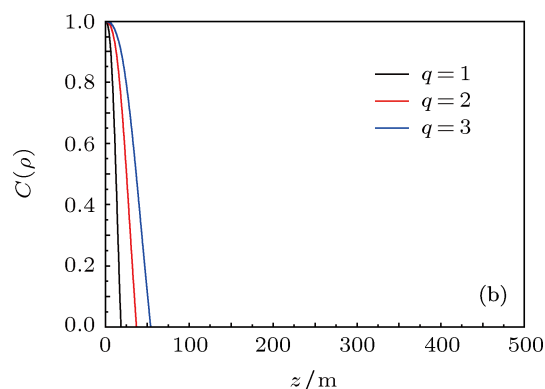
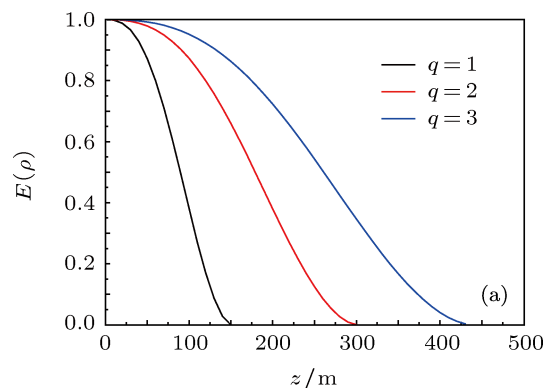
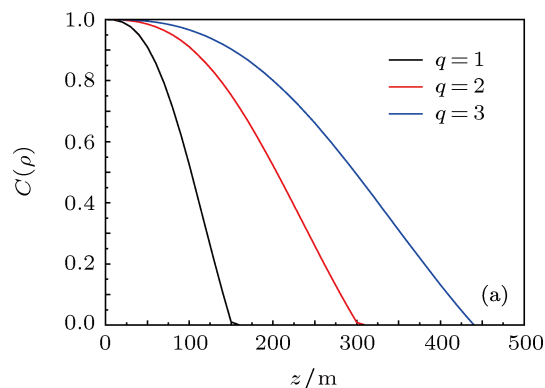


图 4 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对共生纠缠度的变化

图 5 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对形成纠缠度的变化

图 6 和图 7 分别为纠缠光子对的共生纠缠度和形成纠缠度与传输距离关系的变化曲线. 这里参数  $\lambda = 720 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 0.01 \text{ m}$ . 由图 2 和图 6 对比或者图 3 和图 7 对比可以看到在大气湍流强度和轨道角动量指数相同的情况下, 当  $\lambda$  由 650 nm 变化到 720 nm 时纠缠度衰减到 0 时, 纠缠光子的传输距离变大, 这说明了适当的增大  $\lambda$  可以减缓纠缠度的衰减并增大纠缠光子对的传输距离.

道角动量指数相同的情况下, 当  $\lambda$  由 650 nm 变化到 720 nm 时纠缠度衰减到 0 时, 纠缠光子的传输距离变大, 这说明了适当的增大  $\lambda$  可以减缓纠缠度的衰减并增大纠缠光子对的传输距离.

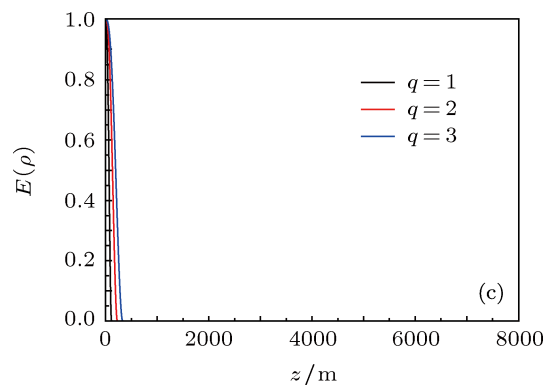
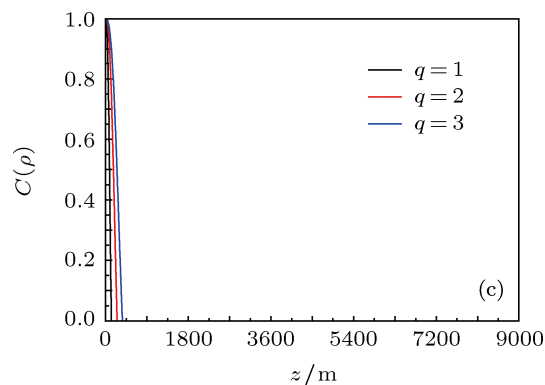
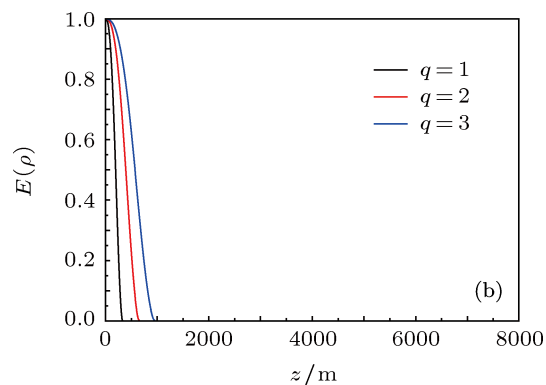
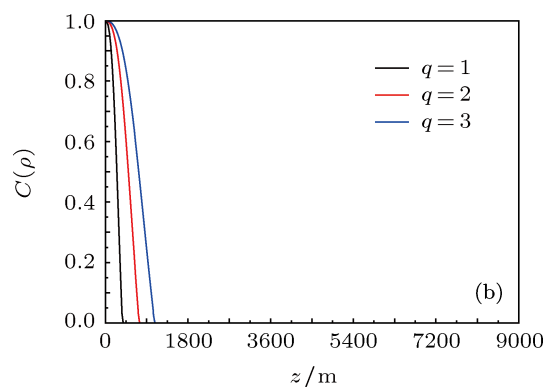
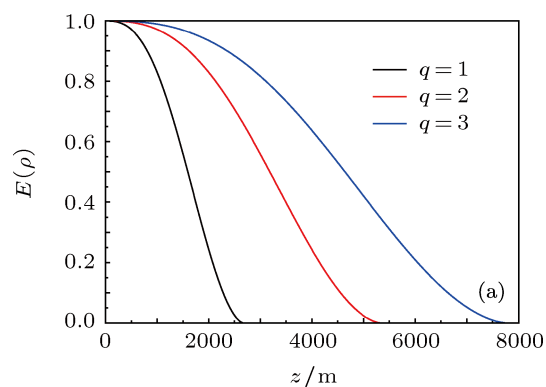
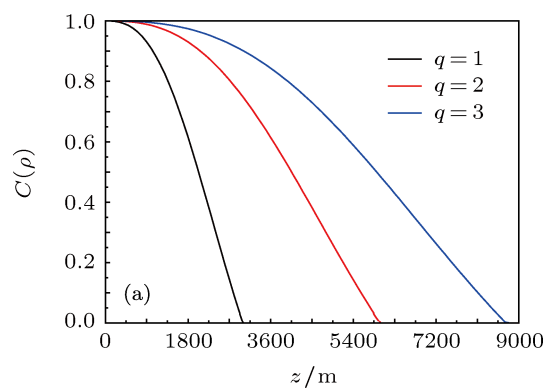


图 6 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对的共生纠缠度的变化

图 7 大气湍流下不同的轨道角动量纠缠光子对的形成纠缠度的变化

## 6 结论

本文主要从理论上分析了大气信道中大气湍流对基于 2-qubit 轨道角动量纠缠光子对纠缠特性的影响. 利用 von Karman 湍流谱建立大气湍流下纠缠光子对的纠缠度模型, 通过对大气信道中影响光子对纠缠度的各个参数的分析, 可以看出在大气信道中由于大气湍流的影响, 在传输方向上纠缠光子对的纠缠度随着传输距离的增加而逐渐衰减到 0,

光子由纠缠态逐渐退化为可分离态. 而轨道角动量越大的纠缠光子对的传输距离要大于轨道角动量小的纠缠光子对. 参数  $\lambda$  和  $w_0$  对纠缠光子对的退化也存在着影响,  $\lambda$  与传输距离成正比, 然而  $w_0$  与传输距离成反比. 因此, 在大气信道中若使纠缠光子在更远的传输距离上保持纠缠特性, 可以适当增加光束的波长或者减小光束的束腰大小, 这为研究基于轨道角动量纠缠的自由空间高维量子通信提供了理论依据.

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [3] James D F V 1994 *Opt. Soc. Am. (A)* **11** 1641
- [4] Gori F 1998 *Opt. Lett.* **23** 241
- [5] Mair A, Vaziri A, Weihsand G, Zeilinger A 2001 *Nature* **412** 313
- [6] Poppe A, Fedrizzi A, Ursin R, BÖhm H R, Lorünser T, Maurhardt O, Peev M, Suda M, Kurtsiefer C, Weinfurter H 2004 *Opt. Expr.* **12** 3865
- [7] Zhang Q, Takesue H, Nam S W, Langrock C, Xie X, Baek B, Fejer M M, Yamamoto Y 2008 *Opt. Expr.* **16** 5776
- [8] Salart D, Baas A, Branciard C, Gisin N, Zbinden H 2008 *Nature* **454** 861
- [9] Yan Y, Pei C X, Shi R J, Han B S, Zhang L 2007 *Journal of University of Electronic Science and Technology of China* **34** 711 (in Chinese) [阎毅, 裴昌幸, 师瑞娟, 韩宝彬, 张磊 2007 西安电子科技大学学报 **34** 711]
- [10] Anguita J A, Neifeld M A and Vasic B V 2008 *Appl. Opt.* **47** 2414
- [11] Gopau C, Andrews R 2007 *New, J. Phys.* **9** 94
- [12] Zhang Y X, Zhang J, Wang J, Jia J J 2010 *Laser Journal* **31** 24 (in Chinese) [张逸新, 张建, 王建宇, 贾建军 2010 激光杂志 **31** 24]
- [13] Roux F S 2010 *Physics. Optics.* **1009** 1956
- [14] Zurek W H 1981 *Phys. Rev. D* **24** 1516
- [15] Shi M J, Du J F, Zhu D P 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 825 (in Chinese) [石名俊, 杜江峰, 朱栋培 2000 物理学报 **49** 825]
- [16] Bennett C H, Divincenzo D P, Smolin J A, Smolin, William K, Wootters 1996 *Phys. Rev.* **54** 3824
- [17] Terhal B M, Vollbrecht K G H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2625
- [18] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev.* **56** 4452
- [19] Wootters W K 1998 *Phys. Rev.* **80** 2245
- [20] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser beam propagation through random media* (Washington, SPIE) p32

# Study of orbital angular momentum entangled photons entanglement in atmospheric channel\*

Li Tie Chen Juan<sup>†</sup> Ke Xi-Zheng Lü Hong

(*Science and Technolgy on Electromechanical Dynamic Control Laboratory, Xi'an 710065, China*)

(*The Faculty of Automation & Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China*)

(Received 4 September 2011; revised manuscript received 4 November 2011)

## Abstract

In this paper, we describe orbital angular momentum entangled photon pair entanglement in atmospheric channel. The Von Karman spectrum of turbulence is used to create a model of two-photon pair entanglement. The effects of atmospheric turbulence on the entanglement of entangled photon pairs of different orbital angular momentum bases are analyzed. The obtained results are as follows because of the presence of atmospheric turbulence, the entanglement of entangled photon pairs decreases with the increase of the propagation distance  $z$  in the atmosphere channel. The entanglement of the entangled photon pairs decreases with the increase of transmission distance. The bigger the turbulence intensity, the faster the entanglement decline and the shorter the propagation distance. In the same intensity of atmospheric turbulence of the atmospheric channel, the bigger the orbital angular momentum index, the slower the entanglement decline and the further the propagation distance.

**Keywords:** orbital angular momentum, entangled state, atmospheric turbulence, entanglement

**PACS:** 42.50.-p

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60977054), and the Foundation of the Education Bureau (Grant No. 2010JC17).

<sup>†</sup> E-mail: [jiuan0110@126.com](mailto:jiuan0110@126.com)